Chương 7 (tiếp)

Các phương pháp tính tích phân

NỘI DUNG

7.4 Phương pháp tích phân hữu tỷ
7.5 Tóm tắt về các phương pháp tích phân
7.6 Phương trình vi phân cấp 1

7.4 Phương pháp tích phân hữu tỉ

7.4.1 Phân tích thành phân thức tối giản

Giả sử cần tính tích phân $\int \frac{P}{Q}dx$ trong đó P, Q là các đa thức. Nếu bậc của P lớn hơn hoặc bằng bậc của Q, bằng phép chia đa thức ta luôn có: $\frac{P}{Q} = R + \frac{P_1}{Q}$

Trong đó R là một đa thức, bậc của P_1 nhỏ hơn bậc của Q. Do tính chất cộng tính của tích phân, và việc tính tích phân của đa thức dễ dàng nên:

Ta chỉ cần nghiên cứu tính $\int \frac{P}{Q}dx$ khi bậc của P nhỏ hơn bậc của Q

7.4 Phương pháp tích phân hữu tỉ

7.4.1 Phân tích thành phân thức tối giản

Xét phân thức: $\dfrac{P}{Q}$ tối giản, bậc của P nhỏ hơn bậc của Q.

Giả sử $Q = a.(x-x_0)^{\alpha}(x-x_1)^{\beta}...(x^2+lx+m)^{\mu}(x^2+px+q)^{\nu}...$Ta luôn có:

$$\frac{P}{Q} = \frac{A_0}{(x-x_0)^{\alpha}} + \frac{A_1}{(x-x_0)^{\alpha-1}} + \ldots + \frac{A_{\alpha-1}}{(x-x_0)} + \frac{B_0}{(x-x_1)^{\beta}} + \frac{B_1}{(x-x_1)^{\beta-1}} + \ldots + \frac{B_{\beta-1}}{(x-x_1)} + \ldots$$

$$\frac{l_0 x + m_0}{(x^2+lx+m)^{\mu}} + \frac{l_1 x + m_1}{(x^2+lx+m)^{\mu-1}} + \ldots + \frac{l_{\mu} x + m_{\mu}}{(x^2+lx+m)} +$$

$$+ \frac{p_0 x + q_0}{(x^2+px+q)^{\nu}} + \frac{p_1 x + q_1}{(x^2+px+q)^{\nu-1}} + \ldots + \frac{p_{\nu} x + q_{\nu}}{(x^2+px+q)} + \ldots$$

7.4 Phương pháp tích phân hữu tỉ

7.4.2 Tích phân hàm phân thức hữu tỉ

Để tìm các hệ số của các phân thức vế phải ta dùng phương pháp hệ số bất định. Ta có các kết quả sau:

1. $\int \frac{A}{x-a}dx = A\ln|x-a| + C$

2. $\int \frac{A}{(x-a)^k}dx = \frac{A}{(1-k)(x-a)^{k-1}} + C$

3. $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} \quad a,b,c \in R, a \neq 0$

4.

$$\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx \quad a,b,c \in R, a \neq 0$$

$$\int \frac{\frac{A}{2a}(2ax+b) - \frac{Ab}{2a} + B}{ax^2+bx+c}dx = \frac{A}{2a}\int \frac{d(ax^2+bx+c)}{ax^2+bx+c} + (B - \frac{Ab}{2a})\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$$

7.4 Phương pháp tích phân hữu tỉ

7.4.2 Tích phân hàm phân thức hữu tỷ

Ví dụ Tính các tích phân sau:

a. $$\int \frac{x^4 + 2x^3 - 4x^2 + x - 3}{x^2 - x - 2}\,dx$$

b. $$\int \frac{5x^2 + 21x + 4}{(x+1)^2 (x-3)}\,dx.$$

c. $$\int \frac{x^2 + 4x - 23}{(x^2+4)(x+3)}\,dx.$$

7.4 Phương pháp tích phân hữu tỉ

7.4.2 Tích phân hàm phân thức hữu tỷ

a. $$\int \frac{x^4+2x^3-4x^2+x-3}{x^2-x-2}dx = \int\left(x^2+3x+1+\frac{8x-1}{x^2-x-2}\right)dx$$

$$= \int\left(x^2+3x+1+\frac{5}{x-2}+\frac{3}{x+1}\right)dx$$ *(sử dụng ví dụ 2)*

$$= \frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}+x+5\ln|x-2|+3\ln|x+1|+C.$$

b. $$\frac{5x^2+21x+4}{(x+1)^2(x-3)} = \frac{A_1}{(x+1)^2}+\frac{A_2}{x+1}+\frac{A_3}{x-3} \qquad A_1=3,\ A_2=-2,\ A_3=7.$$

$$\int \frac{5x^2+21x+4}{(x+1)^2(x-3)}dx = \int\frac{3dx}{(x+1)^2}+\int\frac{-2dx}{x+1}+\int\frac{7dx}{x-3}$$

$$= -3(x+1)^{-1}-2\ln|x+1|+7\ln|x-3|+C.$$

c.

7.4 Phương pháp tích phân hữu tỉ

7.4.2 Tích phân hàm phân thức hữu tỷ

c.

$$\frac{x^2+4x-23}{\left(x^2+4\right)\left(x+3\right)}=\frac{A_1x+B_1}{x^2+4}+\frac{A_2}{x+3}$$

$A_1=3,\ B_1=-5,\ A_2=-2$.

$$\int\frac{x^2+4x-23}{\left(x^2+4\right)\left(x+3\right)}=\int\frac{3x-5}{x^2+4}dx+\int\frac{-2dx}{x+3}$$

$$=3\int\frac{x\ dx}{x^2+4}-5\int\frac{dx}{x^2+4}-2\int\frac{dx}{x+3}$$

$$=3\left[\frac{1}{2}\ln\left(x^2+4\right)\right]-5\left[\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{x}{2}\right]-2\ln\left|x+3\right|+C.$$

7.4 Phương pháp tích phân hữu tỉ

7.4.3 Phân thức hữu tỉ của sin và cos $\int R(\sin x, \cos x)\, dx$

Dùng phép đổi biến u = tan $\frac{x}{2}$ để đưa về tích phân hàm hữu tỷ

$$\sin x = \frac{2u}{1+u^2}, \quad \cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2},$$

$$\text{và } dx = \frac{2}{1+u^2}\, du\,.$$

Ví dụ. Tính tích phân $\int \frac{dx}{3\cos x - 4\sin x}$.

7.4 Phương pháp tích phân hữu tỉ

7.4.3 Phân thức hữu tỉ của sin và cos

Ví dụ. Tính tích phân $\displaystyle\int \frac{dx}{3\cos x - 4\sin x}$.

$$\int \frac{dx}{3\cos x - 4\sin x} = \int \frac{\dfrac{2du}{1+u^2}}{3\left(\dfrac{1-u^2}{1+u^2}\right) - 4\left(\dfrac{2u}{1+u^2}\right)}$$

$$= \int \frac{-2du}{3u^2 + 8u - 3} = \int \frac{-2du}{(3u-1)(u+3)}$$

$$\frac{-2}{(3u-1)(u+3)} = \frac{A_1}{3u-1} + \frac{A_2}{u+3}$$

$$A_1 = -\frac{3}{5},\ A_2 = \frac{1}{5}.$$

$$\int \frac{dx}{3\cos x - 4\sin x} = \int \frac{\frac{-3}{5}du}{3u-1} + \int \frac{\frac{1}{5}du}{u+3} = \frac{3}{5}\cdot\frac{1}{5}\ln|3u-1| + \frac{1}{5}\cdot\ln|u+3| + C$$

$$= \frac{1}{5}\ln\left|3\tan\frac{x}{2} - 1\right| + \frac{1}{5}\ln\left|\tan\frac{x}{2} + 3\right| + C.$$

7.5 Tóm tắt về
các phương pháp tính tích phân

7.5.1 Chiến lược lấy tích phân

Bước 1. Rút gọn
Bước 2. Dùng các công thức cơ bản
Bước 3, Đổi biến
Bước 4. Phân lớp để có thể vận dụng các phương pháp:

I. Tích phân từng phần
II. Dạng lượng giác
III, Dạng căn thức
IV. Dạng hữu tỷ

Bước 5.

7.5 Tóm tắt về các phương pháp tính tích phân

Ví dụ. Tính các tích phân

a. $\displaystyle\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$ **b.** $\displaystyle\int \left(1+\tan^2\theta\right)d\theta$ **c.** $\displaystyle\int \sin^3 x\cos^2 x\;dx$ **d.** $\displaystyle\int 4x^2\cos 3x\;dx$

e. $\displaystyle\int \frac{x\;dx}{\sqrt{9-x^2}}\,dx$ **f.** $\displaystyle\int \frac{x^2\;dx}{\sqrt{9-x^2}}$ **g.** $\displaystyle\int e^{3x}\sin 2x\;dx$ **h.** $\displaystyle\int \frac{\cos^4 x\;dx}{1-\sin^2 x}$

7.5 Tóm tắt về các phương pháp tính tích phân

Giải.

a. dùng phép đổi biến $u = \sqrt{x}$

b. dùng công thức $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$

c. m lẻ, n chẵn, vậy đặt cosx = u

d. Dùng tích phân từng phần vài lần hoặc dùng công thức 124 trong bảng

e. Đặt $u = 9 - x^2$

f. Dùng phép đổi biến $x = 3\sin\theta$

g. Tích phân từng phần $u = \sin 2x$ $dv = e^{3x}dx$

h. chú ý $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Dùng tích phân từng phần hoặc bảng

7.6 Phương trình vi phân cấp một

7.6.1 Phương trình vi phân tuyến tính bậc nhất

Dạng: y' + P(x)y = Q(x) hoặc $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \quad (1)$

Công thức nghiệm nghiệm tổng quát:

$$y = \frac{1}{I(x)}\left[\int I(x)Q(x)\,dx + C\right]$$

$$\text{trong đó} \quad I(x) = e^{\int P(x)\,dx}$$

I(x) gọi là thừa số tích phân của phương trình vi phân (1)

Bài toán tìm nghiệm của (1) sao cho $y(x_0) = y_0$, trong đó x_0, y_0 là các số cho trước gọi là bài toán Cô si - bài toán giá trị đầu.

7.6 Phương trình vi phân cấp một

7.6.1 Phương trình vi phân tuyến tính bậc nhất

Ví dụ. Giải phương trình $x\dfrac{dy}{dx} + y = x.e^{2x},\ x > 0$

Giải

$$P(x) = \frac{1}{x};\ Q(x) = e^{2x} \Rightarrow I(x) = e^{\int \frac{1}{x}dx} = x$$

$$y = \frac{1}{x}\left(\int xe^{2x}dx + C\right) = \frac{1}{x}\left[\frac{xe^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4} + C\right]$$

Ví dụ. Giải phương trình $\dfrac{dy}{dx} = e^{-x} - 2y,\ x \geq 0;\ y(0) = 2$

Giải

7.6 Phương trình vi phân cấp một

7.6.1 Phương trình vi phân tuyến tính bậc nhất

$$P(x) = 2;\ Q(x) = e^{-x};\ I(x) = e^{\int 2dx} = e^{2x}$$

$$y = \frac{1}{e^{2x}}\left[\int e^{2x}e^{-x}dx + C\right] = \frac{1}{e^{2x}}\left[e^{x} + C\right]$$

$$y = e^{-x} + \frac{C}{e^{2x}};\quad y(0) = 2 \Leftrightarrow C = 1$$

$$\Leftrightarrow y = e^{-x} + \frac{1}{e^{2x}}$$