Chương 7

Các phương pháp tính tích phân

(Tiếp tục)

NỘI DUNG

Buổi 3:

7.7 Tích phân suy rộng
7.8 Các hàm hyperbolic và hàm ngược.

7.7 Tích phân suy rộng

7.7.1 Tích phân suy rộng loại một

<u>Ký hiệu</u>

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{N \to +\infty} \int_a^N f(x)\,dx$$

Ta cũng nói f(x) khả tích (theo nghĩa suy rộng) trên [a, +∞) hay tích phân

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$$

hội tụ.

7.7 Tích phân suy rộng

7.7.1 Tích phân suy rộng loại một

Ví dụ. Khảo sát sự hội tụ,phân kỳ của các tích phân sau:

a) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}$.   b) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x}$.

Tương tự định nghĩa tích phân: $\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx + \int_{a}^{\infty} f(x)\,dx.$$

7.7 Tích phân suy rộng

7.7.1 Tích phân suy rộng loại một

$$\int_{-\infty}^{\infty} f\left(x\right)dx = \int_{-\infty}^{a} f\left(x\right)dx + \int_{a}^{\infty} f\left(x\right)dx\,.$$

Ví dụ. Khảo sát sự hội tụ, phân kỳ của các tích phân và tính khi tích phân hội tụ

a. $\int_{1}^{\infty} 2x^{-3}dx$ **b.** $\int_{-\infty}^{-3} \frac{dx}{x}$ **c.** $\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2}dx$

7.7 Tích phân suy rộng

7.7.2 Tích phân suy rộng loại hai - Định nghĩa

Giả sử hàm f(x) liên tục trong khoảng [a, b) và $\lim_{x \to b-0} f(x) = \infty$

khi đó $\forall c < b$

Giả sử hàm f(x) liên tục trong khoảng [a, b) và $\lim_{x\to b-} f(x) = \infty$. Khi đó $\int_a^c f(x)dx$ có nghĩa với mọi c < b. Nếu tồn tại giới hạn: $\lim_{c\to b-} \int_a^c f(x)dx$ thì ta định nghĩa tích phân suy rộng $\int_a^b f(x)dx = \lim_{c\to b-} \int_a^c f(x)dx$

Nếu f(x) liên tục trên [a, c) ∪ (c, b], nhưng $\lim_{x\to c} f(x) = \infty$, ta định nghĩa:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

7.7 Tích phân suy rộng

7.7.2 Tích phân suy rộng loại hai - Định nghĩa

Giả sử hàm f(x) liên tục trong khoảng [a, b) và $\lim_{x\to b-} f(x) = \infty$. Khi đó $\int_a^c f(x)dx$ có nghĩa với mọi c < b. Nếu tồn tại giới hạn: $\lim_{c\to b-} \int_a^c f(x)dx$ thì ta định nghĩa tích phân suy rộng $\int_a^b f(x)dx = \lim_{c\to b-} \int_a^c f(x)dx$

Nếu hàm f(x) liên tục trong khoảng (a, b] nhưng $\lim_{x\to a+} f(x) = \infty$, thì ta định nghĩa tích phân suy rộng $\int_a^b f(x)dx = \lim_{c\to a+} \int_c^b f(x)dx$ miễn là giới hạn vế phải tồn tại.

Nếu f(x) liên tục trên [a, c) ∪ (c, b], nhưng $\lim_{x\to c} f(x) = \infty$, ta định nghĩa:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

7.7 Tích phân suy rộng

7.7.2 Tích phân suy rộng loại hai - ví dụ

Ví dụ 1.

a)

$$\int_{-1}^{0}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\lim_{c\to -1+0}\int_{c}^{0}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\lim_{c\to -1+0}\arcsin x\Big|_{c}^{0}=\frac{\pi}{2}$$

b)

$$\int_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\lim_{c\to 1-0}\int_{0}^{c}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\lim_{c\to -1+0}\arcsin x\Big|_{0}^{c}=\frac{\pi}{2}$$

c)

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\int_{-1}^{0}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}+\int_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\pi$$

7.7 Tích phân suy rộng

7.7.2 Tích phân suy rộng loại hai - ví dụ

Ví dụ 2. Xét sự hội tụ của $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}, \quad a < b; \alpha > 0$

Giải:

Có: $\lim_{x \to b-0} \frac{1}{(b-x)^\alpha} = \infty$

Với $\alpha \neq 1$ ta có $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha} = \lim_{c \to b-0} \left[-\frac{(b-x)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \Bigg|_a^c \right] = \lim_{c \to b-0} \frac{1}{\alpha-1} \left[(b-c)^{1-\alpha} - (b-a)^{1-\alpha} \right]$

Nhưng: $c \to b-0 \Rightarrow (b-c)^{1-\alpha} \to \begin{cases} 0 \text{ if } \alpha < 1 \\ +\infty \text{ if } \alpha > 1 \end{cases}$

Vậy: $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha} = \begin{cases} \dfrac{(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha} \text{ if } \alpha < 1 \\ +\infty \text{ if } \alpha > 1 \end{cases}$

Với $\alpha = 1$, ta có: $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)} = \lim_{c \to b-0} \int_a^c \frac{dx}{(b-x)} = \lim_{c \to b-0} -\left[\ln(b-c) - \ln(b-a) \right] = +\infty$

Tóm lại:

$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}$ hội tụ nếu $\alpha < 1$ và phân kỳ nếu $\alpha \geq 1$

7.7 Tích phân suy rộng

7.7.3 Tích phân suy rộng - các tiêu chuẩn so sánh

Định lý 1. Nếu các hàm f(x), g(x) liên tục trên $[a, +\infty)$, thỏa mãn điều kiện $0 \le f(x) \le g(x),\ \forall\, x \in [a, +\infty)$ thì:

Nếu $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ hội tụ thì $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ cũng hội tụ

Nếu $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ phân kỳ thì $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ cũng phân kỳ

Định lý 2. Nếu các hàm f(x), g(x) liên tục trên [a, b), dần đến vô cùng khi x dần tới b và thỏa mãn điều kiện $0 \le f(x) \le g(x),\ \forall\, x \in [a, b)$ thì:

Nếu $\int_a^b g(x)dx$ hội tụ thì $\int_a^b f(x)dx$ cũng hội tụ

Nếu $\int_a^b f(x)dx$ phân kỳ thì $\int_a^b g(x)dx$ cũng phân kỳ

7.7 Tích phân suy rộng

7.7.3 Tích phân suy rộng - các tiêu chuẩn so sánh

Ví dụ. Hãy chứng tỏ tích phân $\int_1^{\infty} e^{-x^2} dx$ hội tụ. $e^{-x^2} < e^{-x}$.

Bài tập. Xét sự hội tụ của các tích phân suy rộng

1) $\int_0^1 \frac{\cos^2 x}{\sqrt[3]{1-x}} dx$, 2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{x \sin x}$ 3) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}} + x^2}$

7.8 Các hàm hypecbolic
và các hàm ngược của chúng

7.8.1 Định nghĩa các hàm hypecbolic

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \text{ với mọi } x$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \text{ với mọi } x$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \text{ với mọi } x$$

$$\coth x = \frac{1}{\tanh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}; \quad \operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}}; \quad \operatorname{csch} x = \frac{1}{\sinh x} = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$$

7.8 Các hàm hypecbolic và các hàm ngược của chúng

7.8.2 Các qui tắc đạo hàm và tích phân

Cho u là một hàm khả vi của x. Khi đó:

$$\frac{d}{dx}(\sinh u) = \cosh u \,\frac{du}{dx} \qquad \frac{d}{dx}(\cosh u) = \sinh u \,\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(\tanh u) = \operatorname{sech}^2 u \,\frac{du}{dx} \qquad \frac{d}{dx}(\coth u) = -\operatorname{csch}^2 u \,\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sech} u) = -\operatorname{sech} u \tanh u \,\frac{du}{dx} \qquad \frac{d}{dx}(\operatorname{csch} u) = -\operatorname{csch} u \coth u \,\frac{du}{dx}$$

$$\int \sinh x \, dx = \cosh x + C \qquad \int \cosh x \, dx = \sinh x + C$$

$$\int \operatorname{sech}^2 x \, dx = \tanh x + C \qquad \int \operatorname{csch}^2 x \, dx = -\coth x + C$$

$$\int \operatorname{sech} x \tanh x \, dx = -\operatorname{sech} x + C \qquad \int \operatorname{csch} x \coth x \, dx = -\operatorname{csch} x + C$$

7.8 Các hàm hypecbolic và các hàm ngược của chúng

7.8.2 Các qui tắc đạo hàm và tích phân - ví dụ

Tìm $\dfrac{dy}{dx}$ với mỗi hàm sau đây:

a. $y = \cosh Ax$, A là một hằng số b. $y = \tanh\left(x^2+1\right)$ c. $y = \ln\left(\sinh x\right)$

a. $\dfrac{d}{dx}\left(\cosh Ax\right) = \sinh\left(Ax\right)\dfrac{d}{dx}\left(Ax\right) = A\sinh Ax$

b. $\dfrac{d}{dx}\left[\tanh\left(x^2+1\right)\right] = \operatorname{sech}^2\left(x^2+1\right)\dfrac{d}{dx}\left(x^2+1\right) = 2x\operatorname{sech}^2\left(x^2+1\right)$

c. $\dfrac{d}{dx}\left[\ln\left(\sinh x\right)\right] = \dfrac{1}{\sinh x}\dfrac{d}{dx}\left(\sinh x\right) = \dfrac{1}{\sinh x}\left(\cosh x\right) = \coth x$.

7.8 Các hàm hypecbolic và các hàm ngược của chúng

7.8.2 Các qui tắc đạo hàm và tích phân - ví dụ

Tìm mỗi tích phân sau đây:

a. $\int \cosh^3 x \sinh x \, dx$ **b.** $\int x \operatorname{sech}^2\left(x^2\right) dx$ **c.** $\int \tanh x \, dx$

Giải.

a. Đặt $u = \cosh x$ thì $du = \sinh x \, dx$. Ta có

$$\int \cosh^3 x \sinh x \, dx = \int u^3 du = \frac{u^4}{4} + C = \frac{1}{4}\cosh^4 x + C$$

b. Đặt $u = x^2$ thì $\frac{1}{2}du = x \, dx$. Ta có

7.8 Các hàm hypecbolic và các hàm ngược của chúng

7.8.2 Các qui tắc đạo hàm và tích phân - ví dụ

$$\int x \operatorname{sech}^2\left(x^2\right) dx = \int \operatorname{sech}^2 u \left(\frac{1}{2} du\right) = \frac{1}{2} \tanh u + \mathrm{C} = \frac{1}{2} \tanh x^2 + C$$

c. Đặt $u = \cosh x$ thì $du = \sinh x \, dx$. Ta có

$$\int \tanh x \, dx = \int \frac{\sinh x \, dx}{\cosh x} = \int \frac{du}{u} = \ln\left|u\right| + C = \ln\left(\cosh x\right) + C$$

7.8 Các hàm hypecbolic và các hàm ngược của chúng

7.8.3 Các hàm Hypecbolic ngược - định nghĩa

$$\sinh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right), \forall x;$$

$$\operatorname{csch}^{-1} x = \ln\left(\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{1 + x^2}}{|x|}\right), x \neq 0$$

$$\cosh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right), x \geq 1;$$

$$\operatorname{sech}^{-1} x = \ln\left(\frac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{x}\right), 0 < x \leq 1$$

$$\tanh^{-1} x = \frac{1}{2}\ln\frac{1 + x}{1 - x}, |x| < 1;$$

$$\coth^{-1} x = \frac{1}{2}\ln\frac{x + 1}{x - 1}, |x| > 1$$

7.8 Các hàm hypecbolic và các hàm ngược của chúng

7.8.3 Các hàm Hypecbolic ngược - đạo hàm, tích phân

$$\frac{d}{dx}\left(\sinh^{-1}u\right)=\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}\frac{du}{dx} \qquad \int\frac{du}{\sqrt{1+u^2}}=\sinh^{-1}u+C$$

$$\frac{d}{dx}\left(\cosh^{-1}u\right)=\frac{1}{\sqrt{u^2-1}}\frac{du}{dx} \qquad \int\frac{du}{\sqrt{u^2-1}}=\cosh^{-1}u+C$$

$$\frac{d}{dx}\left(\tanh^{-1}u\right)=\frac{1}{1-u^2}\frac{du}{dx}\quad\left(|u|<1\right) \qquad \int\frac{du}{1-u^2}=\tanh^{-1}u+C\quad\left(|u|<1\right)$$

$$\frac{d}{dx}\left(\operatorname{csch}^{-1}u\right)=\frac{-1}{|u|\sqrt{1+u^2}}\frac{du}{dx} \qquad \int\frac{du}{u\sqrt{1+u^2}}=-\operatorname{csch}^{-1}|u|+C$$

$$\frac{d}{dx}\left(\operatorname{sech}^{-1}u\right)=\frac{-1}{u\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dx} \qquad \int\frac{du}{u\sqrt{1-u^2}}=-\operatorname{sech}^{-1}|u|+C$$

$$\frac{d}{dx}\left(\coth^{-1}u\right)=\frac{1}{1-u^2}\frac{du}{dx}\quad\left(|u|>1\right) \qquad \int\frac{du}{1-u^2}=\coth^{-1}u+C\quad\left(|u|>1\right)$$

7.8 Các hàm hypecbolic và các hàm ngược của chúng

7.8.3 Các hàm Hypecbolic ngược - ví dụ đạo hàm

Tìm $\dfrac{dy}{dx}$ với a. $y = \sinh^{-1}(ax+b)$ b. $y = \cosh^{-1}(\sec x), 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}$

Giải.

a. $\dfrac{d}{dx}\left[\sinh^{-1}(ax+b)\right] = \dfrac{1}{\sqrt{1+(ax+b)^2}}\dfrac{d}{dx}(ax+b) = \dfrac{a}{\sqrt{1+(ax+b)^2}}$

b. $\dfrac{d}{dx}\left[\cosh^{-1}(\sec x)\right] = \dfrac{1}{\sqrt{\sec^2 x - 1}}\dfrac{d}{dx}(\sec x) = \dfrac{\sec x \tan x}{\sqrt{\tan^2 x}} = \sec x$

($\tan x > 0$ vì $0 \le x < \dfrac{\pi}{2}$).

7.8 Các hàm hypecbolic và các hàm ngược của chúng

7.8.3 Các hàm Hypecbolic ngược

Ví dụ.

Tính $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$.

Giải.

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \left[\sinh^{-1} x\right]_0^1 = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\Big|_0^1 = \ln\left(1+\sqrt{2}\right) - \ln 1 = \ln\left(1+\sqrt{2}\right)$$