BÀI GIẢNG TOÁN 2

Chương 7. Các phương pháp tính tích phân

<u>Buổi 1:</u>
7.1 Ôn tập về phép đổi biến và bảng tích phân
7.2 Tích phân từng phần
7.3 Phương pháp lượng giác
<u>Buổi 2:</u>
7.4 Phương pháp tích phân hữu tỷ
7.5 Tóm tắt về các phương pháp tích phân
7.6 Phương trình vi phân cấp 1
<u>Buổi 3:</u>
7.7 Tích phân suy rộng
7.8 Các hàm hyperbolic và hàm ngược của chúng

7.1 Ôn tập phép đổi biến và bảng tích phân

7.1.1 Ôn tập phép đổi biến

Tích phân chứa số hạng có lũy thừa phân số. Khi hàm dưới dấu tích phân chứa các số hạng với lũy thừa phân số, thường cách tốt là chọn đổi biến $x = u^n$, với n là số nguyên dương bé nhất mà chia hết cho tất cả các mẫu số của các số mũ (đó là bội chung nhỏ nhất của các mẫu số). Chẳng hạn, nếu hàm dưới dấu tích phân chứa các số hạng như $x^{1/4}, x^{2/3}, x^{1/6}$, thì đổi biến $x = u^{12}$, vì 12 là số nguyên dương bé nhất chia hết cho tất cả các mẫu số của các số mũ 4, 3, 6. Lợi thế của cách giải quyết này là nó đảm bảo lũy thừa phân số của x trở thành lũy thừa nguyên của u. Như vậy,

$$x^{1/6} = \left(u^{12}\right)^{1/6} = u^2, \quad x^{1/4} = \left(u^{12}\right)^{1/4} = u^3, \quad x^{2/3} = \left(u^{12}\right)^{2/3} = u^8.$$

7.1 Ôn tập phép đổi biến và bảng tích phân

Ví dụ.

$$\text{Tìm} \int \frac{dx}{x^{1/3} + x^{1/2}}.$$

Giải. đổi biến x =
u^6

7.1 Ôn tập phép đổi biến và bảng tích phân

Solution Because 6 is the smallest integer divisible by the denominators 2 and 3, we set $u = x^{1/6}$, so that $u^6 = x$ and $6u^5 du = dx$. We now use substitution

$$\int \frac{dx}{x^{1/3} + x^{1/2}} = \int \frac{6u^5\, du}{(u^6)^{1/3} + (u^6)^{1/2}} \qquad \textit{Let } x = u^6.$$

$$= \int \frac{6u^5\, du}{u^2 + u^3}$$

$$= \int \frac{6u^5\, du}{u^2(1+u)}$$

$$= \int \frac{6u^3\, du}{1+u} \qquad \textit{By long division, } \frac{6u^3}{1+u} = 6u^2 - 6u + 6 + \frac{-6}{1+u}.$$

$$= \int \left(6u^2 - 6u + 6 + \frac{-6}{1+u}\right) du$$

$$= 2u^3 - 3u^2 + 6u - 6\ln|1+u| + C \qquad \textit{Substitute } u = x^{1/6}.$$

$$= 2(x^{1/6})^3 - 3(x^{1/6})^2$$

$$+ 6(x^{1/6}) - 6\ln\left|1 + x^{1/6}\right| + C$$

$$= 2x^{1/2} - 3x^{1/3} + 6x^{1/6}$$

$$- 6\ln(1 + x^{1/6}) + C \qquad \textit{Note: } 1 + x^{1/6} > 0.$$

7.1 Ôn tập phép đổi biến và bảng tích phân

7.1.2 Sử dụng bảng tích phân

Ví dụ.

Tìm $\int x^2 (3-x)^5 \, dx$. Công thức 32

Tìm $\int (\ln x)^4 \, dx$. Công thức 198, 197

32. $\displaystyle\int u^2(au+b)^n du = \frac{(au+b)^{n+3}}{(n+3)a^3} - \frac{2b(au+b)^{n+2}}{(n+2)a^3} + \frac{b^2(au+b)^{n+1}}{(n+1)a^3}$

197. $\displaystyle\int (\ln|u|)^2 \, du = u(\ln|u|)^2 - 2u\ln|u| + 2u$

198. $\displaystyle\int (\ln|u|)^n \, du = u(\ln|u|)^n - n\int (\ln|u|)^{n-1} \, du$

7.1 Ôn tập phép đổi biến và bảng tích phân

Ví dụ. Sử dụng bảng tích phân sau khi đổi biến

$$\text{Tìm } \int \frac{x\,dx}{\sqrt{8-5x^2}}.$$

Sau đó dùng công thức 111

$$u = \sqrt{5}\,x$$

Ví dụ. Tích phân bằng bảng

$$\text{Tìm } \int 5x^2\sqrt{3x^2+1}\,dx.$$

87. $\displaystyle\int u^2\sqrt{u^2+a^2}\,du = \frac{u(u^2+a^2)^{3/2}}{4} - \frac{a^2u\sqrt{u^2+a^2}}{8} - \frac{a^4}{8}\ln\left(u+\sqrt{u^2+a^2}\right)$

111. $\displaystyle\int \frac{u\,du}{\sqrt{a^2-u^2}} = -\sqrt{a^2-u^2}$

7.2 Tích phân từng phần

7.2.1 Công thức tích phân từng phần

CÔNG THỨC TÍCH PHÂN TỪNG PHẦN

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

Ví dụ 7.10. Tích phân từng phần

Tìm $\int xe^x\,dx$.

Đặt u = x, dv = e^xdx; (bảng công thức 184)

Ví dụ 7.11. Khi vi phân từng phần là toàn bộ hàm dưới dấu tích phân

Tìm $\int \ln x\,dx$, với $x > 0$.

184. $\int ue^{au}du = \frac{e^{au}}{a}\left(u - \frac{1}{a}\right)$

196. $\int \ln|u|\,du = u\ln|u| - u$

Đặt u = lnx, dv = dx; (nếu dùng bảng công thức 196)

7.2 Tích phân từng phần

7.2.2 Sử dụng nhiều lần tích phân từng phần

Ví dụ 7.12. Tích phân từng phần nhiều lần

Tìm $\int x^2 e^{-x}\, dx$.

185. $\int u^2 e^{au} du = \frac{e^{au}}{a}\left(u^2 - \frac{2u}{a} + \frac{2}{a^2}\right)$

Giải. Đặt $\begin{cases} u = x^2 \\ dv = e^{-x} \end{cases}$ thì $\begin{cases} du = 2x dx \\ v = -e^{-x} \end{cases}$. Khi đó công thức 185, với $a = -1$.

Ví dụ 7.13. Tích phân từng phần nhiều lần với biến đổi đại số

Tìm $\int e^{2x} \sin x\, dx$.

công thức 192,

192. $\int e^{au} \sin bu\, du = \frac{e^{au}(a \sin bu - b \cos bu)}{a^2 + b^2}$

7.2 Tích phân từng phần

7.2.3 Tích phân từng phần cho tích phân xác định

TÍCH PHÂN TỪNG PHẦN CHO TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH

$$\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du$$

<u>Ví dụ 7.14.</u> Tích phân từng phần cho tích phân xác định

Tính $\int_0^1 xe^{2x}\,dx$.

Giải. Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = e^{2x}\,dx \end{cases}$ thì $\begin{cases} du = dx \\ v = \dfrac{1}{2}e^{2x} \end{cases}$.

7.2 Tích phân từng phần

7.2.3 Tích phân từng phần cho tích phân xác định

Ví dụ. Tính tích phân từng phần cho tích phân xác định rồi đổi biến

$$\int_0^1 \tan^{-1} x\, dx\,.$$

Giải. Đặt $\begin{cases} u = \tan^{-1} x \\ dv = dx \end{cases}$ thì $\begin{cases} du = \dfrac{dx}{1+x^2} \\ v = x \end{cases}$. Khi đó

$$\int_0^1 \tan^{-1} x\, dx = \left(\tan^{-1} x\right) x\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x\, dx}{1+x^2}$$

$$= \left[x \tan^{-1} x - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)\right] \qquad \textit{(sử dụng đổi biến } t = 1+x^2,\ \ dt = 2x\, dx\textit{)}$$

$$= \left[1\left(\tan^{-1} 1\right) - \frac{1}{2}\ln\left(1+1\right)\right] - \left[0 - \frac{1}{2}\ln 1\right] = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2\,.$$

Kiểm tra trong phụ lục D công thức 180, với $a = 1$.

180. $\displaystyle\int \tan^{-1}\frac{u}{a}\,du = u\tan^{-1}\frac{u}{a} - \frac{a}{2}\ln(u^2+a^2)$

7.3 Phương pháp lượng giác

7.3.1 Lũy thừa của sin, cos

Ta xét tích của các lũy thừa của sin và cos, có dạng

$$\int \sin^m x \ \cos^n x \ dx$$

Ta xét 2 trường hợp:

Trường hợp 1: ít nhất một trong hai số m, n lẻ

Trường hợp 2: Cả m và n chẵn

Ví dụ. Tìm $\int \sin^4 x \cos^3 x \, dx$. Đặt sinx = u

Ví dụ. Tìm $\int \sin^2 x \cos^4 x \, dx$. Dùng các công thức góc nhân đôi để hạ bậc

7.3 Phương pháp lượng giác

7.3.2 Lũy thừa của sec và tan

$$\int \tan x \, dx = \ln\left|\sec x\right| + C$$

$$\int \sec x \, dx = \ln\left|\sec x + \tan x\right| + C\,.$$

$$\int \tan^m x \sec^n x \, dx\,.$$

7.3 Phương pháp lượng giác

7.3.2 Lũy thừa của sec và tan

Với tích phân cuối ta xét các trường hợp sau:

Trường hợp 1: n chẵn. Sử dụng $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$. Đổi biến u = tanx

Trường hợp 2: m lẻ. Tách secx.tanx; đổi biến u = secx

Trường hợp 3: m chẵn, n lẻ. Sử dụng $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$. Sử dụng công thức 161

161. $$\int \sec^n au\,du = \frac{\sec^{n-2} au \tan au}{a(n-1)} + \frac{n-2}{n-1}\int \sec^{n-2} au\,du$$

7.3 Phương pháp lượng giác

7.3.2 Lũy thừa của sec và tan

Ví dụ. Tìm $\int \tan^2 x \sec^4 x \, dx$.

$$\int \tan^2 x \sec^4 x \, dx = \int \tan^2 x \sec^2 x (\sec^2 x \, dx)$$

$$= \int \tan^2 x (\tan^2 x + 1) \sec^2 x \, dx \qquad \boxed{\text{Let } u = \tan x \text{, then } du = \sec^2 x \, dx}$$

$$= \int u^2 (u^2 + 1) du$$

$$= \frac{1}{5} u^5 + \frac{1}{3} u^3 + C$$

$$= \frac{1}{5} \tan^5 x + \frac{1}{3} \tan^3 x + C$$

7.3 Phương pháp lượng giác

7.3.2 Lũy thừa của sec và tan

Ví dụ.

$$\text{Tìm } \int \tan x \sec^6 x \, dx.$$

<u>Giải</u>:

$$\int \tan x \sec^6 x \, dx = \int \sec^5 x (\sec x \tan x \, dx)$$

Let $u = \sec x$, then $du = \sec x \tan x \, dx$

$$= \int u^5 \, du$$

$$= \frac{1}{6} u^6 + C$$

$$= \frac{1}{6} \sec^6 x + C$$

7.3 Phương pháp lượng giác

7.3.2 Lũy thừa của sec và tan

Ví dụ. Tìm $\int \tan^2 x \sec^3 x \, dx$.

161. $\int \sec^n au \, du = \dfrac{\sec^{n-2} au \tan au}{a(n-1)} + \dfrac{n-2}{n-1} \int \sec^{n-2} au \, du$

$$\begin{aligned}
\int \tan^2 x \sec^3 x \, dx &= \int (\sec^2 x - 1) \sec^3 x \, dx \\
&= \int \sec^5 x \, dx - \int \sec^3 x \, dx \\
&= \left[\frac{\sec^3 x \tan x}{4} + \frac{3}{4} \int \sec^3 x \, dx \right] - \int \sec^3 x \, dx \\
&= \frac{\sec^3 x \tan x}{4} - \frac{1}{4} \int \sec^3 x \, dx \\
&= \frac{\sec^3 x \tan x}{4} - \frac{1}{4} \left[\frac{\sec x \tan x}{2} + \frac{1}{2} \int \sec x \, dx \right] \\
&= \frac{\sec^3 x \tan x}{4} - \frac{\sec x \tan x}{8} - \frac{1}{8} \ln |\sec x + \tan x| + C
\end{aligned}$$

7.3 Phương pháp lượng giác

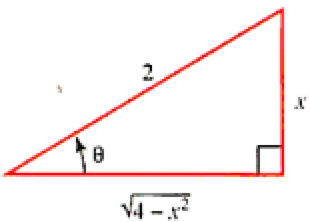
7.3.3 Đổi biến lượng giác

Bảng 7.1 Đổi biến lượng giác đối với tích phân chứa căn

Nếu hàm dưới dấu tích phân chứa…	đổi biến	để được…
$\sqrt{a^2 - u^2}$	$u = a\sin\theta$	$\sqrt{a^2 - u^2} = a\cos\theta$
$\sqrt{a^2 + u^2}$	$u = a\tan\theta$	$\sqrt{a^2 + u^2} = a\sec\theta$
$\sqrt{u^2 - a^2}$	$u = a\sec\theta$	$\sqrt{u^2 - a^2} = a\tan\theta$

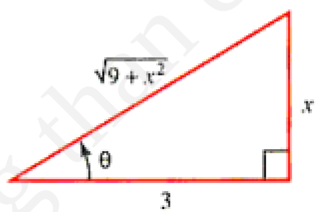
7.3 Phương pháp lượng giác

7.3.3 Đổi biến lượng giác



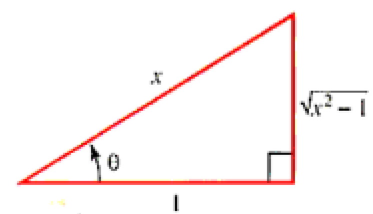
$\cos\theta = \dfrac{\sqrt{4-x^2}}{2}; \quad \sin\theta = \dfrac{x}{2}$

Tham chiếu tam giác dạng $\sqrt{a^2 - u^2}$



$\tan\theta = \dfrac{x}{3}; \quad \sec\theta = \dfrac{\sqrt{9+x^2}}{3}$

Tham chiếu tam giác dạng $\sqrt{a^2 + u^2}$



$\sec\theta = x; \quad \tan\theta = \sqrt{x^2 - 1}$

Tham chiếu tam giác dạng $\sqrt{u^2 - a^2}$

7.3 Phương pháp lượng giác

7.3.4 Tích phân dạng bậc hai

Một tích phân chứa một biểu diễn dạng $Ax^2 + Bx + C$, với $A \neq 0$, $B \neq 0$, có thể được tính bằng việc phân tích thành bình phương và thực hiện đổi biến thích hợp để chuyển nó về dạng chúng ta đã phân tích trước đó.

Ví dụ 7.24. **Tích phân bằng phân tích thành bình phương**

Tìm $\int \sqrt{16x - 2x^2 - 23}\, dx$.

Giải.

$$16x - 2x^2 - 23 = -\left(2x^2 - 8x\right) - 23 = -2\left(x^2 - 8x + 4^2\right) + 2.4^2 - 23 = -2\left(x - 4\right)^2 + 9$$

7.3 Phương pháp lượng giác

$$\int \sqrt{16x - 2x^2 - 23}\, dx = \int \sqrt{9 - 2\left(x-4\right)^2}\, dx$$

$$= \int \sqrt{9 - u^2}\left(\frac{du}{\sqrt{2}}\right) \text{ (với } u = \sqrt{2}\left(x-4\right))$$

$$= \int \sqrt{9 - \left(3\sin\theta\right)^2}\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\cos\theta\ d\theta\right) \qquad \textit{(với } u = 3\sin\theta\,)$$

$$= \frac{9}{\sqrt{2}}\int \sqrt{1 - \sin^2\theta}\cos\theta\ d\theta = \frac{9}{\sqrt{2}}\int \cos^2\theta\ d\theta$$

$$= \frac{9}{\sqrt{2}}\int \frac{1+\cos 2\theta}{2}\, d\theta = \frac{9}{2\sqrt{2}}\left[\theta + \frac{\sin 2\theta}{2}\right] + C$$

$$= \frac{9}{2\sqrt{2}}\sin^{-1}\left[\frac{\sqrt{2}}{3}\left(x-4\right)\right] + \frac{x-4}{2}\sqrt{16x - 2x^2 - 23} + C\,.$$