7.7 Tích phân suy rộng

7.7.1 Tích phân suy rộng loại một

Tích phân suy rộng loại một

$y = f(x)$ khả tích trên đoạn $[a, b]$, với mọi $b > a$

Tích phân $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)dx$

được gọi là tích phân suy rộng loại một.

Các tích phân sau cũng là tích phân suy rộng loại một

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)dx = \lim_{b\to-\infty} \int_b^a f(x)dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_a^{+\infty} f(x)dx$$

7.7 Tích phân suy rộng

7.7.1 Tích phân suy rộng loại một

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)dx$$

Nếu giới hạn tồn tại và hữu hạn thì tích phân gọi là hội tụ.

Ngược lại, nếu giới hạn không tồn tại hoặc bằng vô cùng, thì tích phân gọi là phân kỳ.

Hai vấn đề đối với tích phân suy rộng

1) Tính tích phân suy rộng (thường rất phức tạp)

2) Khảo sát sự hội tụ.

7.7 Tích phân suy rộng

7.7.1 Tích phân suy rộng loại một

Tính tích phân suy rộng (công thức Newton – Leibnitz)

Giả sử F(x) là nguyên hàm của f(x) trên $\left[a,+\infty\right)$

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\left(F(b)-F(a)\right)$$

Tích phân tồn tại khi và chỉ khi tồn tại $\lim\limits_{b\to+\infty} F(b) := F(\infty)$

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = F(x)\Big|_a^{+\infty} = F(+\infty)-F(a)$$

7.7 Tích phân suy rộng

7.7.2 Tích phân suy rộng loại hai - Định nghĩa

Giả sử hàm f(x) liên tục trong khoảng [a, b) và $\lim_{x \to b-} f(x) = \infty$. Khi đó $\int_a^c f(x)dx$ có nghĩa với mọi c < b. Nếu tồn tại giới hạn: $\lim_{c \to b-} \int_a^c f(x)dx$ thì ta định nghĩa tích phân suy rộng $\int_a^b f(x)dx = \lim_{c \to b-} \int_a^c f(x)dx$

Nếu hàm f(x) liên tục trong khoảng (a, b] nhưng $\lim_{x \to a+} f(x) = \infty$, thì ta định nghĩa tích phân suy rộng $\int_a^b f(x)dx = \lim_{c \to a+} \int_c^b f(x)dx$ miễn là giới hạn vế phải tồn tại.

Nếu f(x) liên tục trên [a, c) ∪ (c, b], nhưng $\lim_{x \to c} f(x) = \infty$, ta định nghĩa:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

7.7 Tích phân suy rộng

7.7.2 Tích phân suy rộng loại hai - ví dụ

Ví dụ 1.

a)

$$\int_{-1}^{0}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\lim_{c\to -1+0}\int_{c}^{0}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\lim_{c\to -1+0}\arcsin x\Big|_{c}^{0}=\frac{\pi}{2}$$

b)

$$\int_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\lim_{c\to 1-0}\int_{0}^{c}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\lim_{c\to -1+0}\arcsin x\Big|_{0}^{c}=\frac{\pi}{2}$$

c)

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\int_{-1}^{0}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}+\int_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\pi$$

7.7 Tích phân suy rộng

7.7.2 Tích phân suy rộng loại hai - ví dụ

Ví dụ 2. Xét sự hội tụ của $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}, \quad a < b; \alpha > 0$

Giải:

Có: $\lim\limits_{x\to b-0} \frac{1}{(b-x)^\alpha} = \infty$

Với $\alpha \neq 1$ ta có $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha} = \lim\limits_{c\to b-0}\left[-\frac{(b-x)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\Bigg|_a^c\right] = \lim\limits_{c\to b-0} \frac{1}{\alpha-1}\left[(b-c)^{1-\alpha} - (b-a)^{1-\alpha}\right]$

Nhưng: $\text{c} -> \text{b} - 0 \Rightarrow (\text{b} - \text{c})^{1-\alpha} \to \begin{cases} 0 \text{ } if \text{ } \alpha < 1 \\ +\infty \text{ } if \text{ } \alpha > 1 \end{cases}$

Vậy: $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha} = \begin{cases} \frac{(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha} \text{ } if \text{ } \alpha < 1 \\ +\infty \text{ } if \text{ } \alpha > 1 \end{cases}$

Với $\alpha=1$, ta có: $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)} = \lim\limits_{c\to b-0}\int_a^c \frac{dx}{(b-x)} = \lim\limits_{c\to b-0} -\left[\ln(b-c) - \ln(b-a)\right] = +\infty$

Tóm lại:

$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}$ hội tụ nếu $\alpha < 1$ và phân kỳ nếu $\alpha \geq 1$

Ví dụ tích phân suy rộng

Ví dụ Tính tích phân $I = \int_1^{+\infty} e^{-2x}\,dx$

$$I = \int_1^{+\infty} e^{-2x}\,dx = -\left.\frac{e^{-2x}}{2}\right|_1^{+\infty} = -\left(\frac{e^{-\infty}}{2} - \frac{e^{-2}}{2}\right) = \frac{1}{2e^2}$$

Ví dụ Tính tích phân $I = \int_e^{+\infty} \frac{dx}{x\ln^2 x}$

$$I = \int_e^{+\infty} \frac{dx}{x\ln^2 x} = \int_e^{+\infty} \frac{d(\ln x)}{\ln^2 x} = -\left.\frac{1}{\ln x}\right|_e^{+\infty} = -\left(\frac{1}{\ln(+\infty)} - \frac{1}{\ln e}\right) = 1.$$

Ví dụ tích phân suy rộng

Ví dụ   Tính tích phân $I = \int_4^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - 5x + 6}$

$$\frac{1}{x^2 - 5x + 6} = \frac{1}{(x-2)(x-3)} = \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-2}$$

$$I = \int_4^{+\infty} \left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-2} \right) dx = \ln|x-3| \Big|_4^{+\infty} - \ln|x-2| \Big|_4^{+\infty}$$

$= (+\infty) - (+\infty)$ Dạng vô định.?

Không được phép dùng: $\lim\limits_{x\to+\infty} (f + g) = \lim\limits_{x\to+\infty} f + \lim\limits_{x\to+\infty} g$

khi chưa đảm bảo hai giới hạn vế phải chắc chắn tồn tại.

$$I = \ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right| \Bigg|_4^{+\infty} = \lim_{x\to\infty}\left(\ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right| \right) - \ln\left|\frac{4-3}{4-2}\right| = \ln 1 - \ln\frac{1}{2} = \ln 2$$

Ví dụ tích phân suy rộng

Ví dụ Tính $I = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^5+x^{10}}}$

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^6\sqrt{\frac{1}{x^{10}}+\frac{1}{x^5}+1}}$$

Đổi biến: $t = \frac{1}{x^5} \Rightarrow dt = -\frac{1}{x^6}dx$

Đổi cận: $x \to 1 \Rightarrow t \to 1$

$x \to +\infty \Rightarrow t \to 0$

$$I = -\int_1^0 \frac{dt}{\sqrt{t^2+t+1}} = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(t+1/2)^2+3/4}}$$

$$= \ln\left|(t+1/2)+\sqrt{(t+1/2)^2+3/4}\right|\Bigg|_0^1$$

Ví dụ tích phân suy rộng

Ví dụ Tính $I = \int_0^{+\infty} e^{-2x} \cos x dx$

Đặt $u = e^{-2x} \Rightarrow du = -2e^{-2x} dx \quad dv = \cos x dx \Rightarrow v = \sin x$

$$I = e^{-2x} \sin x \Big|_0^{+\infty} + 2\int_0^{+\infty} e^{-2x} \sin x dx$$

Ta có $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(e^{-2x} \sin x \right) = 0$ nên $I = 2\int_0^{+\infty} e^{-2x} \sin x dx$

$$u = e^{-2x} \Rightarrow du = -2e^{-2x} dx \quad dv = \sin x dx \Rightarrow v = -\cos x$$

$$I = -2\left(e^{-2x} \cos x \right)\Big|_0^{+\infty} - 4\int_0^{+\infty} e^{-2x} \cos x dx \; = 2 - 4I \Rightarrow I = \frac{2}{5}$$

Ví dụ tích phân suy rộng

Ví dụ Tính $I = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{\left(1+x^2\right)^{3/2}} dx$

Đổi biến: $t = \arctan x \Rightarrow dt = \frac{dx}{1+x^2}$

Đổi cận: $x \to 0 \Rightarrow t \to 0 \quad x \to +\infty \Rightarrow t \to \frac{\pi}{2}$

$x = \tan t \Rightarrow 1 + x^2 = \frac{1}{\cos^2 t}$

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{\left(1+x^2\right)^{3/2}} dx = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{\sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{dx}{1+x^2} = \int_0^{\pi/2} t \cos t dt = \frac{\pi}{2} - 1$$

Ví dụ tích phân suy rộng

Kết quả (được sử dụng để khảo sát sự hội tụ)

$$\int_{a>0}^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha}} dx = \begin{cases} \text{hội tụ}, & \text{nếu } \alpha > 1 \\ \text{phân kỳ}, & \text{nếu } \alpha \le 1 \end{cases}$$

$$I = \int_{2}^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha} \ln^{\beta} x} dx$$

Nếu $\alpha > 1$, thì I hội tụ.

Nếu $\alpha < 1$, thì I phân kỳ.

Nếu $\alpha = 1, \beta > 1$, thì I hội tụ.

Nếu $\alpha = 1, \beta \le 1$, thì I PK.

Ví dụ tích phân suy rộng

Tích phân hàm không âm

Tiêu chuẩn so sánh 1.

$(\forall x \geq a)\, f(x) \geq 0, g(x) \geq 0$ và khả tích trên $[a, +\infty)$

$f(x) \leq g(x)$ ở lân cận của $+\infty$. Khi đó:

1) Nếu $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ hội tụ, thì $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ.

2) Nếu $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ phân kỳ, thì $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ phân kỳ.

Để khsát sự hội tụ của $I = \int_a^{+\infty} f(x)dx$, thường đem so sánh với $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ đã biết kết quả.

Ví dụ tích phân suy rộng

Chú ý (trong tiêu chuẩn 1):

1) f(x) và g(x) là hai hàm không âm.

2) Chỉ cần tồn tại $\alpha \geq a \left(\forall x \in [\alpha, +\infty) \right) f(x) \leq g(x)$

3) Cận dưới của tích phân $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ là số dương ($a > 0.$)

Ví dụ Khảo sát sự hội tụ $I = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{2x^2 + \sin^2 3x}$

Ta có $f(x) = \frac{1}{2x^2 + \sin^2 3x} \leq \frac{1}{2x^2} = g(x)$

Vì $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{2x^2}$ hội tụ, nên I hội tụ theo tchuẩn so sánh 1.

Ví dụ tích phân suy rộng

Ví dụ Khảo sát sự hội tụ $I = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - \sin^2 3x}$

Ta có $f(x) = \frac{1}{x^2 - \sin^2 3x} \le \frac{2}{x^2} = g(x)$

Vì $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ hội tụ, nên I hội tụ theo tchuẩn so sánh 1.

Ví dụ Khảo sát sự hội tụ $I = \int_1^{+\infty} \frac{\ln^3 x dx}{x+5}$

Ta có $f(x) = \frac{\ln^3 x}{x+5} > \frac{1}{x+5} > \frac{1}{2x} = g(x) \quad \forall x > 5$

Vì $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{2x}$ phân kỳ, nên I phân kỳ theo tchuẩn ssánh 1.

Ví dụ tích phân suy rộng

Tiêu chuẩn so sánh 2.

$(\forall x \geq a)\, f(x) \geq 0, g(x) \geq 0$ và khả tích trên $[a, +\infty)$

$$K = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$$ Khi đó:

1) $K = 0$: nếu $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ hội tụ, thì $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ.

2) K hữu hạn, $\neq 0$:

$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ và $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ cùng HT hoặc cùng PK.

3) $K = +\infty$: nếu $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ, thì $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ hội tụ.

Ví dụ tích phân suy rộng

Cách sử dụng tiêu chuẩn so sánh 2.

Để khảo sát sự hội tụ của $\int_a^{+\infty} f(x)dx$

1) kiểm tra f(x) có là hàm không âm (trong lân cận của $+\infty$)

2) Tìm hàm g(x) bằng cách: tìm hàm tương đương của f(x) khi x tiến ra dương vô cùng.

3) Tính $K = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)}$, kết luận.

Hai hàm f(x) và g(x) không âm: nếu $f(x) \overset{x\to+\infty}{\simeq} g(x)$, thì

$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ và $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ cùng tính chất.

Ví dụ tích phân suy rộng

Ví dụ Khảo sát sự hội tụ $I = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{5x + \ln x}}$

Ta có $f(x) = \frac{1}{\sqrt{5x + \ln x}} \overset{x \to +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{5x^{1/2}}}$ Chọn $g(x) = \frac{1}{x^{1/2}}$

Khi đó: $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{\sqrt{5}}$ hữu hạn, khác 0.

Tích phân $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ và $\int_1^{+\infty} g(x)dx$ cùng hội tụ hay phân kỳ.

Vì $\int_1^{+\infty} g(x)dx$ phân kỳ ($\alpha = \frac{1}{2} < 1$), nên tích phân I phân kỳ.

Ví dụ tích phân suy rộng

Ví dụ Khảo sát sự hội tụ $I = \int_1^{+\infty} \frac{3x\,dx}{2x^3 + \sin 3x}$

Ta có $f(x) = \frac{3x}{2x^3 + \sin 3x} \overset{x\to+\infty}{\sim} \frac{3x}{2x^3} = \frac{3}{2x^2}$

Chọn $g(x) = \frac{1}{x^2} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{\sqrt{5}}$ hữu hạn, khác 0.

Tích phân $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ và $\int_1^{+\infty} g(x)dx$ cùng hội tụ hay phân kỳ.

Vì $\int_1^{+\infty} g(x)dx$ hội tụ ($\alpha = 2 > 1$), nên tích phân I hội tụ.

Ví dụ tích phân suy rộng

Ví dụ Khảo sát sự hội tụ $I = \int_{1}^{+\infty} \frac{\arctan x dx}{2x^2 + 2\ln x}$

Ta có $f(x) = \frac{\arctan x}{2x^2 + 2\ln x} \overset{x \to +\infty}{\sim} \frac{\pi}{2 \cdot 2x^2} = \frac{\pi}{4x^2}$

Chọn $g(x) = \frac{1}{x^2} \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\pi}{4}$ hữu hạn, khác 0.

Tích phân $\int_{1}^{+\infty} f(x)dx$ và $\int_{1}^{+\infty} g(x)dx$ cùng hội tụ hay phân kỳ.

Vì $\int_{1}^{+\infty} g(x)dx$ hội tụ ($\alpha = 2 > 1$), nên tích phân I hội tụ.

Ví dụ tích phân suy rộng

Ví dụ	Khảo sát sự hội tụ $I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(3x+1)\sqrt{x+1}}$

Ta có $f(x) = \frac{1}{(3x+1)\sqrt{x+1}} \overset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{3x^{3/2}}$ Chọn $g(x) = \frac{1}{x^{3/2}}$

Khi đó: $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{3}$ hữu hạn, khác 0.

Tích phân $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ và $\int_0^{+\infty} g(x)dx$ cùng hội tụ hay phân kỳ.

Vì $J = \int_0^{+\infty} g(x)dx$ hội tụ ($\alpha = \frac{3}{2} > 1$), nên tích phân I hội tụ.

Sai! vì J phân kỳ (xem phần tích phân suy rộng loại hai)

Ví dụ tích phân suy rộng

Ví dụ Khảo sát sự hội tụ $I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(3x+1)\sqrt{x+1}}$

Cách giải đúng! $I = \int_0^1 \frac{dx}{(3x+1)\sqrt{x+1}} + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{(3x+1)\sqrt{x+1}} = I_1 + I_2$

I_1 là tích phân xác định nên hội tụ. Xét tích phân I_2

Ta có $f(x) = \frac{1}{(3x+1)\sqrt{x+1}} \overset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{3x^{3/2}}$ Chọn $g(x) = \frac{1}{x^{3/2}}$

Khi đó: $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{3}$ hữu hạn, khác 0.

Tích phân $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ và $\int_1^{+\infty} g(x)dx$ cùng hội tụ hay phân kỳ.

Vì $\int_1^{+\infty} g(x)dx$ HT ($\alpha = \frac{3}{2} > 1$), nên I_1 HT, suy ra I HT.