Trường Đại học SPKT TP.HCM
Khoa Khoa học ứng dụng

Chương 8. CHUỖI

Giảng viên Vũ Quốc Huy

NỘI DUNG

Buổi 1 (tuần 9).
8.1 Dãy số và giới hạn
8.2 Giới thiệu về chuỗi
8.3 Tiêu chuẩn tích phân. P-chuỗi
Buổi 2 (tuần 10).
8.4 Các tiêu chuẩn so sánh
8.5 Tiêu chuẩn Cauchy và d'Alembert
8.6 Chuỗi đan dấu. Hội tụ tuyệt đối và hội tụ có điều kiện
Buổi 3 (tuần 11).
8.7 Chuỗi lũy thừa
8.8 Chuỗi Taylor và Maclaurin

8.1 Dãy số và giới hạn

8.1.1 Định nghĩa dãy số

Cho ánh xạ f: $N \to R$

Tập hợp những trị của f: f(1), f(2),…, f(n),… gọi là một dãy số. Nếu đặt $x_n = f(n)$, ta có thể viết $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ hay $\{x_n\}$

$x_1, x_2, \ldots$ gọi là các số hạng của dãy $\{x_n\}$, trong đó x_n là số hạng tổng quát của dãy, n là chỉ số.

<u>Ví dụ 1</u>: $x_n = 1$, $x_n = (-1)^{n+1}$, $x_n = \dfrac{1+(-1)^n}{n}$

8.1 Dãy số và giới hạn

8.1.2 Giới hạn của dãy số

Cho dãy số $\{a_n\}$ và số $L \in \mathbb{R}$. Ta nói L là giới hạn của dãy số $\{a_n\}$ nếu $\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon) > 0$, sao cho khi $n > N$ ta có:

$$|a_n - L| < \varepsilon$$

Ký hiệu : $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$

hay $a_n \to a$ khi $n \to \infty$

Ta cũng nói dãy $\{a_n\}$ là dãy hội tụ. Trường hợp ngược lại $\{a_n\}$ gọi là phân kỳ.

Ví dụ. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+1} = 1;\ \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$

Dãy $\{(-1)^n\}$ không có giới hạn

8.1 Dãy số và giới hạn

8.1.2 Giới hạn của dãy số

Định lí 8.3. *Nếu* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ *và* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = M$ *thì*

Luật tuyến tính $\lim\limits_{n\to\infty}(ra_n + sb_n) = rL + sM$.

Luật tổng $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n b_n) = LM$.

Luật thương $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{L}{M}$ *nếu* $M \neq 0$.

Luật căn $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[m]{a_n} = \sqrt[m]{L}$ *nếu* $\sqrt[m]{a_n}$ *xác định với mọi* n *và* $\sqrt[m]{L}$ *tồn tại.*

Ví dụ. Tìm các giới hạn sau:

8.1 Dãy số và giới hạn

8.1.2 Giới hạn của dãy số

a. $\left\{\dfrac{100}{n}\right\}$

b. $\left\{\dfrac{2n^2+5n-7}{n^3}\right\}$

c. $\left\{\dfrac{3n^4+n-1}{5n^4+2n^2+1}\right\}$

Ví dụ. Chứng minh các dãy sau phân kỳ

a. $\left\{(-1)^n\right\}$

b. $\left\{\dfrac{n^5+n^3+2}{7n^4+n^2+3}\right\}$

8.1 Dãy số và giới hạn

8.1.2 Giới hạn của dãy số

Dãy vô cùng lớn: Dãy $\{a_n\}$ được gọi là vô cùng lớn (VCL) nếu nếu $\forall E > 0\ \exists\ N = N(E) > 0$, sao cho khi $n > N$ ta có:

$$|a_n| > E$$

$$ký\ hiêu \quad \lim_{n\to\infty} a_n = \infty\ hay\ a_n \to \infty\ khi\ n \to \infty$$

Dãy vô cùng bé: (VCB): ở định nghĩa trên khi $L = 0$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

Định lí 8.6 (Định lí kẹp cho dãy). *Nếu* $a_n \le b_n \le c_n$ *với mọi* $n > N$, *và* $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = L$ *thì*

$$\lim_{n\to\infty} b_n = L.$$

8.1 Dãy số và giới hạn

8.1.3 Dãy bị chặn, đơn điệu

* Các định nghĩa dãy đơn điệu, bị chặn
* Dãy tăng (ngặt) bị chặn trên thì hội tụ
* Dãy giảm (ngặt) bị chặn dưới thì hội tụ

Định lí 8.7 (Định lí bị chặn, đơn điệu, hội tụ). *Một dãy số đơn điệu* $\{a_n\}$ *hội tụ nếu nó bị chặn và phân kì nếu ngược lại.*

Ví dụ 8.7. Chứng minh rằng dãy $\left\{\frac{1.3.5...(2n-1)}{2.4.6...(2n)}\right\}$ hội tụ.

Ví dụ 8.8. Chứng minh rằng dãy $\left\{\frac{\ln n}{\sqrt{n}}\right\}$ hội tụ.

8.1 Dãy số và giới hạn

8.1.4 Dùng giới hạn hàm tìm giới hạn dãy số.

Định lí 8.5. (Định lý về giới hạn của hàm liên tục). *Cho trước dãy số $\{a_n\}$, gọi f là một hàm số liên tục thỏa mãn $a_n = f(n)$ với $n = 1, 2, \ldots$. Nếu $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ tồn tại và $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L$ thì dãy số $\{a_n\}$ hội tụ và $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$.*

Ví dụ 8.5. Biết dãy số $\left\{\dfrac{n^2}{1-e^n}\right\}$ hội tụ, tính $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{1-e^n}$.

$n\to\infty$

Ví dụ 8.6. Chứng minh rằng các dãy số sau hội tụ, và tìm giới hạn của chúng.

a. $\lim\limits_{n\to\infty} n^{1/n}$

b. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!}{n^n}$

8.2 Giới thiệu về chuỗi số

8.2.1 Định nghĩa chuỗi vô hạn.

Định nghĩa. Biểu thức dạng:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (1)$$

gọi là chuỗi số. Các số a_n gọi là số hạng của nó. Đặt:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

S_n gọi là tổng riêng thứ n của chuỗi (1). Nếu tồn tại hữu hạn giới hạn:

$$\lim_{n \to \infty} S_n = S$$

thì (1) gọi là chuỗi hội tụ, S là tổng của chuỗi , ngược lại (1) gọi là chuỗi phân kỳ. Nếu $a_n \geq 0$ (1) gọi là chuỗi số không âm; Nếu $a_n > 0$ (1) gọi là chuỗi số dương.

8.2 Giới thiệu về chuỗi

8.2.2 Các tính chất tổng quát của chuỗi

Định lý 1. Nếu các chuỗi $\sum a_k, \sum b_k$ hội tụ thì chuỗi

$$\sum (\alpha a_k + \beta b_k)$$ hội tụ,

và

$$\sum(\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha \sum a_k + \beta \sum b_k$$

Định lý 2. Nếu 1 trong 2 chuỗi $\sum a_k, \sum b_k$ hội tụ và chuỗi còn lại phân kỳ thì chuỗi

$$\sum(a_k + b_k)$$

phân kỳ

8.2 Giới thiệu về chuỗi

8.2.3 Chuỗi cấp số nhân

Định nghĩa. Chuỗi dạng $\sum_{k=1}^{\infty} a.q^{k-1} \quad (q \neq 1)$

Gọi là chuỗi cấp số nhân, chuỗi hội tụ và có tổng: $S = \frac{a}{1-q}$
khi q < 1. Và phân kỳ khi q ≥ 1

Bài tập. Xét sự hội tụ của các chuỗi sau:

$$a) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$$

$$b) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$$

8.3 Tiêu chuẩn tích phân, p-chuỗi

8.3.1 Tiêu chuẩn phân kỳ

Định lý. Chuỗi $\sum a_k$ mà $\lim\limits_{k\to\infty} a_k \neq 0$ thì phân kỳ.

Chú ý. Điều kiện cần một chuỗi hội tụ là $a_k \to 0$ khi $k \to \infty$

Ví dụ. Chứng minh rằng chuỗi $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k-300}{4k+750}$ phân kì.

8.3 Tiêu chuẩn tích phân, p-chuỗi

8.3.2 Chuỗi các số âm. Tiêu chuẩn tích phân

Định nghĩa. Chuỗi $\sum a_k \quad \forall a_k \geq 0$ gọi là chuỗi số không âm.

Định lý - Tiêu chuẩn hội tụ cho chuỗi số không âm

Chuỗi không âm hội tụ nếu dãy tổng riêng S_n đơn điệu tăng và bị chặn. Ngược lại chuỗi phân kỳ.

Định lý - Tiêu chuẩn tích phân Nếu $a_k = f(k)$ với k=1, 2,..., trong đó f là một hàm theo biến x, không âm, liên tục và giảm với $x \geq 1$. Khi đó:

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx \ HT \Leftrightarrow \sum a_k \ HT$$

8.3 Tiêu chuẩn tích phân, p-chuỗi

8.3.2 Chuỗi các số âm. Tiêu chuẩn tích phân

Ví dụ. Dùng tiêu chuẩn tích phân xét sự hội tụ của các chuỗi

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}. \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{e^{k/5}}.$$

Giải. Xét hàm $f(x) = \dfrac{x}{e^{\frac{x}{5}}} \Leftrightarrow f'(x) = \left(1 - \dfrac{x}{5}\right) e^{\frac{x}{5}} < 0 \Leftrightarrow x > 5$

Mà $\displaystyle\int_5^{+\infty} x.e^{-\frac{x}{5}} dx$ Hội tụ nên chuỗi đã cho hội tụ

8.3 Tiêu chuẩn tích phân, p-chuỗi

8.3.3 P. chuỗi

Định nghĩa . (p-Chuỗi). *Một chuỗi có dạng*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^p}=\frac{1}{1^p}+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\ldots$$

trong đó p là một hằng số dương được gọi là một p-Chuỗi.

Khi p = 1 ta có chuỗi điều hòa

+ p – chuỗi còn gọi là chuỗi điều hòa tổng quát

Định lí (Tiêu chuẩn p-Chuỗi). p-*Chuỗi* $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^p}$ *hội tụ nếu* $p>1$ *và phân kì nếu* $p\le 1$.

8.3 Tiêu chuẩn tích phân, p-chuỗi

8.3.3 P. chuỗi

Ví dụ ….. Xét sự hội tụ của các chuỗi sau

a. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k^3}}$ b. $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{e^k} - \frac{1}{\sqrt{k}} \right)$

Giải. a. Chuỗi hội tụ p = 1,5>1

b. Chuỗi là hiệu của 1 chuỗi hội tụ (cấp số nhân) chuỗi kia phân kỳ p = 0,5 < 1