c SPKT TP.HCM
Khoa Khoa học ứng dụng

Chương 8. CHUỖI

ng viên c Huy

NỘI DUNG

<u>Buổi 1 (tuần 9).</u>
8.1 Dãy số và giới hạn
8.2 Giới thiệu về chuỗi
8.3 Tiêu chuẩn tích phân. P-chuỗi
<u>Buổi 2 (tuần 10).</u>
8.4 Các tiêu chuẩn so sánh
8.5 Tiêu chuẩn Cauchy và d’Alembert
8.6 Chuỗi đan dấu. Hội tụ tuyệt đối và hội tụ có điều kiện
<u>Buổi 3 (tuần 11).</u>
8.7 Chuỗi lũy thừa
8.8 Chuỗi Taylor và Maclaurin

8.4 Các tiêu chuẩn so sánh

8.4.1 Tiêu chuẩn so sánh trực tiếp

Định lý 8.19

Giả sử $0 \le a_k \le c_k$ *với mọi* k. *Nếu* $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ *hội tụ thì* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *cũng hội tụ.*

Giả sử $0 \le d_k \le a_k$ *với mọi* k. *Nếu* $\sum_{k=1}^{\infty} d_k$ *phân kì thì* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *cũng phân kì.*

Ví dụ. Xét sự hội tụ của các chuỗi sau:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^k+1}. \qquad \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}-1}. \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}.$$

8.4 Các tiêu chuẩn so sánh

8.4.1 Tiêu chuẩn so sánh trực tiếp

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^k+1}.$$

$0 < \dfrac{1}{3^k+1} < \dfrac{1}{3^k}$ mà $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^k}$ (hội tụ vì $r = \dfrac{1}{3}$).

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}-1}.$$

Phân kỳ vì $\dfrac{1}{\sqrt{k}-1} > \dfrac{1}{\sqrt{k}} > 0$ mà $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^{1/2}}$ (phân kì vì $p = \dfrac{1}{2} < 1$).

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}.$$

$$k! = k(k-1)(k-2)\ldots 3.2.1 \geq \underbrace{2.2.2\ldots\ldots 2.2}_{k-1\,lan}.1 = 2^{k-1}.$$

8.4 Các tiêu chuẩn so sánh

8.4.1 Tiêu chuẩn so sánh trực tiếp

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}$. Xét mẫu $k! = k(k-1)(k-2)...3.2.1 \geq \underbrace{2.2.2......2.2}_{k-1\,lan}.1 = 2^{k-1}$.

vì $0 < \frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{k-1}}$ mà $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k-1}}$ (với $r = \frac{1}{2}$) Hội tụ do đó chuỗi đã cho hội tụ

8.4 Các tiêu chuẩn so sánh

8.4.2 Tiêu chuẩn so sánh giới hạn – định lý

Định lí 8.20 (Tiêu chuẩn so sánh giới hạn)

Giả sử $a_k > 0$ *và* $b_k > 0$ *với mọi* k *đủ lớn và rằng*

$$\lim_{k\to\infty}\frac{a_k}{b_k} = L$$

trong đó L *hữu hạn và dương* $(0 < L < \infty)$. *Khi đó* $\sum a_k$ *và* $\sum b_k$ *cùng hội tụ hoặc cùng phân kì.*

8.4 Các tiêu chuẩn so sánh

8.4.2 Tiêu chuẩn so sánh giới hạn – Ví dụ

Xét sự hội tụ của các chuỗi sau:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k - 5}. \qquad \frac{1}{2^k},$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3k+2}{\sqrt{k}\,(3k-5)}. \qquad \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{7k+100}{e^{k/5} - 70}. \qquad \frac{k}{e^{k/5}}$$

8.4 Các tiêu chuẩn so sánh

8.4.2 Tiêu chuẩn so sánh giới hạn

Định lí 8.21 (Tiêu chuẩn so sánh giới hạn zero-vô cùng)

Giả sử $a_k > 0$ *và* $b_k > 0$ *với mọi* k *đủ lớn.*

$+$ *Nếu* $\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{a_k}{b_k} = 0$ *và* $\sum b_k$ *hội tụ thì* $\sum a_k$ *hội tụ.*

$+$ *Nếu* $\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{a_k}{b_k} = \infty$ *và* $\sum b_k$ *phân kì thì* $\sum a_k$ *phân kì.*

8.4 Các tiêu chuẩn so sánh

8.4.3 Tiêu chuẩn so sánh giới hạn zero vô cùng – Ví dụ

Ví dụ 8.27 . Sự hội tụ của chuỗi $q-\log$

Chứng minh rằng chuỗi $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\ln k}{k^q}$ hội tụ nếu $q>1$ và phân kì nếu $q\le 1$. Ta gọi đây là chuỗi $q-\log$.

8.5 Tiêu chuẩn tỷ số và tiêu chuẩn căn

8.5.1 Tiêu chuẩn tỷ số

Định lí 8.22 (Tiêu chuẩn tỉ số)

Cho chuỗi $\sum a_k$ *với* $a_k > 0$*, giả sử rằng*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = L.$$

Khi đó

+ *Nếu* $L < 1$ *thì* $\sum a_k$ *hội tụ.*

+ *Nếu* $L > 1$ *hoặc* L *vô hạn thì* $\sum a_k$ *phân kì.*

+ *Nếu* $L = 1$ *thì tiêu chuẩn chưa kết luận được.*

8.5 Tiêu chuẩn tỷ số và tiêu chuẩn căn

8.5.1 Tiêu chuẩn tỷ số

Ví dụ 8.28. Xét sự hội tụ của chuỗi $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k!}$.

Ví dụ 8.29. Xét sự hội tụ của chuỗi $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^k}{k!}$.

Ví dụ 8.30. Xét sự hội tụ của $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{2k-3}$.

8.5 Tiêu chuẩn tỷ số và tiêu chuẩn căn

8.5.2 Tiêu chuẩn căn

Định lí 8.23. (Tiêu chuẩn căn)

Cho chuỗi $\sum a_k$ *với* $a_k > 0$, *giả sử rằng*

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = L .$$

Khi đó

+ *Nếu* $L < 1$ *thì* $\sum a_k$ *hội tụ.*

+ *Nếu* $L > 1$ *hoặc* L *vô hạn thì* $\sum a_k$ *phân kì.*

+ *Nếu* $L = 1$ *thì tiêu chuẩn chưa kết luận được.*

8.5 Tiêu chuẩn tỷ số và tiêu chuẩn căn

8.5.2 Tiêu chuẩn căn - Cauchy

Ví dụ 8.32. Xét sự hội tụ của chuỗi $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln k)^k}$.

<u>Giải</u>

Đặt $a_k = \frac{1}{(\ln k)^k}$ và chú ý rằng

$$L = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{(\ln k)^{-k}} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\ln k} = 0.$$

Vì $L < 1$ nên chuỗi đã cho hội tụ theo tiêu chuẩn căn.

8.5 Tiêu chuẩn tỷ số và tiêu chuẩn căn

8.5.2 Tiêu chuẩn căn - Cauchy

Ví dụ 8.33. Xét sự hội tụ của $\sum_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k^2}$.

<u>Giải</u>

Ta có

$$L=\lim_{k\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k^2}\right]^{1/k}=\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k}=e>1.$$

Vì $L>1$ nên chuỗi phân kì theo tiêu chuẩn căn.

8.6 Chuỗi đan dấu

8.6.1 Tiêu chuẩn hội tụ của chuỗi đan dấu

Định nghĩa.

Có 2 dạng chuỗi đan dấu như sau

+ Số hạng có chỉ số lẻ âm: $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k a_k = -a_1 + a_2 - a_3 + \ldots\ldots$

+ Số hạng có chỉ số chẵn âm: $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1} a_k = a_1 - a_2 + a_3 - \ldots..$

trong cả 2 dạng thì $a_k > 0$

8.6 Chuỗi đan dấu

8.6.1 Tiêu chuẩn hội tụ của chuỗi đan dấu

Định lý 8.24 (Tiêu chuẩn Leibniz).

Một chuỗi đan dấu dạng $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k a_k$ *hoặc dạng* $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1} a_k$ *hội tụ nếu 2 điều kiện sau được thỏa mãn*

1. $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$

2. $\{a_k\}$ *là một dãy giảm; nghĩa là* $a_{k+1} \le a_k$ *với mọi k*

8.6 Chuỗi đan dấu

8.6.1 Tiêu chuẩn hội tụ của chuỗi đan dấu

Ví dụ. Xét sự hội tụ

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$$

Giải.

Ta có $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{1}{k} = 0$ và vì

$$\frac{1}{k+1} < \frac{1}{k}$$

8.6 Chuỗi đan dấu

8.6.1 Tiêu chuẩn hội tụ của chuỗi đan dấu

Ví dụ 8.37. Xét tính hội tụ của chuỗi $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} \ln k}{k}$

Giải. Xét hàm số $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

Đơn điệu giảm và $\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

8.6 Chuỗi đan dấu

8.6.1 Tiêu chuẩn hội tụ của chuỗi đan dấu

Định nghĩa 8.25. (p_chuỗi đan dấu). *Chuỗi số có dạng* $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^p}$ *được gọi là p_chuỗi đan dấu*

Ví dụ 8.39. Chứng minh rằng p-chuỗi đan dấu $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^p}$ hội tụ với mọi $p > 0$.

<u>Giải</u>

Nếu $a_k = \frac{1}{k^p}$ thì $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$ với $p > 0$. Để chứng minh dãy $\{a_k\}$ là dãy giảm, ta chú ý rằng

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{1/(k+1)^p}{1/k^p} = \frac{k^p}{(k+1)^p} < 1$$

nên $a_k > a_{k+1}$. Do đó p_chuỗi đan dấu hội tụ với mọi $p > 0$.

8.6 Chuỗi đan dấu

8.6.2 Ước lượng sai số của chuỗi đan dấu

Định lý 8.26. *Giả sử chuỗi đan dấu dạng*

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k a_k \text{ hoặc dạng } \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1} a_k$$

thỏa mãn các điều kiện của tiêu chuẩn Leibniz, nghĩa là $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$ *và* $\{a_k\}$ *là dãy giảm* ($a_{k+1} \le a_k$).

Nếu chuỗi có tổng là S thì

$$|S - S_n| \le a_{n+1},$$

trong đó S_n *là tổng riêng thứ n của chuỗi.*

8.6 Chuỗi đan dấu

8.6.2 Ước lượng sai số của chuỗi đan dấu

Ý nghĩa

Nếu chuỗi đan dấu thỏa tiêu chuẩn Leibniz thì ta có thể xấp xỉ tổng của chuỗi bằng tổng riêng thứ *n* của nó với sai số không vượt quá số hạng a_{n+1}

Ví dụ 8.40. Xét chuỗi đan dấu hội tụ $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^4}$

a) Ước lượng tổng của chuỗi trên bằng cách lấy tổng của 4 số hạng đầu tiên. Đánh giá độ chính xác của ước lượng này?

b) Có bao nhiêu số hạng cần thiết để ước lượng tổng của chuỗi với độ chính xác 3 chữ số thập phân. Khi đó ước lượng tổng của chuỗi là bao nhiêu?

Giải

a) Đặt $a_k = \frac{1}{k^4}$ và S là tổng thực sự của chuỗi. Ước lượng sai số cho ta biết rằng

8.6 Chuỗi đan dấu

8.6.2 Ước lượng sai số của chuỗi đan dấu

$$|S - S_4| \le a_5$$

trong đó S_4 là tổng 4 số hạng đầu tiên của chuỗi.

Sử dụng máy tính ta có

$$S_4 = \frac{1}{1^4} - \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} - \frac{1}{4^4} \approx 0.9459394 \text{ và } a_5 = \frac{1}{5^4} = 0.0016$$

$$|S - S_4| \le 0.0016$$

$$0.9459394 \le S \le 0.9459394 + 0.0016$$

$$0.9459394 \le S \le 0.9475394$$

8.6 Chuỗi đan dấu

8.6.2 Ước lượng sai số của chuỗi đan dấu

b) Vì ta muốn xấp xỉ S bởi tổng riêng S_n với độ chính xác 3 chữ số thập phân nên sai số không được vượt quá 0.0005. Theo định lý 8.26, ta cần tìm giá trị chỉ số n sao cho

$$a_{n+1} \leq 0.0005$$

nghĩa là

$$\frac{1}{(n+1)^4} \leq 0.0005$$

$$\frac{1}{0.0005} \leq (n+1)^4$$

$$\sqrt[4]{2000} \leq n+1$$

$$6.687403 - 1 \leq n$$

Vậy n ≥ 5.687403 hay ta cần tối thiểu 6 số hạng để đạt được độ chính xác theo yêu cầu

$$S_6 = \frac{1}{1^4} - \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} - \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} - \frac{1}{6^4} \approx 0.94677$$

8.6 Chuỗi đan dấu

8.6.2 Ước lượng sai số của chuỗi đan dấu

Số hạng đầu tiên bị bỏ đi ($\frac{1}{7^4} \approx 0.00042$) là số dương nên

$$0.94677 < S < 0.94677 + 0.00042$$

$$0.94677 < S < 0.94719$$

Hai biên đều gần 0.947, do đó $S \approx 0.947$, với độ chính xác 3 chữ số thập phân.

8.6 Chuỗi đan dấu

8.6.3 Hội tụ tuyệt đối và hội tụ có điều kiện

Định lý 8.27. (Tiêu chuẩn hội tụ tuyệt đối). *Chuỗi số thực* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *bất kỳ hội tụ nếu chuỗi* $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ *hội tụ.*

Chứng minh

Giả sử chuỗi $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ hội tụ và đặt $b_k = a_k + |a_k|$ với mọi k.

Chú ý rằng

$$b_k = \begin{cases} 2|a_k|, & a_k > 0 \\ 0, & a_k \le 0 \end{cases}$$

Khi đó, ta có $0 \le b_k \le 2|a_k|$ với mọi k. Vì chuỗi $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ hội tụ và cả hai chuỗi $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ và $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ là các chuỗi không âm nên theo tiêu chuẩn so sánh trực tiếp thì chuỗi $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ cũng hội tụ. Cuối cùng, bởi vì

$$a_k = b_k - |a_k|$$

và hai chuỗi $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ và $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ hội tụ nên kéo theo chuỗi $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ phải hội tụ.

8.6 Chuỗi đan dấu

8.6.3 Hội tụ tuyệt đối và hội tụ có điều kiện

Ví dụ 8.41. Xét sự hội tụ của chuỗi

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{16}-\frac{1}{25}+\frac{1}{36}+\frac{1}{49}+\frac{1}{64}-\frac{1}{81}-\frac{1}{100}+.....$$

<u>Giải</u>

Ta thấy chuỗi trên không phải chuỗi số dương cũng không phải chuỗi đan dấu nhưng ta thấy chuỗi trị tuyệt đối của nó có dạng

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+.....=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$$

và nó hội tụ.

Ví dụ 8.42. Xét sự hội tụ của chuỗi $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\sin k}{2^k}$

8.6 Chuỗi đan dấu

8.6.3 Hội tụ tuyệt đối và hội tụ có điều kiện

Định nghĩa 8.28. (Hội tụ tuyệt đối và hội tụ có điều kiện)

$+$ *Chuỗi* $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ *được gọi là hội tụ tuyệt đối nếu chuỗi* $\sum_{k=1}^{+\infty} |a_k|$ *hội tụ.*

$+$ *Chuỗi* $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ *được gọi là hội tụ có điều kiện nếu chuỗi* $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ *hội tụ nhưng chuỗi* $\sum_{k=1}^{+\infty} |a_k|$ *phân kỳ.*

8.6 Chuỗi đan dấu

8.6.3 Hội tụ tuyệt đối và hội tụ có điều kiện

Ví dụ 8.43. Chuỗi $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}$ hội tụ theo tiêu chuẩn Leibnitz nhưng

$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^k}{k}\right| = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ phân kỳ nên $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}$ gọi là hội tụ có điều kiện.

Định lý 8.29. (Tiêu chuẩn tỷ số tổng quát)

Xét chuỗi $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$, *giả sử* $a_n \neq 0$ *với* $n \geq 1$ *và đặt*

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = L$$

trong đó L là một số thực hoặc ∞. Khi đó

+ *Nếu L < 1 thì chuỗi* $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ *hội tụ tuyệt đối và do đó nó hội tụ.*

+ *Nếu L > 1 hoặc L vô hạn thì chuỗi* $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ *phân kỳ.*

+ *Nếu L = 1 thì tiêu chuẩn không kết luận được.*

8.6 Chuỗi đan dấu

8.6.3 Hội tụ tuyệt đối và hội tụ có điều kiện

Ví dụ 8.44. Tìm tất cả các giá trị của x để chuỗi $\sum_{k=1}^{\infty} kx^k$ hội tụ.

Giải. Đặt $a_k = kx^k$

$$L = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{(k+1)x^{k+1}}{kx^k}\right|$$

$$= \lim_{k\to\infty}\left(\frac{k+1}{k}\right)\left|\frac{x^{k+1}}{x^k}\right| = \lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)|x|$$

$$= |x|$$

Chuỗi hội tụ khi $|x|<1$
Và phân kỳ $|x|\geq 1$