Chương 8. CHUỖI

8.7 Chuỗi lũy thừa

8.8 Chuỗi Taylor và Maclaurin

8.7 Chuỗi lũy thừa

8.7.1 Sự hội tụ của chuỗi lũy thừa

Định nghĩa. Chuỗi lũy thừa là chuỗi có dạng:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-c)^k = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + \ldots.$$

Nếu $c = 0$ ta có chuỗi luỹ thừa chuẩn $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$

8.7 Chuỗi lũy thừa

8.7.1 Sự hội tụ của chuỗi lũy thừa

Định lý 8.30. (Sự hội tụ của chuỗi lũy thừa)

Xét chuỗi lũy thừa $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$. *Khi đó, một trong các điều sau là đúng*

1. *Chuỗi hội tụ với mọi x.*
2. *Chuỗi chỉ hội tụ tại x = 0.*
3. *Chuỗi hội tụ tuyệt đối với tất cả các giá trị của x nằm trong khoảng* $(-R, R)$ *và phân kỳ với* $|x| > R$. *Và chuỗi có thể hội tụ hoặc phân kỳ tại 2 đầu mút x = -R và x = R.*

Tập hợp các giá trị của x làm cho chuỗi hội tụ gọi là **tập hội tụ** của chuỗi. Và từ định lý trên ta biết rằng đó chính là một khoảng hội tụ.

8.7 Chuỗi lũy thừa

8.7.1 Sự hội tụ của chuỗi lũy thừa

Qui tắc tìm bán kính hội tụ. Cho chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ (1)

Bán kính hội tụ được xác định theo công thức A đam - Cô si:

$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ (a) *hay* $R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ (b) nếu các giới hạn này tồn tại. Trong trường hợp giới hạn (a) bằng không hay giới hạn (b) bằng $+\infty$ thì chuỗi lũy thừa hội tụ trên toàn trục số.

Khoảng hội tụ (-R, R); sau khi xét tại các mút ± R ta có toàn miền hội tụ.

8.7 Chuỗi lũy thừa

8.7.1 Sự hội tụ của chuỗi lũy thừa - ví dụ

Ví dụ. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{3^n n!}$ (1)

$\ulcorner$ $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{1}{3(n+1)} \to 0 \Rightarrow R = +\infty$ KQ: $\forall$x$\lrcorner$

Ví dụ. $\sum_{n=1}^{\infty} n^n (x-2)^n$ (2) KQ: {x = 2}

Ví dụ. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{2^n + 3^n}$ (3)

$\ulcorner$Đặt X = x – 1 và $a_n = \frac{1}{2^n + 3^n}$; $\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{\sqrt[n]{2^n + 3^n}} \sim \frac{1}{\sqrt[n]{3^n}} \to \frac{1}{3} \Rightarrow R = 3$

X ∈ (-3, 3) ⇔ x – 1 ∈ (-3, 3) ⇔ x ∈ (-2, 4)

Xét x = -2, (3) ⇔ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^n}{2^n + 3^n}$

Tại x = 4, (3) ⇔ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^n + 3^n}$

Trong cả 2 trường hợp chuỗi phân kỳ vì $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 1 \neq 0$.

Vậy miền hội tụ là (-2, 4)$\lrcorner$

8.7 Chuỗi lũy thừa

8.7.1 Sự hội tụ của chuỗi lũy thừa - ví dụ

Ví dụ 8.45. Chứng minh rằng chuỗi lũy thừa $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ hội tụ với mọi x.

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n!}.\frac{(n+1)!}{1} = \infty$$

Ví dụ 8.46. Chứng minh rằng chuỗi lũy thừa $\sum_{k=1}^{\infty} k!x^k$ chỉ hội tụ với $x = 0$.

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{1}.\frac{1}{(n+1)!} = 0$$

8.7 Chuỗi lũy thừa

8.7.1 Sự hội tụ của chuỗi lũy thừa - ví dụ

Ví dụ 8.47. Tìm tất cả các điểm hội tụ của chuỗi lũy thừa $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{\sqrt{k}}$.

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}.\frac{\sqrt{n+1}}{1} = 1; \quad R = 1\ PK;\ R = -1\ HT$$

$$HT\ \forall x \in [-1, 1)$$

Ví dụ 8.48. Tìm bán kính hội tụ và khoảng hội tụ của chuỗi $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k x^k}{k}$

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{n}.\frac{n+1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}; \quad R = \pm\frac{1}{2}\ PK \Rightarrow HT\ \forall x \in \left(\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

Ví dụ 8.49. Tìm bán kính hội tụ và khoảng hội tụ của chuỗi $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k x^k}{k}$

8.7 Chuỗi lũy thừa

8.7.1 Sự hội tụ của chuỗi lũy thừa - ví dụ

Ví dụ 8.50. Tìm bán kính hội tụ của chuỗi $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k+1}{k}\right)^{k^2} x^k$

$$R=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}}=\frac{1}{e}\Rightarrow R=\frac{1}{e}$$

Ví dụ 8.51. Tìm khoảng hội tụ của chuỗi $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(x+1)^k}{3^k}$

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3^n}.\frac{3^{n+1}}{1}=3;\quad x+1\in(-3;3)\Leftrightarrow x\in(-4;2)$$

8.7 Chuỗi lũy thừa

8.7.2 Đạo hàm và tích phân từng số hạng của CLT

Định lý 8.31. **(Lấy đạo hàm và tích phân từng số hạng của chuỗi lũy thừa)**

Chuỗi lũy thừa $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *với bán kính hội tụ* $R > 0$ *có thể được lấy đạo hàm hoặc tích phân theo từng số hạng trên khoảng hội tụ* $-R < x < R$ *của nó. Cụ thể nếu*

$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *với* $|x| < R$ *thì với* $|x| < R$ *ta có*

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \ldots$$

và

$$\int f(x)dx = \int \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \int a_k x^k dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1} + C$$

8.7 Chuỗi lũy thừa

8.7.2 Đạo hàm và tích phân từng số hạng của CLT

Ví dụ 8.52. Cho hàm f xác định bởi chuỗi lũy thừa

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!} \text{ với mọi } x.$$

Chứng minh rằng $f(x)=f'(x)$ với mọi x và từ đó suy ra $f(x)=e^x$.

Ví dụ 8.55. Bằng cách lấy tích phân từng số hạng của chuỗi cấp số nhân hãy chứng minh rằng

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{k+1}}{k+1}=-\ln(1-x) \text{ với } -1<x<1$$

8.7 Chuỗi lũy thừa

Giải 8.52:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left[1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots\right]$$

$$= 0 + 1 + \frac{2x}{2!} + \frac{3x^2}{3!} + \frac{4x^3}{4!} + \dots$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

$$= f(x)$$

PTVP f'(x) =f(x) có nghiệm f(x) = e^x

8.7 Chuỗi lũy thừa

Giải 8.55:

Ta đã có khai triển khi u∈(-1;1): $\sum_{k=0}^{\infty} u^k = \frac{1}{1-u}$

$$\int_0^x \frac{1}{1-u} du = \int_0^x \left(\sum_{k=0}^{\infty} u^k \right) du$$

$$= \int_0^x \left(1 + u + u^2 + u^3 + \ldots\right) du$$

$$= x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{k+1}, \quad -1 < x < 1$$

8.7 Chuỗi lũy thừa

Giải 8.55:

Ta cũng biết

$$\int_0^x \frac{1}{1-u}du = -\ln(1-x), \quad -1 < x < 1$$

Do đó

$$-\ln(1-x) = \int_0^x \frac{1}{1-u}du = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{k+1}}{k+1}, \quad -1 < x < 1$$

8.8 Chuỗi Taylor và Maclaurine

8.8.1 Đa thức Taylor và Maclaurine

Giả sử hàm f(x) xác định và có đạo hàm tới cấp n trong U(c) nào đó. Đa thức:

$$f(c)+f'(c)(x-c)+\frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2\ldots+\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$$

gọi là đa thức Taylor cấp n của hàm f tại c.

đặc biệt khi c = 0 đa thức Taylor gọi là đa thức Maclaurine

8.8 Chuỗi Taylor và Maclaurine

8.8.1 Đa thức Taylor và Maclaurine

Định lý (Về sự biểu diễn duy nhất của chuỗi lũy thừa)

Giả sử hàm f khả vi vô hạn lần và có thể biểu diễn dưới dạng chuỗi lũy thừa:

$$f(x) = f(c) + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + \ldots + a_n(x-c)^n + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-c)^k$$

Với -R < x-c < R

Khi đó: $a_k = \dfrac{f^{(k)}(c)}{k!}, \forall k$

8.8 Chuỗi Taylor và Maclaurine

8.8.2 Định lý Taylor

Nếu $f(x)$ và tất cả các đạo hàm của nó tồn tại trong khoảng I chứa c thì với mọi x thuộc I ta có

$$f(x)=f(c)+f'(c)(x-c)+\frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2\ldots+\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n+R_n(x)$$

trong đó

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(z_n)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}$$

với z_n phụ thuộc x và nằm giữa c với x.

Tức là $f(x) = T_n(x) + R_n(x)$, $R_n(x)$ gọi là phần dư dạng Lagrange

8.8 Chuỗi Taylor và Maclaurine

8.8.3 Chuỗi Taylor và chuỗi Maclaurine

Chuỗi Taylor: *Giả sử có một khoảng mở I chứa điểm c mà trong đó hàm $f(x)$ và các đạo hàm của nó tồn tại. Khi đó chuỗi lũy thừa*

$$f(c)+\frac{f'(c)}{1!}(x-c)+\frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2\ldots+\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n+\ldots.$$

*được gọi là **chuỗi Taylor** của f tại x = c.*

Chuỗi Maclaurin: *Trường hợp đặc biệt khi c = 0 thì được gọi là **chuỗi Maclaurin** của f*

$$f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots$$

8.8 Chuỗi Taylor và Maclaurine

Chuỗi Maclaurine một số hàm cơ bản.

$$I.\quad e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (|x| < \infty)$$

$$II.\quad \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} \quad (-1 < x \le 1)$$

$$III.\quad \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (|x| < \infty)$$

$$IV\quad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \quad (|x| < \infty)$$

$$IV.\quad (1+x)^m = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!} x^n \quad (-1 < x < 1)$$

$$VI.\quad \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad (-1 < x < 1)$$

$$VII.\quad \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \quad (-1 < x < 1)$$

8.8 Chuỗi Taylor và chuỗi Maclaurin

8.8.4 Các ví dụ của chuỗi Taylor và Maclaurin

Ví dụ 8.62. **Tìm chuỗi Maclaurin bằng cách thay thế một chuỗi cấp số nhân**

Tìm chuỗi Maclaurin cho hàm $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$

Ví dụ 8.63. Tìm chuỗi Maclaurin bằng cách sửa đổi một chuỗi cấp số nhân

Tìm chuỗi Maclaurent cho hàm $f(x)=\dfrac{5-2x}{3+2x}$ và xác định khoảng hội tụ của nó.

Ví dụ 8.64. Tìm chuỗi Maclaurent cho các hàm

a. $f(x)=\cos x^2$

b. $g(x)=\cos^2 x$

8.8 Chuỗi Taylor và chuỗi Maclaurin

Giải ví dụ 8.62

Ta biết rằng nếu $|u| < 1$ ta có thể viết

$$\frac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + u^3 + \ldots$$

Thay $u = -x^2$ ta có

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots$$

với $|-x^2| < 1$; nghĩa là $-1 < x < 1$ .Do đó, từ định lý về tính duy nhất, biểu diễn mong muốn là

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k} \text{ với } -1 < x < 1$$

8.8 Chuỗi Taylor và chuỗi Maclaurin

Giải ví dụ 8.63

$$\frac{5-2x}{3+2x} = -1 + \frac{8}{3+2x}$$

$$= -1 + \frac{\frac{8}{3}}{1-\left(-\frac{2}{3}x\right)}$$

$$= -1 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{8}{3}\left(-\frac{2}{3}x\right)^k$$

$$= -1 + \frac{8}{3} - \frac{16}{9}x + \frac{32}{27}x^2 - \frac{64}{81}x^3 + \ldots$$

8.8 Chuỗi Taylor và chuỗi Maclaurin

Giải ví dụ 8.64

Áp dụng công thức: $$\cos u = 1 - \frac{u^2}{2!} + \frac{u^4}{4!} - \frac{u^6}{6!} + \ldots$$

$$\cos x^2 = 1 - \frac{(x^2)^2}{2!} + \frac{(x^2)^4}{4!} - \frac{(x^2)^6}{6!} + \ldots \qquad (u = x^2)$$

$$= 1 - \frac{x^4}{2!} + \frac{x^8}{4!} - \frac{x^{12}}{6!} + \ldots$$

8.8 Chuỗi Taylor và chuỗi Maclaurin

Giải ví dụ 8.64

Áp dụng công thức: $$\cos u = 1 - \frac{u^2}{2!} + \frac{u^4}{4!} - \frac{u^6}{6!} + \dots$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left[1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} - \frac{(2x)^6}{6!} + \dots\right] \quad (u = 2x)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{2x^2}{2!} + \frac{2^3x^4}{4!} - \frac{2^5x^6}{6!} + \dots$$

$$= 1 - x^2 + \frac{1}{3}x^4 - \frac{2}{45}x^6 + \dots$$

8.8 Chuỗi Taylor và chuỗi Maclaurin

8.8.4 Các phép toán của chuỗi Taylor và Maclaurin

Ví dụ. Tìm chuỗi Maclaurent của hàm $f(x)=\sqrt{9+x}$ và tìm khoảng hội tụ của nó

Giải:

Ta có $f(x)=\sqrt{9+x}=(9+x)^{1/2}=3\left(1+\dfrac{x}{9}\right)^{1/2}$

Vì vậy

$$\sqrt{9+x}=3\left(1+\frac{x}{9}\right)^{1/2}$$

$$=3\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{x}{9}\right)+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}\left(\frac{x}{9}\right)^2+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{3!}\left(\frac{x}{9}\right)^3+.....\right]$$

$$=3\left[1+\frac{1}{18}x-\frac{1}{648}x^2+\frac{1}{11664}x^3-......\right]$$

$$=3+\frac{1}{6}x-\frac{1}{216}x^2+\frac{1}{3888}x^3-.....$$