Ôn chương 8

1. Chuỗi số: Định nghĩa chuỗi, chuỗi hội tụ, phân kỳ, tổng riêng thứ n, tổng của chuỗi. Điều kiện cần chuỗi hội tụ.
2. Chuỗi không âm, chuỗi dương, chuỗi đan dấu, định lý Newton – Leibnitz.
3. Chuỗi hội tụ tuyệt đối, bán hội tụ.
4. Chuỗi lũy thừa, bán kính hội tụ, khoảng hội tụ, miền hội tụ.
5. Chuỗi Taylor; Maclaurint, khai triển Maclaurint của một số hàm cơ bản, ứng dụng.

Ôn chương 8.
Chuỗi Taylor và Maclaurin

Table 8.2 Power series for elementary functions*

Name	Series	Interval of Convergence
Exponential series	$e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + \frac{u^4}{4!} + \cdots + \frac{u^k}{k!} + \cdots$	$(-\infty, \infty)$
	$e^x = e^c + e^c(x-c) + \frac{e^c(x-c)^2}{2!} + \frac{e^c(x-c)^3}{3!} + \cdots + \frac{e^c(x-c)^k}{k!} + \cdots$	$(-\infty, \infty)$
Cosine series	$\cos u = 1 - \frac{u^2}{2!} + \frac{u^4}{4!} - \frac{u^6}{6!} + \cdots + \frac{(-1)^k u^{2k}}{(2k)!} + \cdots$	$(-\infty, \infty)$
	$\cos x = \cos c - (x-c)\sin c - \frac{(x-c)^2}{2!}\cos c + \frac{(x-c)^3}{3!}\sin c + \cdots$	$(-\infty, \infty)$
Sine series	$\sin u = u - \frac{u^3}{3!} + \frac{u^5}{5!} - \frac{u^7}{7!} + \cdots + \frac{(-1)^k u^{2k+1}}{(2k+1)!} + \cdots$	$(-\infty, \infty)$
	$\sin x = \sin c + (x-c)\cos c - \frac{(x-c)^2}{2!}\sin c - \frac{(x-c)^3}{3!}\cos c + \cdots$	$(-\infty, \infty)$
Geometric series	$\frac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + u^3 + \cdots + u^k + \cdots$	$(-1, 1)$
Reciprocal series	$\frac{1}{x} = 1 - (x-1) + (x-1)^2 - (x-1)^3 + (x-1)^4 - \cdots$	$(0, 2)$
Logarithmic series	$\ln x = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \cdots + \frac{(-1)^{k-1}(x-1)^k}{k} + \cdots$	$(0, 2]$
	$\ln(1+u) = u - \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{3}u^3 - \frac{1}{4}u^4 + \cdots + \frac{(-1)^{k-1}u^k}{k} + \cdots$	$(-1, 1]$
	$\ln x = \ln c + \frac{x-c}{c} - \frac{(x-c)^2}{2c^2} + \frac{(x-c)^3}{3c^3} - \cdots + \frac{(-1)^{k-1}(x-c)^k}{kc^k} + \cdots$	$(0, 2c]$
Inverse tangent series	$\tan^{-1} u = u - \frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5} - \frac{u^7}{7} + \cdots + \frac{(-1)^k u^{2k+1}}{2k+1} + \cdots$	$[-1, 1]$
Inverse sine series	$\sin^{-1} u = u + \frac{u^3}{2\cdot 3} + \frac{1\cdot 3u^5}{2\cdot 4\cdot 5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5u^7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7} + \cdots + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-3)u^{2k-1}}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2k-2)(2k-1)} + \cdots$	$[-1, 1]$
Binomial series	$(1+u)^p = 1 + pu + \frac{p(p-1)}{2!}u^2 + \frac{p(p-1)(p-2)}{3!}u^3 + \cdots.$	

*Taylor series at $x = c$ follows the Maclaurin series for each function.

Ôn chương 8

Chuỗi Maclaurin của một số hàm thường dùng

1) $e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ Miền hội tụ: R

2) $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n}$ Miền hội tụ: $(-1,1]$

3) $\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ Miền hội tụ: R

4) $\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ Miền hội tụ: R

Ôn chương 8

Chuỗi Maclaurin của một số hàm thường dùng

5) $(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha\cdot(\alpha-1)\cdots(\alpha-(n-1))x^n}{n!}$ Miền hội tụ: $(-1,1)$

6) $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ Miền hội tụ: $(-1,1)$

7) $\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$ Miền hội tụ: $(-1,1)$

8) $\arctan x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ Miền hội tụ: $\left(-1,1\right]$

9) $\cosh x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ Miền hội tụ: R

10) $\sinh x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ Miền hội tụ: R

Ôn chương 8

Ví dụ Tìm chuỗi luỹ thừa của hàm $y = \ln(2+3x)$

trong lân cận của $x_0 = 1$.

Đặt $X = x - 1 \quad \Leftrightarrow x = X + 1$

Tìm khai triển Maclaurint của hàm $f = \ln(2+3(X+1))$

$$f = \ln(5+3X) = \ln 5\left(1+\frac{3X}{5}\right) = \ln 5 + \ln\left(1+\frac{3X}{5}\right)$$

$$f = \ln 5 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(3X/5)^n}{n} = \ln 5 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{3^n\cdot(x-1)^n}{n\cdot 5^n}$$

Ôn chương 8

Ví dụ Tìm chuỗi luỹ thừa của hàm $y = \dfrac{2x+1}{x^2+x}$

trong lân cận của $x_0 = 2$.

Đặt $X = x - 2 \Leftrightarrow x = X + 2$

Tìm khai triển Maclaurint của hàm $f = \dfrac{2X+5}{(X+2)(X+3)}$

$$f = \frac{1}{X+2} + \frac{1}{X+3} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+X/2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+X/3}$$

$$f = \frac{1}{2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{X^n}{2^n} + \frac{1}{2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{X^n}{3^n}$$

$$f = \frac{1}{2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}\right)(x-2)^n$$

Ôn chương 8

Ví dụ Tìm chuỗi Maclaurint của hàm $y = \dfrac{1}{(1-x)^2}, \quad |x| < 1$

Ta có $$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

Đạo hàm hai vế (trong miền hội tụ, đạo hàm của tổng

bằng tổng các đạo hàm)

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n$$

Ôn chương 8

Ví dụ Tính tích phân $I = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx$

biết rằng $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$

Ta có $I = \int_0^1 \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n}{x} dx = \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^{n-1} dx$

$$I = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} x^n \Big|_0^1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} - \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

Ôn chương 8

Ví dụ Tính tích phân $I = \int_0^1 \ln\frac{1}{1-x}dx$

Ta có $I = \int_0^1 -\ln(1-x)dx = \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}(-x)^n dx = \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}dx$

$$I = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}x^{n+1}\Bigg|_0^1 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)} = \lim S_n = 1$$

Vì $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \ldots + \frac{1}{n.(n+1)}$

$$S_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Ôn chương 8

Ví dụ Tính tổng của $I = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+n-2}$

$$I = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n-1)(n+2)} \qquad = \frac{1}{3}\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n-1} - \frac{1}{3}\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+2}$$

Đặt $N = n-1$: $J = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n-1} = \sum_{N=1}^{\infty} \frac{(-1)^{N+1}}{N}$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$$

Đặt $N = n+2$: $K = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+2} = \sum_{N=4}^{\infty} \frac{(-1)^{N+2}}{N} = -\sum_{n=4}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$

$= \ln 2 - \frac{1}{2}$ Vậy $I = \frac{2}{3}\ln - \frac{3}{18}$

Ôn chương 8

Ví dụ Tính tổng $I = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$

Ta có $I = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n-1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1+1}{(n-1)!}$

$$I = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-2)!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 2e$$

Kiểm tra

1. Tìm miền hội tụ của chuỗi $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+2)(x+1)^n}{5^{n+2}\sqrt{n^6+1}}$

2. Tìm tổng của chuỗi $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n(n+1)}{n!}$