Chương 8. CHUỖI

8.7 Tham khảo bài tập chuỗi lũy thừa

8.7 Chuỗi lũy thừa

Định nghĩa chuỗi luỹ thừa

Chuỗi luỹ thừa là chuỗi $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n, a_n \in R \quad (1)$

Khi $x_0 = 0$ ta có chuỗi luỹ thừa $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, a_n \in R \quad (2)$

Cho $x = \alpha$ một giá trị cụ thể ta có chuỗi số $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \alpha^n$

Định nghĩa miền hội tụ chuỗi luỹ thừa

Tập hợp các giá trị của x, khi thay vào chuỗi (1) hoặc (2) được chuỗi số hội tụ, gọi là miền hội tụ của (1) hoặc (2)

8.7 Chuỗi lũy thừa

Bổ đề Abel

Nếu chuỗi $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ hội tụ tại $x_0 \neq 0$, thì nó hội tụ tuyệt đối trong khoảng $(-|x_0|, |x_0|)$.

Định lý

Cho chuỗi $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Khi đó tồn tại duy nhất $0 \leq R \leq +\infty$ thoả

1) Chuỗi hội tụ $\forall x, |x| < R$

2) Chuỗi phân kỳ $\forall x, |x| > R$

Định nghĩa

Số R trong định lý gọi là bán kính hội tụ của chuỗi $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

8.7 Chuỗi lũy thừa

Định lý (dấu hiệu d'Alembert để tìm bán kính hội tụ)

Cho chuỗi $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Giả sử $\exists n_0, \forall n \geq n_0 : a_n \neq 0$ và

$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \rho$ Khi đó, bán kính hội tụ $R = \frac{1}{\rho}$

(Qui ước: $\frac{1}{0} = \infty, \frac{1}{\infty} = 0$)

8.7 Chuỗi lũy thừa

Định lý (dấu hiệu Côsi- Hadamard tìm bán kính hội tụ)

Cho chuỗi $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Giả sử $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho$

Khi đó, bán kính hội tụ $R = \dfrac{1}{\rho}$

(Qui ước: $\dfrac{1}{0} = \infty, \dfrac{1}{\infty} = 0$)

8.7 Chuỗi lũy thừa

Ví dụ Tìm bán kính hội tụ của $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{n!} x^n$

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)!!}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{(2n-1)!!} = 2 \quad \Rightarrow R = \frac{1}{\rho} = \frac{1}{2}$$

Ví dụ Tìm bán kính hội tụ của $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right) x^n$

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}}{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}} = 1$$

$$\Rightarrow R = \frac{1}{\rho} = 1$$

8.7 Chuỗi lũy thừa

Ví dụ Tìm bán kính và miền hội tụ của $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{2n+1}$ (1)

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{(-1)^n}{2n+1}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1} = 1 \Rightarrow R = \frac{1}{\rho} = 1$$

Tại $X = 1$ có chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1}$ Phân kỳ theo so sánh

Tại $X = -1$ có chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ hội tụ theo Leibnitz

Miền hội tụ của đã cho $-1 \le x < 1$

8.7 Chuỗi lũy thừa

Ví dụ Tìm bán kính và miền hội tụ của $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n + (-2)^n}{n+1} x^n$ (1)

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{5^n + (-3)^n}{n+1}\right|} = 5 \quad \Rightarrow R = \frac{1}{\rho} = \frac{1}{5}$$

Tại $X = \frac{1}{5}$ có chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n + (-2)^n}{(n+1)\cdot 5^n}$ Phân kỳ theo so sánh

Tại $X = -\frac{1}{5}$ có chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{5^n + (-2)^n}{(n+1)\cdot 5^n}$ hội tụ (tách ra tổng)

Miền hội tụ của đã cho $-\frac{1}{5} \le x < \frac{1}{5}$

8.7 Chuỗi lũy thừa

Ví dụ Tìm bán kính và miền hội tụ của $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n (x+1)^n}{n \ln^2(n+1)}$ (1)

Đặt $X = x+1$ Xét chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n X^n}{n \ln^2(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n X^n$ (2)

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{2^n}{n \ln^2(n+1)}\right|} = 2 \quad \Rightarrow R = \frac{1}{\rho} = \frac{1}{2}$$

Tại $X = \frac{1}{2}$ có chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n \ln^2(n+1)} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$ hội tụ.

Tại $X = \frac{-1}{2}$ có chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n \ln^2(n+1)} \cdot \left(\frac{-1}{2}\right)^n$ hội tụ tuyệt đối

Miền hội tụ của (1) $\frac{-1}{2} \le x+1 \le \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{-3}{2} \le x \le \frac{-1}{2}$

8.7 Chuỗi lũy thừa

Ví dụ   Tìm miền hội tụ của $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{\sqrt{n+1}} \ln \frac{3n-2}{3n+2} \quad (1)$

Đặt $X = x+1$ Xét chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{X^n}{\sqrt{n+1}} \ln \frac{3n-2}{3n+2} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n X^n \quad (2)$

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{1}{\sqrt{n+1}} \ln \frac{3n-2}{3n+2}\right|} = 1 \qquad \Rightarrow R = \frac{1}{\rho} = 1$$

Tại $X = 1$ có chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} \ln \frac{3n-2}{3n+2}$ hội tụ.

Tại $X = -1$ có chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}} \ln \frac{3n-2}{3n+2}$ hội tụ tuyệt đối

Miền hội tụ của (1) $-1 \le x+1 \le 1 \quad \Leftrightarrow -2 \le x \le 0$

8.7 Chuỗi lũy thừa

Ví dụ Tìm miền hội tụ của $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{2n+1}-\sqrt[3]{2n-1}}{\sqrt{n}}(x+3)^n \quad (1)$

Đặt $X = x+3$ Xét chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{2n+1}-\sqrt[3]{2n-1}}{\sqrt{n}}(x+3)^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n X^n$

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{\sqrt[3]{2n+1}-\sqrt[3]{2n-1}}{\sqrt{n}}} = 1 \Rightarrow R = \frac{1}{\rho} = 1$$

Tại $X = 1$ có chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{2n+1}-\sqrt[3]{2n-1}}{\sqrt{n}}$ Hội tụ.

Tại $X = -1$ có chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt[3]{2n+1}-\sqrt[3]{2n-1}}{\sqrt{n}}$ HT tuyệt đối

Miền hội tụ của (1) $\quad -1 \le x+3 \le 1 \quad \Leftrightarrow -4 \le x \le -2$

8.7 Chuỗi lũy thừa

Tính chất của chuỗi luỹ thừa

1) Tổng của chuỗi luỹ thừa là một hàm liên tục trên miền hội tụ của nó.

2) Trong khoảng hội tụ: Đạo hàm của tổng bằng tổng các đạo hàm:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n x^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

3) Trong khoảng hội tụ: Tích phân của tổng bằng tổng các tích phân:

$$\int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x \left(a_n t^n\right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

8.7 Chuỗi lũy thừa

Ví dụ Tính tổng của $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$

Ta có $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \forall x \in (-1,1)$

Đạo hàm hai vế (đạo hàm của tổng bằng tổng các đạo hàm) $\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$

Cho $x = \frac{1}{3}$ ta có: $\frac{9}{4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^{n-1}}$

Nhân hai vế cho 1/3: $\frac{3}{4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$

8.7 Chuỗi lũy thừa

Ví dụ Tính tổng của $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \cdot 2^n}{5^{n+1}}$

Theo ví dụ trước: $\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$

Nhân hai vế cho x, đạo hàm hai vế:

$$\frac{1+x}{(x-1)^3} = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1}$$

Cho $x = \frac{2}{5}$ ta có: $\frac{875}{81} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot 2^{n-1}}{5^{n-1}}$

Nhân hai vế cho 2/25: $\frac{70}{81} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot 2^n}{5^{n+1}}$

8.7 Chuỗi lũy thừa

Ví dụ Tính tổng của $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^3 - 4n^2 + 5}{4^n}$

Ta có: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^3 - 4n^2 + 5}{4^n} = 3\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{4^n} - 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{4^n} + 5\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n}$

Số hạng cuối cùng tính trực tiếp, số hạng thứ hai tính theo ví dụ vừa rồi. Từ ví dụ này ta có: $\frac{1+x}{(x-1)^3} = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1}$

Nhân hai vế cho x, đạo hàm hai vế ta được:

$-\frac{x^2 + 4x + 1}{(x-1)^4} = \sum_{n=1}^{\infty} n^3 x^{n-1}$ từ đây tính ra được số hạng đầu.

Qua 3 ví dụ, ta có thể tính tổng $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_k(n)}{a^n}$

8.7 Chuỗi lũy thừa

Ví dụ   Tính tổng của $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n}$

Xét chuỗi $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ Miền hội tụ: $-1 \le x < 1$

Đạo hàm ta được: $S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad \forall x \in (-1,1)$

$\Rightarrow S(x) = \int \frac{dx}{1-x} = -\ln|1-x| + C$ Vì $S(0) = 0 \Rightarrow C = 0$

$\Rightarrow S(x) = -\ln|1-x|$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n} = S\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln|1-1/2| = \ln 2$$

8.7 Chuỗi lũy thừa

Ví dụ Tính tổng của $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n(n+1)\cdot 3^n}$

Xét chuỗi $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$ Miền hội tụ: $-1 \le x \le 1$

Đạo hàm ta được: $S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$ vdụ trước

$$\Rightarrow S(x) = -\int \ln(1-x)dx = x + (1-x)\ln(1-x) + C$$

$S(0) = 0$

$\Rightarrow C = 0$

$$\Rightarrow S(x) = x + (1-x)\ln(1-x)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n(n+1)\cdot 3^n} = S\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3} + \left(1-\frac{2}{3}\right)\ln\left(1-\frac{2}{3}\right) = \frac{2-\ln 3}{3}$$

8.7 Chuỗi lũy thừa

Ví dụ Tính tổng của $I = \sum_{n=4}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n^2 - 4n + 3) \cdot 3^n}$

$$I = \sum_{n=4}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n-3)(n-1) \cdot 3^n} = \frac{1}{2} \sum_{n=4}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n-3) \cdot 3^n} - \frac{1}{2} \sum_{n=4}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n-1) \cdot 3^n}$$

Đặt $N = n - 3$, ta có: $J = \sum_{n=4}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n-3) \cdot 3^n} = \sum_{N=1}^{\infty} \frac{(-1)^{N+3}}{N \cdot 3^{N+3}} = \frac{-1}{27} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \cdot 3^n}$

Thay $x = \frac{-1}{3}$ vào $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln|1 - x|$ ta được J.

Đặt $N = n - 1$, ta có: $K = \sum_{n=4}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n-1) \cdot 3^n} = \sum_{N=3}^{\infty} \frac{(-1)^{N+1}}{N \cdot 3^{N+1}} = \frac{-1}{3} \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \cdot 3^n}$

Tương tự J, tính được K.