Chương 9

VÉC TƠ TRONG MẶT PHẲNG VÀ TRONG KHÔNG GIAN

9.1. Véctơ trong $\mathbb{R}^2$

9.2. Tọa độ và véctơ trong $\mathbb{R}^3$

9.3. Tích vô hướng của hai véctơ

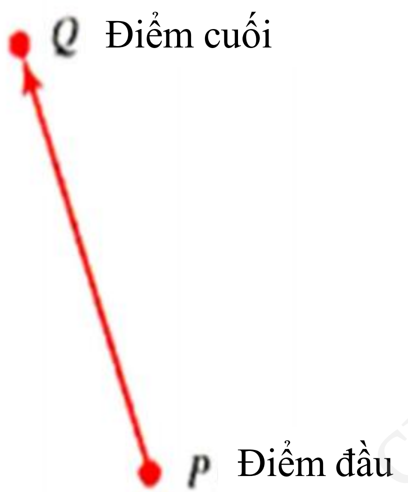
9.4. Tích có hướng của hai véctơ

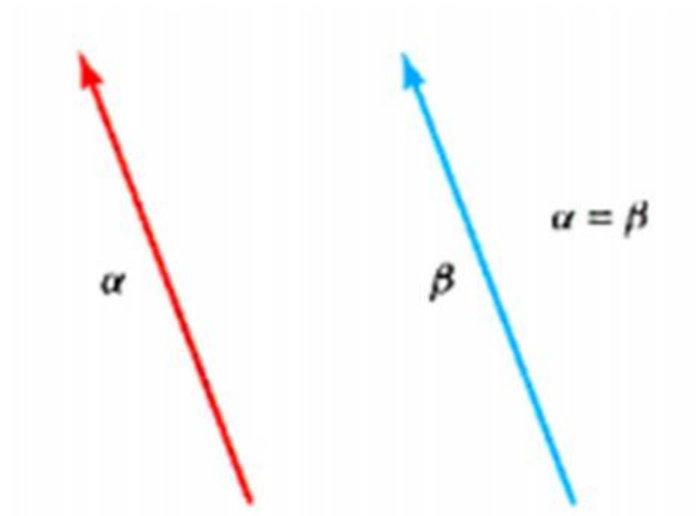
9.5. Đường trong $\mathbb{R}^3$

9.1 Véc tơ trong R^2

9.1.1 Giới thiệu véc tơ

+ Véc tơ hình học: các định nghĩa, sự bằng nhau
+ Các qui tắc cộng, trừ, nhân số..
+ Véc tơ không



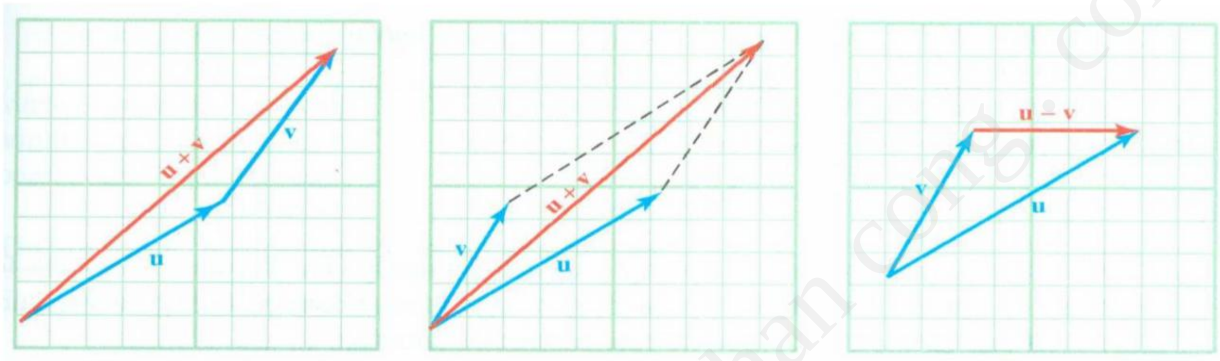


a. Vectơ PQ có độ dài $\|PQ\|$

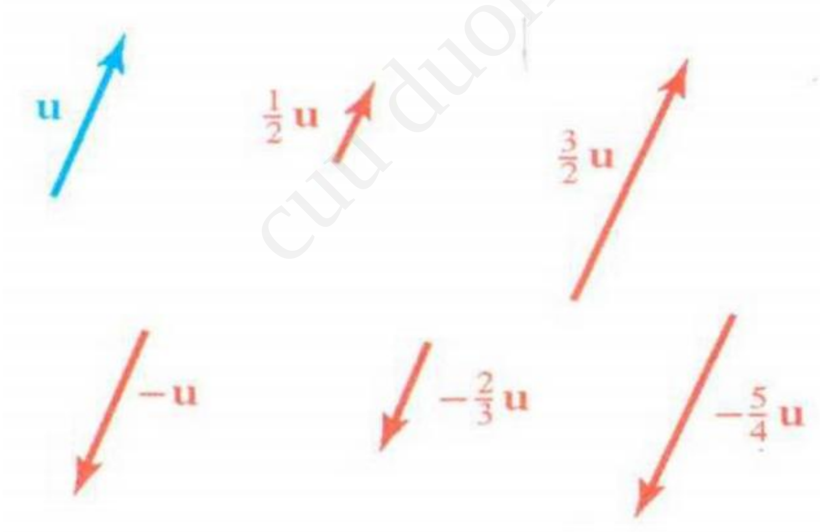
b. Hai vectơ bằng nhau

9.1 Véc tơ trong R^2

9.1.2 Các phép toán véc tơ



a. Quy tắc tam giác b. Quy tắc hình bình hành c. Quy tắc hiệu

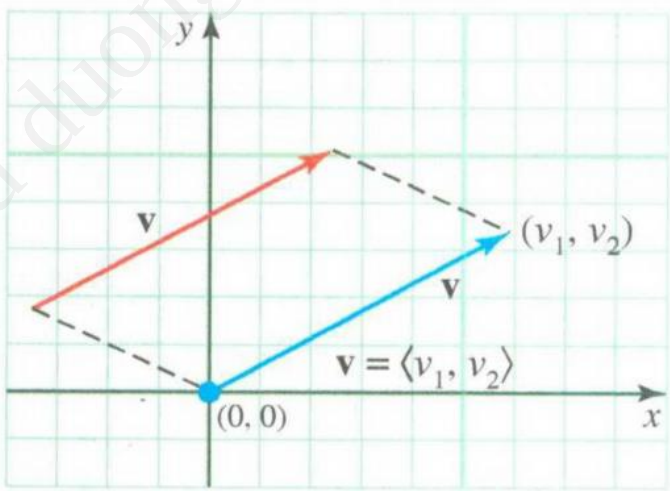


9.1 Véc tơ trong R^2

9.1.2 Các phép toán véc tơ

Biểu diễn hình học của vectơ

Vectơ v được biểu diễn trong mặt phẳng tọa độ như trong hình vẽ 9.4, với điểm bắt đầu là $(0,0)$ và điểm kết thúc là (v_1, v_2). Khi đó v_1 và v_2 gọi là các thành phần chuẩn của vectơ v và ta viết $v = \langle v_1, v_2 \rangle$.

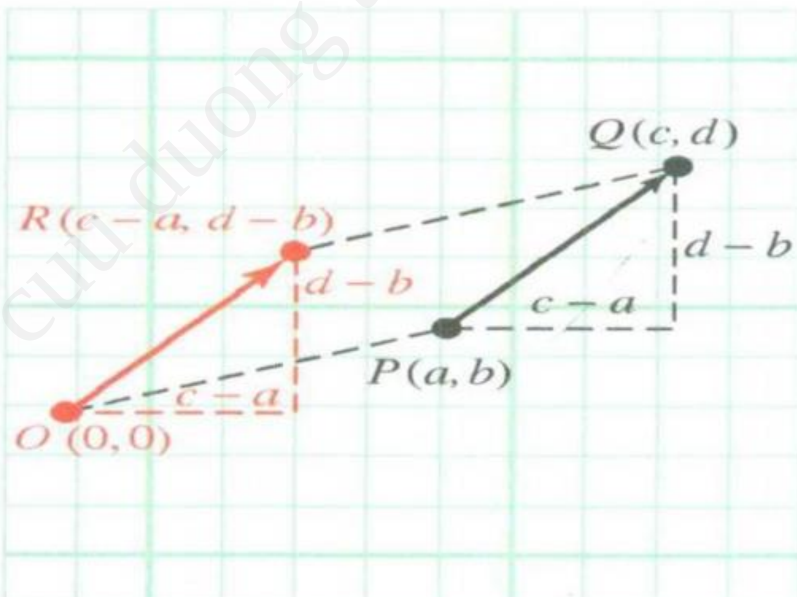


9.1 Véc tơ trong R^2

9.1.2 Các phép toán véc tơ

Các thành phần chuẩn của vectơ trong $\mathbb{R}^2$

Nếu $P(a,b)$ và $Q(c,d)$ là các điểm trong mặt phẳng tọa độ thì vectơ PQ có biểu diễn duy nhất các thành phần chuẩn là $PQ = \langle c - a, d - b\rangle$.



9.1 Véc tơ trong R^2

9.1.2 Các phép toán véc tơ

Các phép toán vectơ có thể biểu diễn ở dạng thành phần. Cụ thể, ta có:

$$\langle a_1, b_1\rangle = \langle a_2, b_2\rangle \Leftrightarrow a_1 = b_1,\ a_2 = b_2;$$

$k\langle a, b\rangle = \langle ka, kb\rangle$, với k tùy ý;

$$\langle a, b\rangle + \langle c, d\rangle = \langle a+c, b+d\rangle$$
$$\langle a, b\rangle - \langle c, d\rangle = \langle a-c, b-d\rangle$$

Kết hợp tuyến tính của 2 véc tơ u, v là au + bv trong đó a,b$\in$R

Ví dụ **Phép toán vectơ:** Cho các vectơ $u = \langle 2, -3\rangle$ *và* $v = \langle -1, 7\rangle$, tìm

a. $u + v$ *b.* $\frac{3}{4}u$ *c.* $3u - \frac{1}{2}v$

Đáp số: a. $\langle 1, 4\rangle$ *b.* $\langle 3/2, -9/4\rangle$ *c.* $\langle 13/2, -25/2\rangle$

9.1 Véc tơ trong R^2

9.1.2 Các phép toán véc tơ

Định lý 9.1. Các tính chất của phép toán vectơ

Cho các vectơ u, v, w trong mặt phẳng và các vô hướng s và t. Ta có

Tính chất giao hoán: $u + v = v + u$

Tính chất kết hợp: $(u + v) + w = u + (v + w)$

Tính chất kết hợp của phép nhân: $(st)u = s(tu)$

Tính đồng nhất của phép cộng: $u + 0 = u$

Tính đảo ngược của phép cộng: $u + (-u) = 0$

Tính chất phân phối các vectơ: $(s + t)u = su + tu$

Tính chất phân phối các vô hướng: $s(u+v) = su + \mathrm{sv}$

9.1 Véc tơ trong R^2

9.1.3 Phép biểu diễn chính tắc véc tơ trong mặt phẳng

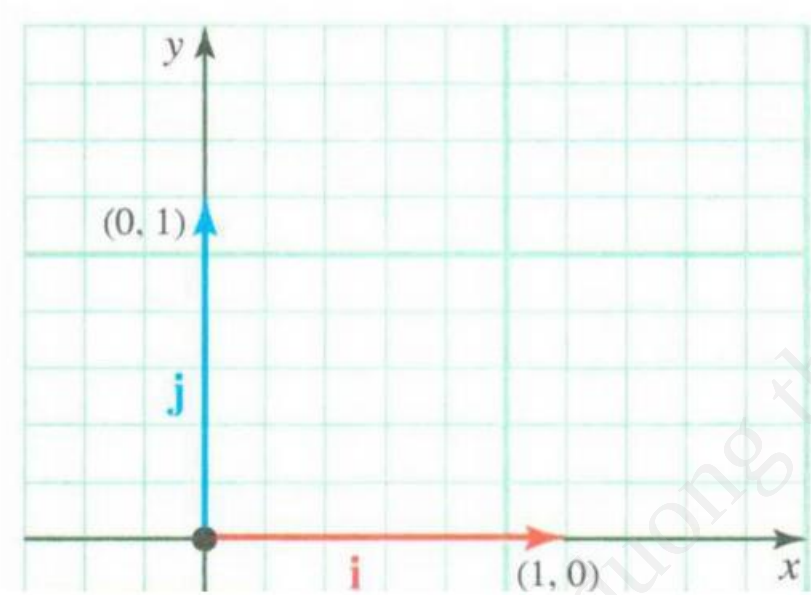
Các vectơ đơn vị $i = \langle 1, 0\rangle$ *và* $j = \langle 0, 1\rangle$ lần lượt chỉ chiều dương của các trục Ox và Oy và được gọi là các vectơ cơ sở chính tắc. Bất kỳ vectơ trong mặt phẳng $v = < v_1, v_2 >$ có thể được biểu diễn như là một tổ hợp tuyến tính của các vectơ i, j vì

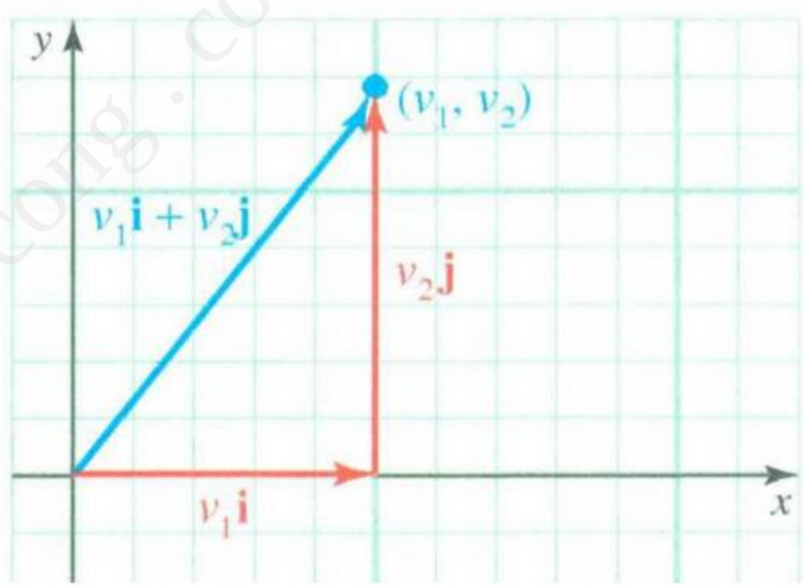
$$v = \langle v_1, v_2\rangle = v_1\langle 1,0\rangle + v_2\langle 0,1\rangle = v_1 i + v_2 j$$

Phép biểu diễn trên đây gọi là phép biểu diễn chính tắc của vectơ v và là phép biểu diễn duy nhất qua các vectơ cơ sở chính tắc. Các thành phần v_1, v_2 được gọi lần lượt là thành phần nằm ngang và thành phần thẳng đứng của v.

9.1 Véc tơ trong R^2

9.1.3 Phép biểu diễn chính tắc véc tơ trong mặt phẳng





Ví dụ 9.6. Tìm biểu diễn chính tắc của vectơ

Nếu $u = 3i + 2j$, $v = -2i + 5j$ và $w = i - 4j$ thì biểu diễn chính tắc của vectơ $2u + 5v - w$ là gì?

9.2 Tọa độ và véc tơ trong R^3

9.2.1 Hệ tọa độ ba chiều

Định nghĩa Oxyz
Tọa độ của điểm P bất kỳ
Dựng P biết tọa độ

Công thức khoảng cách 3 chiều

Khoảng cách $|P_1P_2|$ giữa các điểm $P_1(x_1, y_2, z_3)$ và $P_2(x_2, y_2, z_2)$ là:

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Ví dụ Tìm khoảng cách giữa điểm $P(10, 20, 10)$ và $Q(-12, 6, 12)$

Đáp số: $6\sqrt{19}$.

9.2 Tọa độ và véc tơ trong R^3

9.2.2 Đồ thị trong không gian

Đồ thị của một phương trình trong $\mathbb{R}^3$ là tập hợp các điểm (x, y, z) có tọa độ thỏa mãn phương trình đó. Đồ thị này được gọi là một mặt.

- Mặt phẳng
- Mặt cầu
- Mặt trụ

9.2 Tọa độ và véc tơ trong R³

9.2.3 Véc tơ trong không gian

Một vectơ trong $\mathbb{R}^3$ là một đoạn thẳng có định hướng trong không gian. Vectơ P_1P_2 với điểm bắt đầu $P_1(x_1, y_1, z_1)$ và điểm kết thúc $P_2(x_2, y_2, z_2)$ có dạng biểu diễn thành phần là

$$P_1P_2 = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1 \rangle$$

$i = \langle 1, 0, 0 \rangle \qquad j = \langle 0, 1, 0 \rangle \qquad k = \langle 0, 0, 1 \rangle$

Hơn nữa, vectơ P_1P_2 với điểm bắt đầu $P_1(x_1, y_1, z_1)$ và điểm kết thúc $P_2(x_2, y_2, z_2)$ có dạng biểu diễn là

$$P_1P_2 = (x_2 - x_1)i + (y_2 - y_1)j + (z_2 - z_1)k,$$

và có độ dài $\| P_1P_2 \| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$.

9.3 Tích vô hướng của hai véc tơ

9.3.1 Định nghĩa tích vô hướng

Định nghĩa. *Tích vô hướng của vectơ* $v = a_1 i + a_2 j + a_3 k$ *và vectơ* $w = b_1 i + b_2 j + b_3 k$ *là một số thực, ký hiệu là* $v \cdot w$*, được cho bởi:*

$$v \cdot w = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

Ví dụ

a. Tính tích vô hướng của vectơ $v = -3i + 2j + k$ và vectơ $w = 4i - j + 2k$

b. Tính tích vô hướng của vectơ $v = \langle 4, -1, 3 \rangle$ và vectơ $w = \langle -1, -2, 5 \rangle$

9.3 Tích vô hướng của hai véc tơ

9.3.2 Các tính chất của tích vô hướng - Góc giữa 2 véc tơ

Định lý 9.2. *Các tính chất của tích vô hướng*

Nếu u, v, và w là các vectơ trong $\mathbb{R}^2$ hoặc $\mathbb{R}^3$ và c là một số thực thì

1) $v \cdot v = \|v\|^2$

2) $0 \cdot v = 0$

3) $v \cdot w = w \cdot v$

4) $c(v \cdot w) = (cv) \cdot w = v \cdot (cw)$

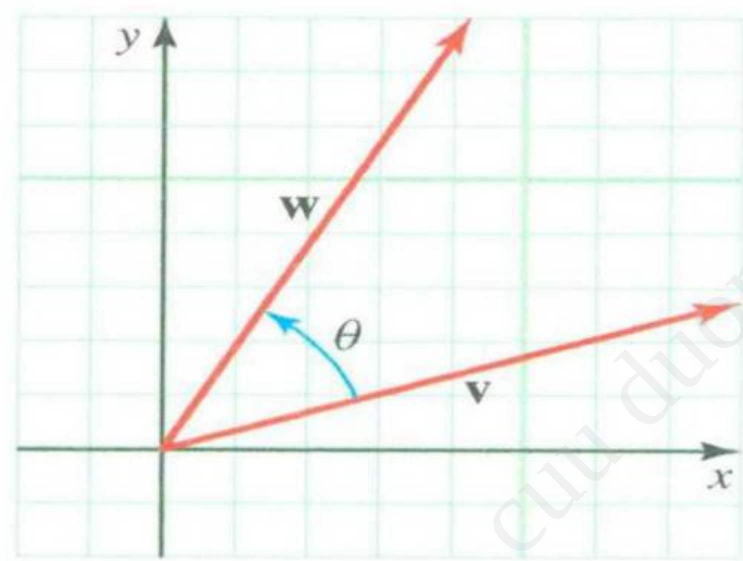
5) $u \cdot (v + w) = u \cdot v + u \cdot w$

Định lý 9.3. *Nếu θ $(0 \le \theta \le \pi)$ là góc giữa 2 vectơ khác không u và v thì*

$$\cos\theta = \frac{v \cdot w}{\|v\|\,\|w\|}$$

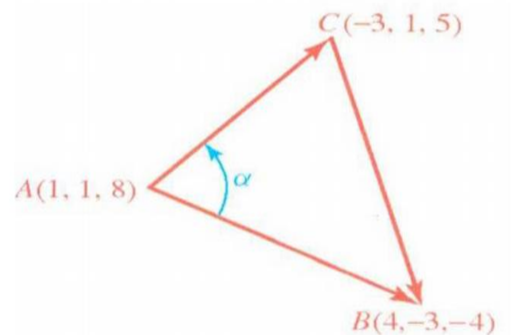
9.3 Tích vô hướng của hai véc tơ

9.3.2 Góc giữa hai véc tơ



Ví dụ 9.18. Cho tam giác ABC với các đỉnh là $A(1,\ 1,\ 8)$, $B(4,\ -3,\ -4)$ *và* $C(-3,\ 1,\ 5)$.

Tìm góc tại đỉnh A.



Đáp số: Xấp xỉ 1.19 *rad* hay 68^o.

9.3 Tích vô hướng của hai véc tơ

9.3.2 Góc giữa hai véc tơ

Công thức dạng hình học của tích vô hướng

$$v \cdot w = \|v\| \, \|w\| \cos\theta$$

trong đó θ $(0 \le \theta \le \pi)$ *là góc giữa các vectơ v và w.*

Ví dụ 9.19. Cho các vectơ v và w có độ dài là 4 và 6, và góc giữa chúng là $\frac{\pi}{3}$, tìm $v \cdot w$.

Đáp số: 12

Định lý 9.4. Định lý về tính trực giao

Hai vectơ khác không v *và* w *trực giao nếu và chỉ nếu* $v \cdot w = 0$.

Ví dụ 9.20. Xác định xem cặp vectơ nào trong số các vectơ sau trực giao:

$$u = 3i + 7j - 2k \; ; \; v = 5i - 3j - 3k ; w = j - k$$

9.3 Tích vô hướng của hai véc tơ

9.3.2 Góc giữa hai véc tơ

Hai vectơ được gọi là vuông góc hay trực giao nếu góc giữa chúng là $\theta = \dfrac{\pi}{2}$.

Định lý 9.4. Định lý về tính trực giao

Hai vectơ khác không v và w trực giao nếu và chỉ nếu $v \cdot w = 0$.

Vectơ 0 được xem là vuông góc với mọi vectơ.

Ví dụ 9.20. Xác định xem cặp vectơ nào trong số các vectơ sau trực giao:

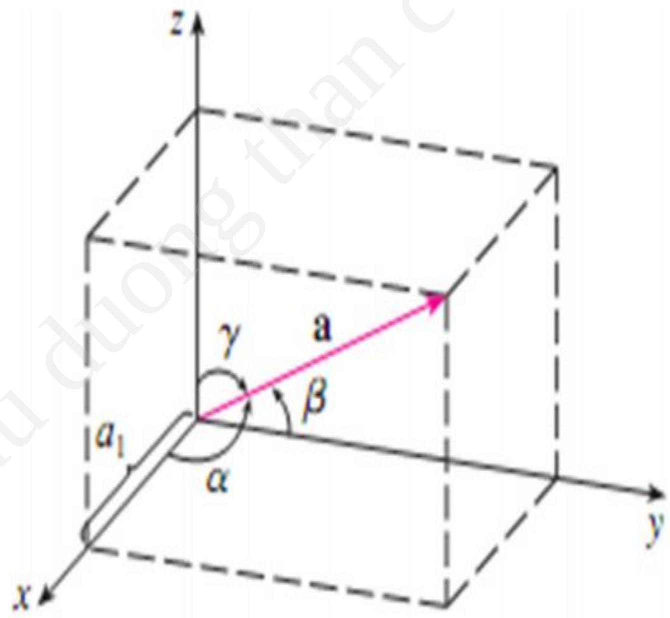
$$u = 3i + 7j - 2k \;;\; v = 5i - 3j - 3k ; w = j - k$$

Đáp án: u và v trực giao, v và w trực giao.

9.3 Tích vô hướng của hai véc tơ

9.3.3 Góc định hướng và cô sin định hướng

Các góc định hướng của một vectơ khác không v là các góc α, β, và γ thuộc $[0, \pi]$ mà vectơ v tạo với các trục dương x, y, và z.



$\cos\alpha, \cos\beta$, và $\cos\gamma$ được gọi là cosin định hướng của vectơ $v = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$

9.3 Tích vô hướng của hai véc tơ

9.3.3 Góc định hướng và cô sin định hướng

$$\cos\alpha = \frac{v \cdot i}{\|v\|\,\|i\|} = \frac{v_1}{\|v\|}$$

$$\cos\beta = \frac{v \cdot j}{\|v\|\,\|j\|} = \frac{v_2}{\|v\|}$$

$$\cos\gamma = \frac{v \cdot k}{\|v\|\,\|k\|} = \frac{v_3}{\|v\|}$$

Ta có $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

Vì vậy, ta được

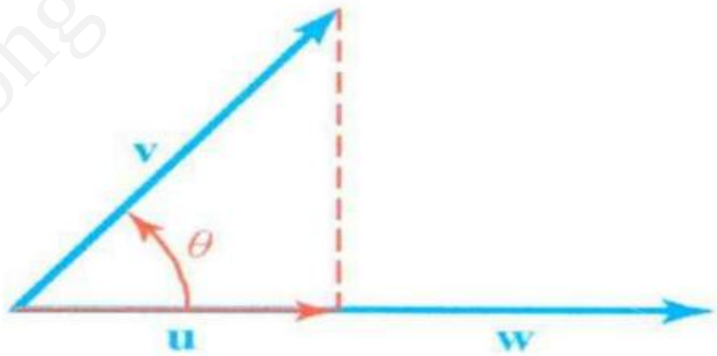
$$v = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle = \langle \|v\|\cos\alpha, \|v\|\cos\beta, \|v\|\cos\gamma \rangle$$
$$= \|v\| \langle \cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma \rangle$$

Ví dụ 9.21. Tìm các góc định hướng của vectơ $v = -2i + 3j + 5k$

9.3 Tích vô hướng của hai véc tơ

9.3.4 Phép chiếu

Cho v và w chung gốc. Nếu từ ngọn của v dựng đường thẳng vuông góc với đường thẳng chứa w tại điểm, ta xác định được véc tơ u, gọi là phép chiếu của v trên w, ký hiệu u = $proj_w v$, độ dài đại số của u trên w gọi là phép chiếu vô hướng của v trên w, ký hiệu $comp_w v$, ta có:



$$proj_w v = \left(\frac{v \cdot w}{w \cdot w}\right) w \qquad comp_w v = \frac{v \cdot w}{\| w \|}$$

9.3 Tích vô hướng của hai véc tơ

9.3.4 Phép chiếu

Ví dụ Tìm phép chiếu vectơ và phép chiếu vô hướng của $v = 2i + 3j + 5k$ xuống $w = 2i - 2j - k$.

Đáp số: $proj_w v = \frac{-14}{9} i + \frac{14}{9} j + \frac{7}{9} k$; $comp_w v = \frac{-7}{3}$

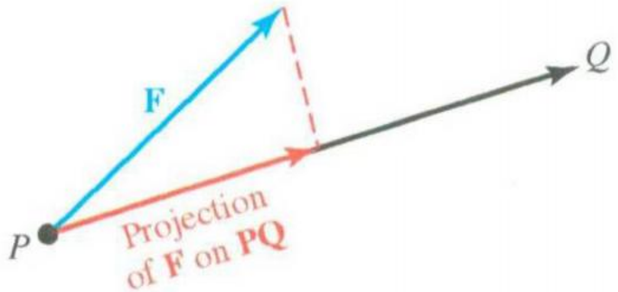
9.3 Tích vô hướng của hai véc tơ

9.3.5 Công như tích vô hướng

Công như một tích vô hướng

Nếu lực F làm một vật thể chuyển động từ điểm P đến điểm Q thì công thực hiện được là

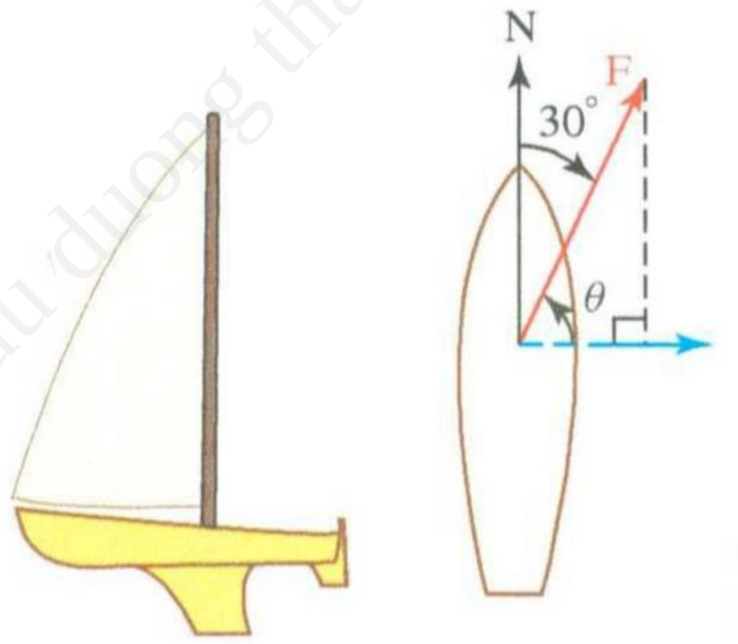
$$W = F \cdot PQ$$



9.3 Tích vô hướng của hai véc tơ

9.3.5 Công như tích vô hướng

Ví dụ 9.23. Giả sử một cơn gió thổi một lực F có độ lớn 500lb theo hướng 30^0 Đông Bắc vào cánh buồm của một con tàu. Hỏi công mà cơn gió thực hiện được để dịch chuyển con tàu một đoạn 100 ft theo hướng Bắc. (Đơn vị công là ft- lb).



9.3 Tích vô hướng của hai véc tơ

9.3.5 Công như tích vô hướng

Lời giải:

Ta có $\|F\| = 500\ lb$ và theo hướng 30^o Đông Bắc.

Độ dời $PQ = 100\,j$, vì thế $\|PQ\| = 100$. Do đó

$$F = 500\cos 60^0 i + 500\sin 60^0 j$$
$$= 250i + 250\sqrt{3}\,j$$

Công thực hiện là: $W = F \cdot PQ = 100\left(250\sqrt{3}\right) = 25{,}000\sqrt{3} \approx 43{,}301\ (ft - lb)$

9.4 Tích có hướng của hai véc tơ

9.4.1 Định nghĩa tích có hướng

Định nghĩa. *Nếu* $v = a_1 i + a_2 j + a_3 k$ và $w = b_1 i + b_2 j + b_3 k$ *thì tích có hướng của* v *và* w *là một vectơ, ký hiệu là* $v \times w$ *và được xác định bởi*

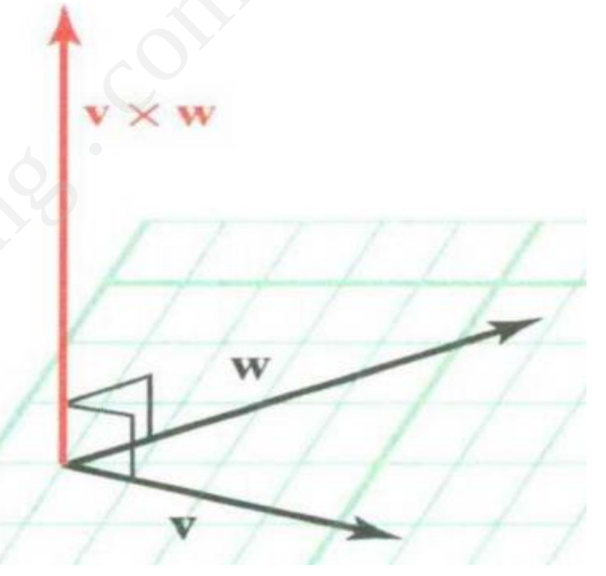
$$v \times w = (a_2 b_3 - a_3 b_2) i + (a_3 b_1 - a_1 b_3) j + (a_1 b_2 - a_2 b_1) k$$

$$v \times w = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Ví dụ: Tìm $v \times w$ biết $v = 2i - j + 3k$, $w = 7j - 4k$.

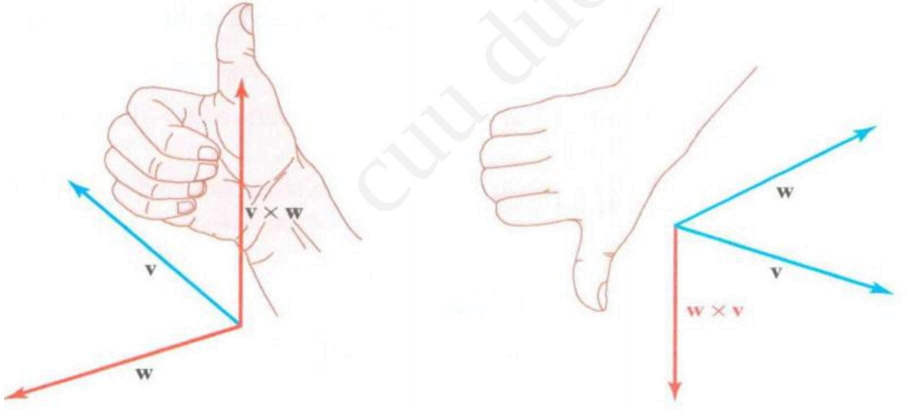
9.4 Tích có hướng của hai véc tơ

9.4.2 Biểu diễn hình học của tích có hướng



Chú ý:

- v x w trực giao với cả v và w
- Các xác định chiều của v x w



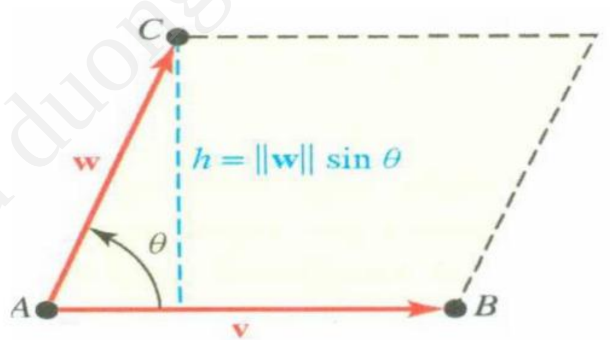
9.4 Tích có hướng của hai véc tơ

9.4.2 Biểu diễn hình học của tích có hướng

Nếu v và w là các vectơ khác không trong $\mathbb{R}^3$ và θ là góc giữa v và w $(0 \le \theta \le \pi)$ thì

$$\|v \times w\| = \|v\| \; \|w\| \sin\theta$$

Ta có độ dài của tích có hướng $\|v \times w\|$ bằng diện tích hình bình hành với v và w là các cạnh kề nhau.



Ví dụ: Tìm diện tích của tam giác PQR biết rằng

$$P(\ -2,\ 4,\ 5),\ Q(0,\ 7,\ -4)\ \text{và}\ R(\ -1,\ 5,\ 0)$$

9.4 Tích có hướng của hai véc tơ

9.4.3 Tính chất của tích có hướng

Cho u, v, và w là các vectơ và s,t là các hằng số, khi đó

1. $(sv)\times(tw) = st(v\times w)$
2. $u\times(v+w) = (u\times v)+(u\times w)$

   $(u+v)\times w = (u\times w)+(v\times w)$
3. $v\times w = -(w\times v)$
4. $v\times v = 0;\ w = sv \Rightarrow v\times w = 0$
5. $v\times 0 = 0\times v = 0$
6. $\|v\times w\|^2 = \|v\|^2\ \|w\|^2 - (v\cdot w)^2$
7. $u\times(v\times w) = (w\cdot u)v - (v\cdot u)w$

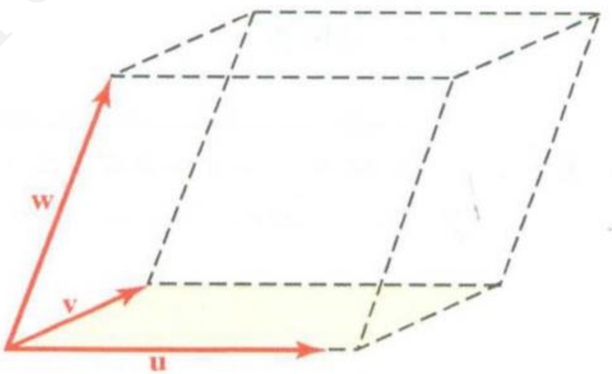
9.4 Tích có hướng của hai véc tơ

9.4.5 Tích hỗn tạp và thể tích

Định nghĩa: Tích hỗn tạp của ba véc tơ u, v, w là một số xác định bởi: (u x v) . w

Giả sử $u = a_1i + a_2j + a_3k$, $v = b_1i + b_2j + b_3k$, $w = c_1i + c_2j + c_3k$ thì ta có:

$$(u \times v) \cdot w = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$



Tính chất: Thể tích hình hộp dựng trên 3 véc tơ u, v và w

$$V = \left|(u \times v) \cdot w\right|$$

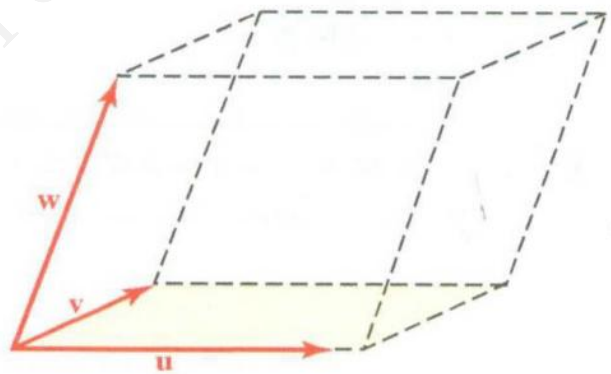
9.4 Tích có hướng của hai véc tơ

9.4.5 Tích hỗn tạp và thể tích

Định nghĩa: Tích hỗn tạp của ba véc tơ u, v, w là một số xác định bởi: (u x v) . w

Giả sử u = a_1i + a_2j + a_3k, v = b_1i + b_2j + b_3k, w = c_1i + c_2j + c_3k thì ta có:

$$(u \times v) \cdot w = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$



Tính chất: Thể tích hình hộp dựng trên 3 véc tơ u, v và w

$$V = \left|(u \times v) \cdot w\right|$$

9.4 Tích có hướng của hai véc tơ

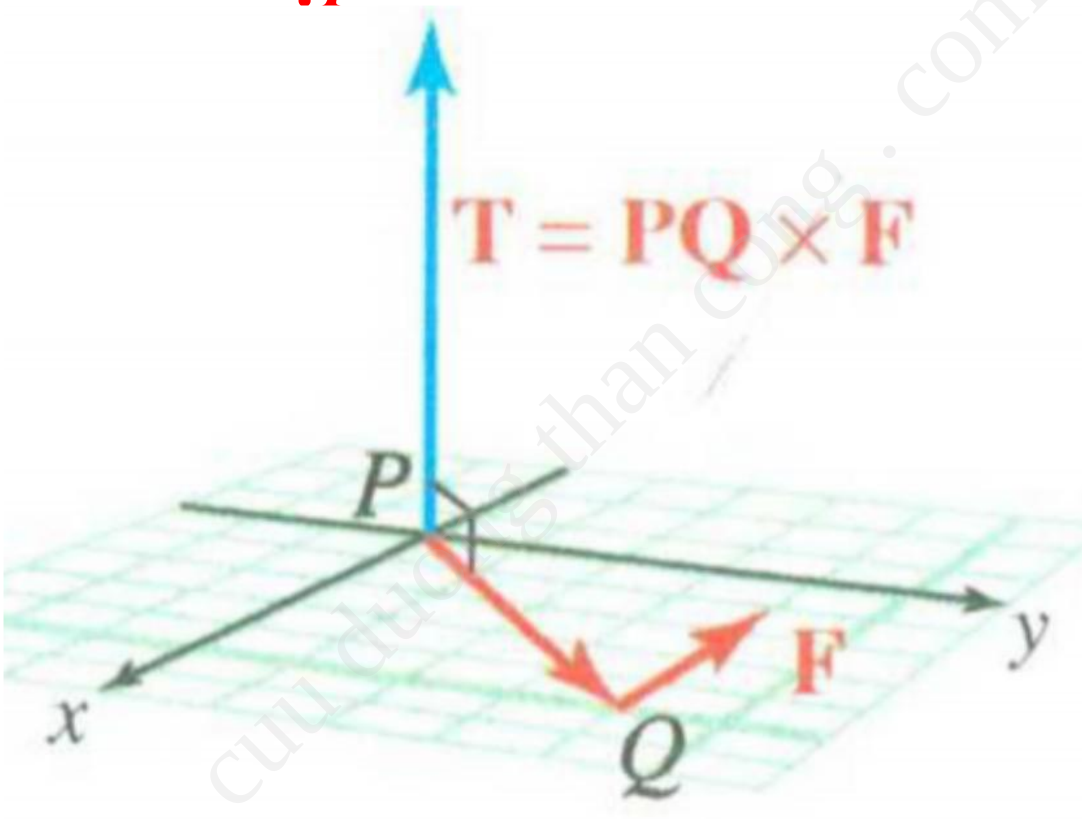
9.4.5 Tích hỗn tạp và thể tích

Mô men quay

Một ứng dụng vật lý hữu dụng của tích vô hướng liên quan đến moment quay. Giả sử lực F được đặt tại điểm Q. khi đó mô men quay của lực F quanh điểm P được định nghĩa là tích có hướng của véc tơ PQ với lực F như biểu diễn ở hình vẽ dưới đây:

9.4 Tích có hướng của hai véc tơ

9.4.5 Tích hỗn tạp và thể tích



Moment quay T của lực F tại Q quanh điểm P là T = PQ x F

9.4 Tích có hướng của hai véc tơ

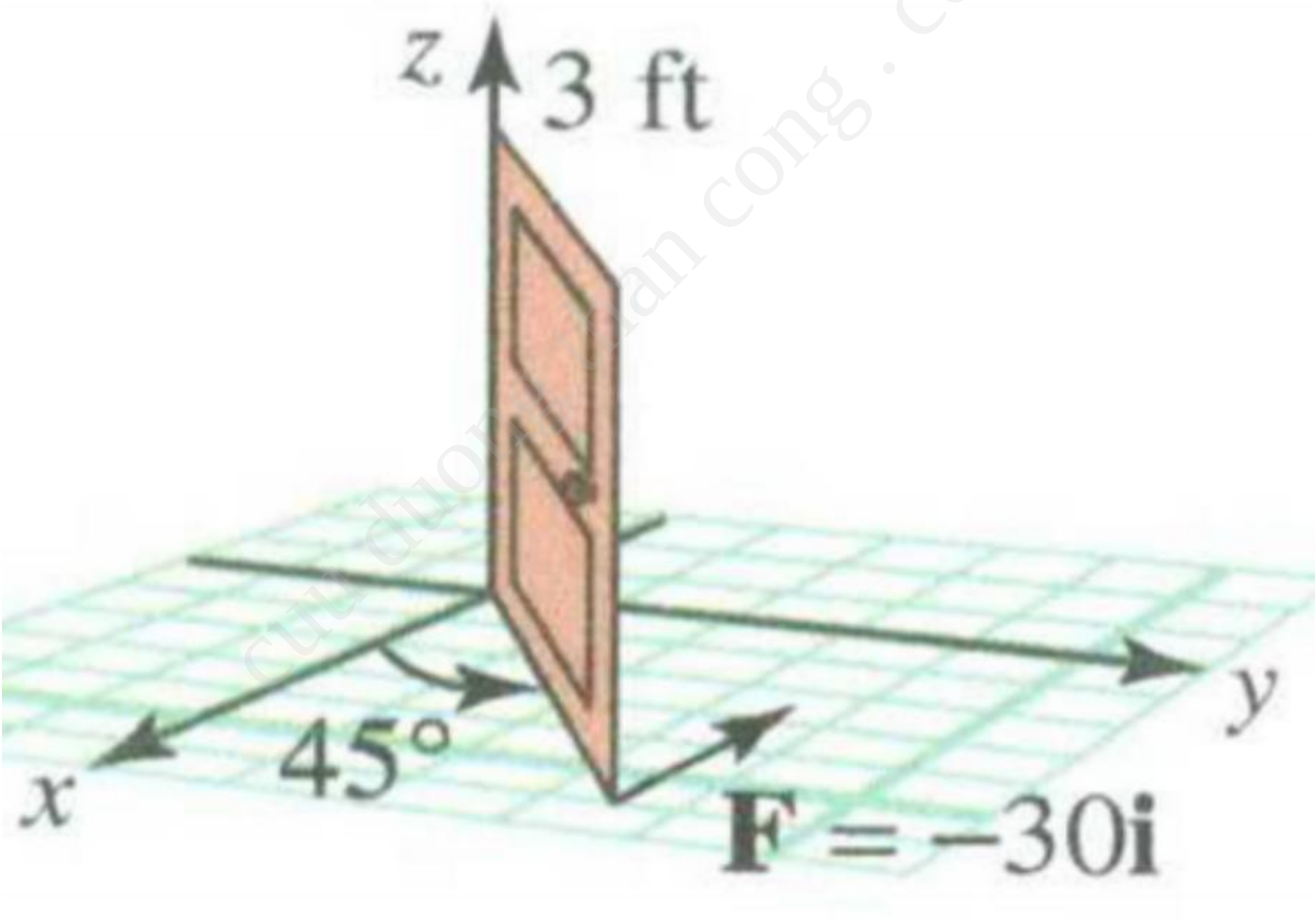
9.4.5 Tích hỗn tạp và thể tích

Ví dụ. Moment quay trên bản lề của một cánh cửa

Trên hình vẽ là một cánh cửa rộng 3 ft đang mở một nửa. Một lực nằm ngang có độ lớn 30 lb tác động vào cạnh một cánh cửa. Tìm moment quay của lực quanh bản lề của cánh cửa.

9.4 Tích có hướng của hai véc tơ

9.4.5 Tích hỗn tạp và thể tích



9.4 Tích có hướng của hai véc tơ

9.4.5 Tích hỗn tạp và thể tích

Giải:

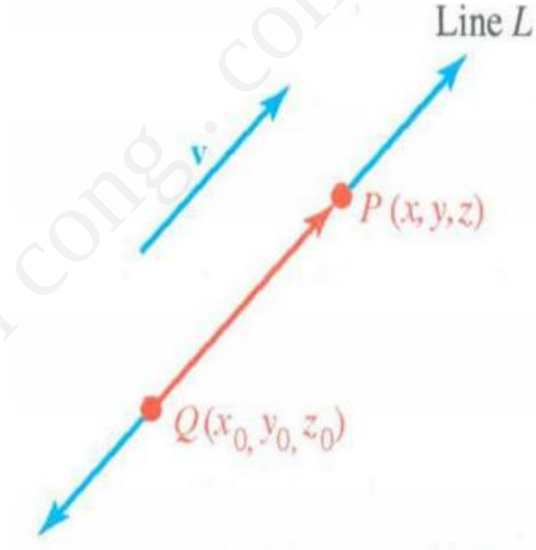
Ta có F = -30i và tạo với PQ một góc 45°

$$PQ = 3\left(\cos\frac{\pi}{4}i + \sin\frac{\pi}{4}j\right) = \frac{3\sqrt{2}}{2}i + \frac{3\sqrt{2}}{2}j$$

$$T = PQ \times F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{3\sqrt{2}}{2} & \frac{3\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -30 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 45\sqrt{2}\,k \quad (ft - lb)$$

9.5 Đường trong R³

9.5.1 Phương trình tham số đường thẳng trong R³



Dạng tham số của đường thẳng trong $\mathbb{R}^3$

Nếu L là đường thẳng chứa điểm $Q(x_0, y_0, z_0)$ *và được định phương bởi vecto* $v = Ai + Bj + Ck$*, thì điểm (x, y, z) thuộc L khi và chỉ khi tọa độ của nó thỏa mãn*

$$x - x_0 = tA \qquad y - y_0 = tB \qquad z - z_0 = tC$$

với số t nào đó.

9.5 Đường trong R^3

9.5.1 Phương trình tham số đường thẳng trong R^3

Ví dụ:

Viết phương trình tham số của đường thẳng chứa điểm (3, 1, 4) và được định phương bởi vectơ $v = -i + j - 2k$. Tìm giao điểm của đường thẳng này với các mặt phẳng tọa độ và vẽ đường thẳng.

Dạng đối xứng của đường thẳng trong $\mathbb{R}^3$

Nếu L là đường thẳng chứa điểm (x_0, y_0, z_0) *và được định phương bởi vectơ* $v = Ai + Bj + Ck$, *(A, B, và C là các số khác 0) thì điểm (x, y, z) thuộc L khi và chỉ khi tọa độ của nó thỏa mãn*

$$\frac{x - x_0}{A} = \frac{y - y_0}{B} = \frac{z - z_0}{C}$$

9.5 Đường trong R^3

9.5.2 Phương trình tham số

Xét f_1, f_2, f_3 là các hàm số liên tục theo biến t trên khoảng I, khi đó các phương trình

$$x = f_1(t),\ y = f_2(t),\ z = f_3(t)$$

*được gọi là các **phương trình tham số** (parametric equations) với **tham số** (parameter) là t. Khi t thay đổi trên **tập tham số** (parametric set) I, các điểm*

$$(x, y, z) = (f_1(t),\ f_2(t),\ f_3(t))$$

*vạch thành một **đường cong tham số** (parametric curve) trong $\mathbb{R}^3$.*

Nếu $z = f_3(t) = 0$ thì đường cong nằm trong mặt phẳng xy và ta nói đây là đường cong tham số trong $\mathbb{R}^2$.

9.5 Đường trong R^3

9.5.2 Phương trình tham số

Ví dụ:

1 Vẽ đường cong có phương trình tham số $x = t^2 - 9, \quad y = \frac{1}{3}t$ với $-3 \le t \le 2$.

.

HD: Cho t các giá trị nguyên từ -3 đến 2. Nối các điểm (x, y) tương ứng

2. Vẽ đường cong có phương trình tham số $x = \sin \pi t, y = \cos 2\pi t$ với $0 \le t \le 0.5$.

HD: Khử t từ hai phương trình.

9.5 Đường trong R^3

9.5.3 Tham số hóa một đường cong

Ví dụ **Tham số hóa hai đường cong**

Trong mỗi trường hợp sau, hãy tham số hóa đường cong được cho

a. $y = 9x^2$ b. $r = 5\cos^3\theta$ trong tọa độ cực

Giải

a. Cách thông thường để tham số hóa một parabol là gán tham số t cho biến được bình phương: $x = t, y = 9t^2$. Hoặc cũng có thể đặt $t = 3x$ để có $x = \frac{1}{3}t, \quad y = t^2$

b. Trong hệ tọa độ cực ta có $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$, vậy nên có thể tham số hóa x và y theo tham số θ:

$$x = r\cos\theta \qquad\qquad y = r\sin\theta$$

$$= \left(5\cos^3\theta\right)\cos\theta \qquad = \left(5\cos^3\theta\right)\sin\theta$$

$$= 5\cos^4\theta \qquad\qquad = 5\cos^3\theta\sin\theta$$

9.6 Mặt phẳng trong R^3

9.6.2 Phương pháp véc tơ để đo khoảng cách trong trong R^3

***Định lý*. Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng trong R^3**

Cho mặt phẳng có phương trình $Ax + By + Cz + D = 0$ và điểm $P(x_0,y_0,z_0)$ không thuộc mặt phẳng. Gọi d là khoảng cách từ P xuống mặt phẳng, khi đó

$$d = \frac{\left| Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$