Chương 8. Chuỗi số

Tóm tắt

Tiêu chuẩn so sánh 1

Hai chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n, \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ thoả điều kiện $0 \le a_n \le b_n, \forall n \ge n_0$

1) Nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ hội tụ, thì chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ hội tụ.

2) Nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ phân kỳ, thì chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ phân kỳ.

Chương 8. Chuỗi số

Tóm tắt

Tiêu chuẩn so sánh 2

Hai chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ (1) , $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ (2) thoả $0 < a_n < b_n, \forall n \geq n_0$

$$K = \lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n}$$

1) $K = 0$: Nếu chuỗi (2) hội tụ, thì chuỗi (1) hội tụ.

2) K hữu hạn, $\neq 0$: Chuỗi (1) và (2) cùng HT hoặc cùng PK

3) $K = +\infty$: Nếu chuỗi (1) HT, thì chuỗi (2) HT.

Chương 8. Chuỗi số

Ví dụ Khảo sát sự hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

Chuỗi dương $\frac{\cos^2 n}{n(n+1)} \leq \frac{1}{n(n+1)} \leq \frac{1}{n^2}$

Chọn chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$ hữu hạn, khác không.

Suy ra hai chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ cùng tính chất hội tụ.

Vì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ hội tụ, nên chuỗi đã cho hội tụ.

Chương 8. Chuỗi số

Ví dụ Tìm α để chuỗi HT $\sum_{n=1}^{\infty}(1-n\cdot\sin(1/n))^{\alpha}$

$$a_n=(1-n\cdot\sin(1/n))^{\alpha}\cong\left(1-n\cdot\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{3!n^3}\right)\right)^{\alpha}\cong\frac{1}{6^{\alpha}n^{2\alpha}}$$

Chuỗi đã cho hội tụ khi và chỉ khi $\alpha>\frac{1}{2}$

Ví dụ Tìm α để chuỗi HT $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\ln\sin\frac{1}{n}-\ln\frac{1}{n}\right)^{\alpha}$

$$a_n\cong\left(\ln\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{6n^3}\right)-\ln\frac{1}{n}\right)^{\alpha}\cong\left(\ln\left(1-\frac{1}{6n^2}\right)\right)^{\alpha}\cong\frac{1}{6^{\alpha}n^{2\alpha}}$$

Chuỗi đã cho hội tụ khi và chỉ khi $\alpha>\frac{1}{2}$

Chương 8. Chuỗi số

Ví dụ Tìm α để chuỗi HT $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n\sin(1/n)}-\cos(1/n)\right)^{\alpha}$

$$a_n \cong \left(\frac{1}{n(1/n-1/6n^3)}-\left(1-\frac{1}{2n^2}\right)\right)^{\alpha}$$

$$a_n \cong \left(\frac{1}{1-1/6n^2}-\left(1-\frac{1}{2n^2}\right)\right)^{\alpha}$$

$$a_n \cong \left(1+\frac{1}{6n^2}-\left(1-\frac{1}{2n^2}\right)\right)^{\alpha}=\frac{2^{\alpha}}{3^{\alpha}}\cdot\frac{1}{n^{2\alpha}}$$

Chuỗi đã cho hội tụ khi và chỉ khi $\alpha > \frac{1}{2}$

Chương 8. Chuỗi số

Ví dụ Tìm α để chuỗi HT $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(e-(1+1/n)^n\right)^{\alpha}}{\left(1-\cos(1/n)\right)^2}$

$$e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e-e^{n\ln(1+1/n)} \cong e-e^{n(1/n-1/2n^2)} = e-e^{1-1/2n}$$

$$= e-e.e^{-1/2n} \cong e-e\left(1-\frac{1}{2n}\right) = \frac{e}{2n}$$

$$\left(1-\cos(1/n)\right)^2 \cong \frac{1}{4n^2} \qquad \Rightarrow a_n \cong \frac{e^{\alpha}/2^{\alpha}n^{\alpha}}{4n^2} = \frac{e^{\alpha}}{2^{\alpha+2}n^{2-\alpha}}$$

Chuỗi đã cho hội tụ khi và chỉ khi $2-\alpha>1 \Leftrightarrow \alpha<1$

Chương 8. Chuỗi số

Ví dụ Khảo sát sự hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot n!}{n^n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

$$a_{n+1} = \frac{3^{n+1} \cdot (n+1)!}{(n+1)^{n+1}} = \frac{3 \cdot 3^n \cdot (n+1) \cdot n!}{(n+1)^n \cdot (n+1)} = \frac{3 \cdot 3^n \cdot n!}{(n+1)^n}$$

$$\Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3 \cdot 3^n \cdot n!}{(n+1)^n} \cdot \frac{n^n}{3^n \cdot n!} = \frac{3}{(1+1/n)^n} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{3}{e} > 1$$ Phân kỳ

Ví dụ Khảo sát sự hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} n^5 \left(\frac{3n+2}{4n+3} \right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n+2}{4n+3} \cdot \sqrt[n]{n^5} = \frac{3}{4} < 1$$ HT theo t/c Cô si.

Chương 8. Chuỗi số

Ví dụ Khảo sát sự hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

$$a_n = \frac{2\cdot5\cdot8\cdots(3n-1)}{1\cdot6\cdot11\cdots(5n-4)}$$

$$a_{n+1} = \frac{2\cdot5\cdot8\cdots(3(n+1)-1)}{1\cdot6\cdot11\cdots(5(n+1)-4)} = \frac{2\cdot5\cdot8\cdots(3n+2)}{1\cdot6\cdot11\cdots(5n+1)}$$

$$= \frac{2\cdot5\cdot8\cdots(3n-1)(3n+2)}{1\cdot6\cdot11\cdots(5n-4)(5n+1)} = a_n \cdot \frac{(3n+2)}{(5n+1)}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n+2}{5n+1} = \frac{3}{5} < 1$$

Chuỗi hội tụ theo tiêu chuẩn d'Alembert.

Chương 8. Chuỗi số

Ví dụ Khảo sát sự hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

$$a_n = \frac{2\cdot 5\cdot 8\cdots(3n+2)}{2^n\cdot(n+1)!}$$

$$a_{n+1} = \frac{2\cdot 5\cdot 8\cdots(3(n+1)+2)}{2^{n+1}\cdot(n+1+1)!} = \frac{2\cdot 5\cdot 8\cdots(3n+5)}{2^n\cdot 2\cdot(n+2)!}$$

$$= \frac{2\cdot 5\cdot 8\cdots(3n+2)\cdot(3n+5)}{2^n\cdot 2\cdot(n+1)!(n+2)} = a_n\cdot\frac{(3n+5)}{2(n+2)}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{3n+5}{2n+4} = \frac{3}{2} > 1$$

Chuỗi phân kỳ theo tiêu chuẩn d'Alembert.

Chương 8. Chuỗi số

Ví dụ Khảo sát sự hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\alpha}}{(\ln(n+1))^{n/2}}, \alpha > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^{\alpha}}{(\ln(n+1))^{n/2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{\ln(n+1)}} = 0 < 1$$

Chuỗi hội tụ theo tiêu chuẩn Cô si với mọi α

Ví dụ Khảo sát sự hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\cos \frac{1}{\sqrt{n}} \right)^{n^3}$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\cos \frac{1}{n} \right)^{n^3}} = \lim_{n\to\infty} \left(\cos \frac{1}{n} \right)^{n^2} = \lim_{n\to\infty} \left[\left(1 - \frac{1}{2n^2} \right)^{\frac{-2n^2}{1}} \right]^{\frac{-1}{2n^2} \cdot n^2}$$

$$= e^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{e}} < 1$$ Hội tụ theo Cô si.