Mục lục

Chương 10

Hàm véctơ

10.1 Giới thiệu về hàm véctơ

TRONG PHẦN NÀY: Hàm giá trị véctơ, các phép toán với hàm véctơ, giới hạn và sự liên tục của hàm véctơ

10.1.1 Hàm giá trị véctơ

Định nghĩa 10.1.1 (Hàm giá trị véctơ)**.** Một **hàm có giá trị véctơ** (hoặc, ngắn gọn là **hàm véctơ**) $\mathbf{F}$ của một biến thực có miền xác định D là một qui tắc cho tương ứng với mỗi số t trong D một véctơ duy nhất $\mathbf{F}(t)$. Tập hợp tất cả các véctơ $\mathbf{v}$ có dạng $\mathbf{v} = \mathbf{F}(t)$ với t thuộc D là miền giá trị của $\mathbf{F}$. Tức là,

$$\mathbf{F}(t) = f_1(t)\mathbf{i} + f_2(t)\mathbf{j} \qquad \text{mặt phẳng}(\mathbb{R}^2)$$
$$\mathbf{F}(t) = f_1(t)\mathbf{i} + f_2(t)\mathbf{j} + f_3(t)\mathbf{k} \qquad \text{không gian}(\mathbb{R}^3)$$

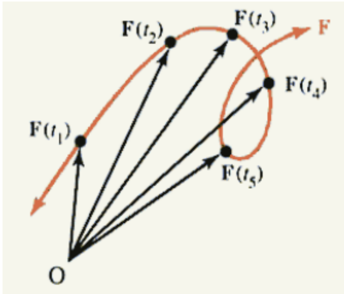
với f_1, f_2 và f_3 là các hàm giá trị thực (**giá trị vô hướng**) của biến thực t được định nghĩa trên tập xác định D. Trong hoàn cảnh này, f_1, f_2 và f_3 được gọi là các **thành phần** của $\mathbf{F}$. Một hàm véctơ còn có thể được kí hiệu là $\mathbf{F}(t) = \langle f_1(t), f_2(t)\rangle$ hoặc $\mathbf{F}(t) = \langle f_1(t), f_2(t), f_3(t)\rangle$.

Ví dụ 10.1.1.
$$\mathbf{F}(t) = (t^2)\mathbf{i} + (3t)\mathbf{j} + (\cos 2t)\mathbf{k}, t \in \mathbb{R}.$$

Cho $\mathbf{F}$ là một hàm véctơ, và giả sử điểm đầu của véctơ $\mathbf{F}(t)$ là tại gốc tọa độ. Đồ thị của $\mathbf{F}$ là đường cong được tạo ra bởi các điểm cuối của véctơ $\mathbf{F}(t)$ khi t thay đổi trên toàn miền xác định D (xem hình 10.1). Trong trường hợp này, $\mathbf{F}(t)$ được gọi là **véctơ vị trí** tại t cho điểm $P(f_1(t), f_2(t), f_3(t))$ trên C.

Ví dụ 10.1.2.[Đồ thị của một hàm véctơ] Vẽ đồ thị của hàm véctơ

$$\mathbf{F}(t) = (3-t)\mathbf{i} + (2t)\mathbf{j} + (3t-4)\mathbf{k}$$

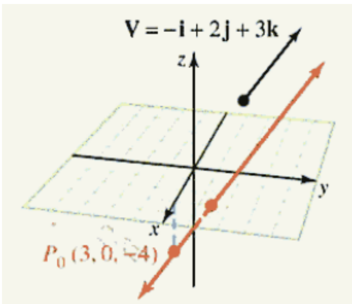


Hình 10.1: Đồ thị của hàm véctơ $\mathbf{F}(t)$ được vẽ ra bởi điểm kết thúc của $\mathbf{F}(t)$ khi t thay đổi trong miền xác định D.

Giải. Đồ thị là tập hợp tất cả các điểm (x, y, z) với

$$x = 3 - t \qquad y = 2t \qquad z = -4 + 3t; t \in \mathbb{R}.$$

Đây chính là các phương trình tham số cho đường thẳng trong không gian mà đi qua điểm $P_0(3, 0, -4)$ và song song với véctơ $\mathbf{V} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$.



Hình 10.2: Đồ thị của $\mathbf{F}$

$\square$

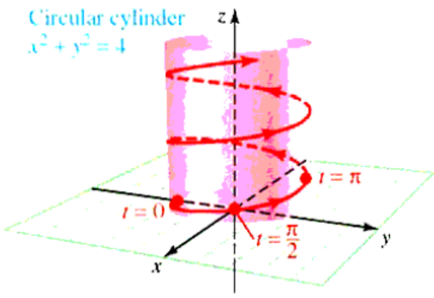
Ví dụ 10.1.3.[Đồ thị của một helix tròn] Vẽ đồ thị của hàm véctơ

$$\mathbf{F}(t) = (2\sin t)\mathbf{i} - (2\cos t)\mathbf{j} + (3t)\mathbf{k}$$

Giải. Đồ thị của $\mathbf{F}$ là tập hợp tất cả các điểm (x, y, z) trong không gian có tọa độ thỏa mãn

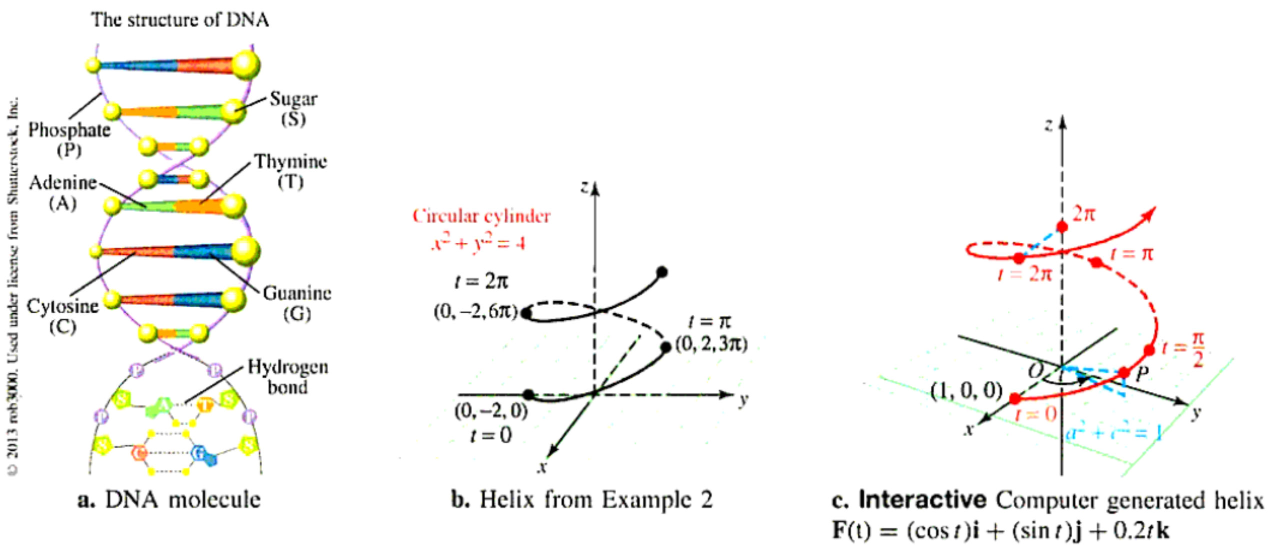
$$x = 2\sin t \qquad y = -2\cos t \qquad z = 3t$$

với mọi t. Hai thành phần đầu thỏa mãn $x^2 + y^2 = 4$ nên đồ thị nằm trên mặt của hình trụ tròn có bán kính 2. Chú ý rằng trục đối xứng của đồ thị là trục z. Ta cũng biết khi t tăng thì tọa độ z của các điểm nằm trên đồ thị tăng theo công thức $z = 3t$, nghĩa là các điểm (x, y, z) trên đồ thị tăng theo hình xoắn ốc trên mặt của hình trụ $x^2 + y^2 = 4$. Đồ thị xoắn ốc đi lên ngược chiều kim đồng hồ và được gọi là **helix tròn phải**.



Hình 10.3: Đồ thị của một helix

Một ví dụ nổi tiếng của helix là phân tử ADN, có cấu trúc là 2 helix xoắn với nhau.



Hình 10.4: Ví dụ về một số helix

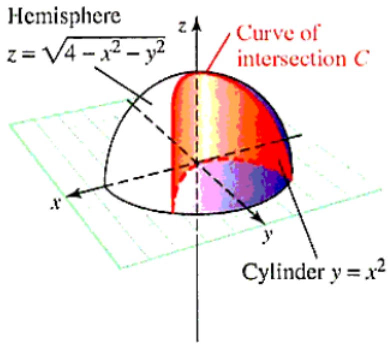
□

Ví dụ 10.1.4.[Tìm một hàm véctơ] Tìm một hàm véctơ **F** mà có đồ thị là phần giao của nửa mặt cầu $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ và hình trụ parabol $y = x^2$ như trong hình.

Giải. Có nhiều cách để **tham số hóa một đường cong**, một trong số đó là cho $x = t$. Thế $y = t^2$ (từ phương trình của hình trụ parabol), và bằng cách thế vào phương trình của nữa mặt cầu, ta tìm được $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2} = \sqrt{4 - t^2 - t^4}$. Một công thức cho hàm véctơ của đồ thị được cho là

$$\mathbf{F} = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + \sqrt{4 - t^2 - t^4}\mathbf{k}$$

□



Hình 10.5: Đường cong giao của nửa mặt cầu và hình trụ

10.1.2 Các phép toán

Định nghĩa 10.1.2 (Các phép toán với hàm véctơ)**.** Cho $\mathbf{F}$ và $\mathbf{G}$ là các hàm véctơ của biến thực t, và cho f là một hàm vô hướng. Khi đó, $\mathbf{F}+\mathbf{G}$, $\mathbf{F}-\mathbf{G}$, $f\mathbf{F}$ và $\mathbf{F}\times\mathbf{G}$ là các hàm véctơ, và $\mathbf{F}\cdot\mathbf{G}$ là một hàm vô hướng. Những phép toán này được định nghĩa như sau
Hàm véctơ:

$$(\mathbf{F}+\mathbf{G})(t)=\mathbf{F}(t)+\mathbf{G}(t) \quad (\mathbf{F}-\mathbf{G})(t)=\mathbf{F}(t)-\mathbf{G}(t)$$
$$(f\mathbf{F})(t)=f(t)\mathbf{F}(t) \quad (\mathbf{F}\times\mathbf{G})(t)=\mathbf{F}(t)\times\mathbf{G}(t)$$

Hàm vô hướng: $(\mathbf{F}\cdot\mathbf{G})(t)=\mathbf{F}(t)\cdot\mathbf{G}(t)$
Các phép toán này được định nghĩa trên giao của tập xác định của các hàm véctơ và hàm vô hướng xuất hiện trong định nghĩa.

Ví dụ 10.1.5.[Các phép tính với hàm véctơ] Cho $\mathbf{F}(t)=t^2\mathbf{i}+t\mathbf{j}-(\sin t)\mathbf{k}$ và $\mathbf{G}(t)=t\mathbf{i}+\frac{1}{t}\mathbf{j}+5\mathbf{k}$. Tìm
a. $(\mathbf{F}+\mathbf{G})(t)$ b. $(e^t\mathbf{F})(t)$ c. $(\mathbf{F}\times\mathbf{G})(t)$ d. $(\mathbf{F}\cdot\mathbf{G})(t)$

10.1.3 Giới hạn và liên tục

Định nghĩa 10.1.3 (Giới hạn của một hàm véctơ)**.** Giả sử các thành phần f_1, f_2, f_3 của hàm véctơ

$$\mathbf{F}(t)=f_1(t)\mathbf{i}+f_2(t)\mathbf{j}+f_3(t)\mathbf{k}$$

đều có giới hạn khi $t\to t_0$, với t_0 là số bất kì hoặc ∞ hoặc $-\infty$. Khi đó giới hạn của $\mathbf{F}$ khi $t\to t_0$ là véctơ

$$\lim_{t\to t_0}\mathbf{F}(t)=\left[\lim_{t\to t_0}f_1(t)\right]\mathbf{i}+\left[\lim_{t\to t_0}f_2(t)\right]\mathbf{j}+\left[\lim_{t\to t_0}f_3(t)\right]\mathbf{k}$$

Ví dụ 10.1.6.[Giới hạn của một hàm véctơ] Tìm $\lim_{t\to 2}\mathbf{F}(t)$, với $\mathbf{F}(t)=(t^2-3)\mathbf{i}+e^t\mathbf{j}+(\sin\pi t)\mathbf{k}$.

Giải.

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 2}\mathbf{F}(t) &= \left[\lim_{t\to 2}(t^2-3)\right]\mathbf{i} + \left[\lim_{t\to 2}e^t\right]\mathbf{j} + \left[\lim_{t\to 2}(\sin \pi t)\right]\mathbf{k}\\ &= \mathbf{i} + e^2\mathbf{j}\end{aligned}$$

□

Định lý 10.1.1 (Các qui tắc về giới hạn véctơ)**.** *Nếu các hàm véctơ* $\mathbf{F}$ *và* $\mathbf{G}$ *là các hàm của biến thực* t *và* $h(t)$ *là một hàm vô hướng sao cho cả 3 hàm đều có giới hạn hữu hạn khi* $t \to t_0$*, thì*

Giới hạn của tổng $\lim_{t\to t_0}[\mathbf{F}(t)+\mathbf{G}(t)] = \lim_{t\to t_0}\mathbf{F}(t) + \lim_{t\to t_0}\mathbf{G}(t)$

Giới hạn của hiệu $\lim_{t\to t_0}[\mathbf{F}(t)-\mathbf{G}(t)] = \lim_{t\to t_0}\mathbf{F}(t) - \lim_{t\to t_0}\mathbf{G}(t)$

Giới hạn của phép nhân vô hướng $\lim_{t\to t_0}[h(t)\mathbf{F}(t)] = \left[\lim_{t\to t_0}h(t)\right]\left[\lim_{t\to t_0}\mathbf{F}(t)\right]$

Giới hạn của tích vô hướng $\lim_{t\to t_0}[\mathbf{F}(t)\cdot\mathbf{G}(t)] = \left[\lim_{t\to t_0}\mathbf{F}(t)\right]\cdot\left[\lim_{t\to t_0}\mathbf{G}(t)\right]$

Giới hạn của tích có hướng $\lim_{t\to t_0}[\mathbf{F}(t)\times\mathbf{G}(t)] = \left[\lim_{t\to t_0}\mathbf{F}(t)\right]\times\left[\lim_{t\to t_0}\mathbf{G}(t)\right]$

Các công thức giới hạn này cũng áp dụng được khi $t\to\infty$ *hoặc khi* $t\to-\infty$*, với điều kiện là tất cả các biểu thức đều có giới hạn hữu hạn.*

Ví dụ 10.1.7.[Giới hạn của tích có hướng] Chứng minh rằng $\lim_{t\to 1}[\mathbf{F}(t)\times\mathbf{G}(t)] = \left[\lim_{t\to 1}\mathbf{F}(t)\right]\times\left[\lim_{t\to 1}\mathbf{G}(t)\right]$ với các hàm véctơ
$\mathbf{F}(t) = t\mathbf{i} + (1-t)\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$ và $\mathbf{G}(t) = e^t\mathbf{i} - (3+e^t)\mathbf{k}$.

Định nghĩa 10.1.4 (Sự liên tục của hàm véctơ)**.** Một hàm véctơ $\mathbf{F}$ được gọi là liên tục tại t_0 nếu t_0 nằm trong miền xác định của $\mathbf{F}$ và $\lim_{t\to t_0}\mathbf{F}(t) = \mathbf{F}(t_0)$.

Chú ý 10.1.2. Điều này giống với việc yêu cầu mỗi thành phần của $\mathbf{F}$ liên tục tại t_0. Tức là

$$\mathbf{F}(t) = f_1(t)\mathbf{i} + f_2(t)\mathbf{j} + f_3(t)\mathbf{k}$$

liên tục tại t_0 khi t_0 nằm trong miền xác định của các hàm thành phần $f_1(t)$, $f_2(t)$, và $f_3(t)$ và

$$\lim_{t\to t_0}f_1(t) = f_1(t_0); \lim_{t\to t_0}f_2(t) = f_2(t_0); \lim_{t\to t_0}f_3(t) = f_3(t_0)$$

Ví dụ 10.1.8.[Sự liên tục của một hàm véctơ] Với những giá trị nào của t thì $\mathbf{F}(t) = (\sin t)\mathbf{i} + (1-t)^{-1}\mathbf{j} + (\ln t)\mathbf{k}$ liên tục?

Giải. Hàm véctơ $\mathbf{F}$ liên tục khi và chỉ khi các hàm thành phần

$$f_1(t) = \sin t \qquad f_2(t) = (1-t)^{-1} \qquad f_3(t) = \ln t$$

liên tục. Hàm f_1 liên tục với mọi t; f_2 liên tục khi $1-t\neq 0$; f_3 liên tục với $t>0$. Vậy $\mathbf{F}$ liên tục khi $t>0, t\neq 1$. □

10.2 Đạo hàm và tích phân của hàm véctơ

TRONG PHẦN NÀY: Đạo hàm véctơ, véctơ tiếp tuyến, tính chất của véctơ tiếp tuyến, mô hình chuyển động của một vật thể trong $\mathbb{R}^3$, tích phân véctơ

10.2.1 Đạo hàm và các tính chất

Định nghĩa 10.2.1 (Đạo hàm của một hàm véctơ)**.** Đạo hàm của hàm véctơ $\mathbf{F}$ là hàm véctơ $\mathbf{F}'$ được xác định bởi giới hạn

$$\mathbf{F}'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{F}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{F}(t + \Delta t) - \mathbf{F}(t)}{\Delta t}$$

khi giới hạn này tồn tại. Theo kí hiệu Leibniz thì đạo hàm của $\mathbf{F}$ được kí hiệu là $\dfrac{d\mathbf{F}}{dt}$. Ta nói rằng hàm véctơ $\mathbf{F}$ khả vi tại $t = t_0$ nếu $\mathbf{F}'(t)$ xác định tại t_0.

Định lý 10.2.1 (Đạo hàm của một hàm véctơ)**.** *Hàm véctơ* $\mathbf{F}(t) = f_1(t)\mathbf{i} + f_2(t)\mathbf{j} + f_3(t)\mathbf{k}$ *khả vi khi các hàm thành phần* f_1, f_2 *và* f_3 *đều khả vi và trong trường hợp này*

$$\mathbf{F}'(t) = f_1'(t)\mathbf{i} + f_2'(t)\mathbf{j} + f_3'(t)\mathbf{k}$$

Ví dụ 10.2.1.[Sự khả vi của một hàm véctơ] Với các giá trị nào của t thì $\mathbf{G}(t) = |t|\mathbf{i} + (\cos t)\mathbf{j} + (t - 5)\mathbf{k}$ khả vi?

Giải. Các hàm thành phần $\cos t$ và $t - 5$ khả vi với mọi t, nhưng $|t|$ thì không khả vi tại $t = 0$. Do đó $\mathbf{G}$ khả vi với mọi $t \neq 0$. □

Ví dụ 10.2.2.[Đạo hàm của một hàm véctơ] Tìm đạo hàm của hàm véctơ

$$\mathbf{F}(t) = e^t\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j} + (t^3 + 5t)\mathbf{k}$$

Chứng minh. Lấy đạo hàm từng thành phần riêng biệt, ta được

$$\mathbf{F}'(t) = e^t\mathbf{i} + (\cos t)\mathbf{j} + (3t^2 + 5)\mathbf{k}$$

□

Các tính chất của đạo hàm véctơ

Các đạo hàm cấp cao hơn của hàm véctơ $\mathbf{F}$ có được bằng cách đạo hàm lần lượt các thành phần của $\mathbf{F}(t) = f_1(t)\mathbf{i} + f_2(t)\mathbf{j} + f_3(t)\mathbf{k}$. Ví dụ như, đạo hàm cấp hai của $\mathbf{F}$ là hàm véctơ

$$\mathbf{F}''(t) = [\mathbf{F}'(t)]' = f_1''(t)\mathbf{i} + f_2''(t)\mathbf{j} + f_3''(t)\mathbf{k}$$

Theo kí hiệu Leibniz thì đạo hàm cấp hai của $\mathbf{F}$ theo t được kí hiệu là $\dfrac{d^2\mathbf{F}}{dt^2}$, và đạo hàm cấp ba là $\dfrac{d^3\mathbf{F}}{dt^3}$.

Ví dụ 10.2.3.[Đạo hàm cấp cao của hàm véctơ] Tìm các đạo hàm cấp 2 và 3 của hàm véctơ

$$\mathbf{F}(t) = e^{2t}\mathbf{i} + (1 - t^2)\mathbf{j} + (\cos 2t)\mathbf{k}$$

Định lý 10.2.2 (Các qui tắc đạo hàm hàm véctơ). *Nếu các hàm véctơ* $\mathbf{F}$ *và* $\mathbf{G}$ *và hàm vô hướng* h *khả vi tại* t*, thì* $a\mathbf{F} + b\mathbf{G}$*,* $h\mathbf{F}$*,* $\mathbf{F} \cdot \mathbf{G}$ *và* $\mathbf{F} \times \mathbf{G}$ *cũng khả vi tại* t *và*

Luật tuyến tính	$(a\mathbf{F} + b\mathbf{G})'(t) = a\mathbf{F}'(t) + b\mathbf{G}'(t)$ *với các hằng số* a, b.
Luật nhân vô hướng	$(h\mathbf{F})'(t) = h'(t)\mathbf{F}(t) + h(t)\mathbf{F}'(t)$
Luật tích vô hướng	$(\mathbf{F} \cdot \mathbf{G})'(t) = (\mathbf{F}' \cdot \mathbf{G})(t) + (\mathbf{F} \cdot \mathbf{G}')(t)$
Luật tích có hướng	$(\mathbf{F} \times \mathbf{G})'(t) = (\mathbf{F}' \times \mathbf{G})(t) + (\mathbf{F} \times \mathbf{G}')(t)$
Luật dây chuyền	$[\mathbf{F}(h(t))]' = h'(t)\mathbf{F}'(h(t))$

Ví dụ 10.2.4.[Tìm tích có hướng] Cho $\mathbf{F}(t) = \mathbf{i} + t\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$ và $\mathbf{G}(t) = t\mathbf{i} + e^t\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$. Hãy kiểm tra rằng

$$(\mathbf{F} \times \mathbf{G})'(t) = (\mathbf{F}' \times \mathbf{G})(t) + (\mathbf{F} \times \mathbf{G}')(t)$$

Ví dụ 10.2.5.[Đạo hàm của các biểu thức hàm véctơ] Cho $\mathbf{F}(t) = \mathbf{i} + e^t\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$ và $\mathbf{G}(t) = 3t^2\mathbf{i} + e^{-t}\mathbf{j} - 2t\mathbf{k}$. Tìm

a. $\dfrac{d}{dt}[2\mathbf{F}(t) + t^3\mathbf{G}(t)]$ b. $\dfrac{d}{dt}[\mathbf{F}(t) \cdot \mathbf{G}(t)$

Định lý 10.2.3 (Sự vuông góc của một hàm có độ dài hằng số và đạo hàm của nó). *Nếu hàm véctơ khác không* $\mathbf{F}$ *khả vi và có độ dài là hằng số thì* $\mathbf{F}(t)$ *vuông góc với véctơ đạo hàm* $\mathbf{F}'(t)$.

10.2.2 Véctơ tiếp xúc

Cho t là một số trong miền xác định của hàm véctơ $\mathbf{F}(t)$, và P_0 là một điểm trên đồ thị của $\mathbf{F}$ tương ứng với t_0. Với bất kỳ số dương Δt nào thì tỷ sai phân

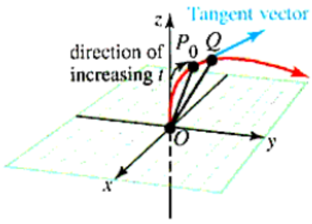
$$\frac{\Delta\mathbf{F}}{\Delta t} = \frac{\mathbf{F}(t_0 + \Delta t) - \mathbf{F}(t_0)}{\Delta t}$$

là một véc tơ cùng hướng với véctơ cát tuyến $\mathbf{P_0Q} = \mathbf{F}(t_0 + \Delta t) - \mathbf{F}(t_0)$ với Q là điểm trên đồ thị của $\mathbf{F}$ tương ứng với $t = t_0 + \Delta t$. Giả sử tỷ sai phân $\Delta\mathbf{F}/\Delta t$ có giới hạn khi $\Delta t \to 0$ và

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\mathbf{F}}{\Delta t} \neq \mathbf{0}$$

Thế thì, khi $\Delta t \to 0$ hướng của véctơ cát tuyến $\mathbf{P_0Q} = \mathbf{F}$ sẽ tiến đến hướng của véctơ tiếp tuyến tại P_0.

Định nghĩa 10.2.2 (Véctơ tiếp tuyến). Giả sử $\mathbf{F}(t)$ khả vi tại t_0 và $\mathbf{F}'(t_0) \neq 0$. Khi đó $\mathbf{F}'(t_0)$ là một **véctơ tiếp tuyến** với đồ thị của $\mathbf{F}(t)$ tại điểm mà $t = t_0$ và chỉ theo hướng tăng của t.



Hình 10.6: Khi $\Delta t \to 0$, véctơ $\mathbf{P_0Q}$ và do đó tỷ sai phân $\Delta\mathbf{F}/\Delta t$ tiến đến véctơ tiếp tuyến tại P_0.

Ví dụ 10.2.6.[Tìm một véctơ tiếp tuyến] Tìm một véctơ tiếp tuyến tại điểm P_0 ứng với $t = 0.2$ trên đồ thị của hàm véctơ

$$\mathbf{F}(t) = e^{2t}\mathbf{i} + (t^2 - t)\mathbf{j} + (\ln t)\mathbf{k}$$

Giải. Đạo hàm của $\mathbf{F}(t)$ là

$$\mathbf{F}'(t) = 2e^{2t}\mathbf{i} + (2t - 1)\mathbf{j} + (t^{-1})\mathbf{k}$$

do đó véctơ tiếp tuyến tại điểm có $t = 0.2$ là

$$\mathbf{F}'(0.2) = 2e^{0.4}\mathbf{i} - 0.6\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$$

Vì

$$\mathbf{F}(0.2) = e^{0.4}\mathbf{i} - 0.16\mathbf{j} + (\ln 0.2)\mathbf{k}$$

nên tọa độ tiếp điểm là $(e^{0.4}, -0.16, \ln 0.2)$. Do đó, tiếp tuyến có phương trình tham số

$$x = e^{0.4} + 2e^{0.4}t, \qquad y = -0.16 - 0.6t \qquad z = \ln 0.2 + 5t$$

□

Định nghĩa 10.2.3 (Đường cong trơn). Đồ thị của hàm véctơ xác định bởi $\mathbf{F}(t)$ là **trơn** trên mọi khoảng chứa t mà $\mathbf{F}'$ liên tục và $\mathbf{F}'(t) \neq 0$. Đồ thị là **trơn từng khúc** trên một khoảng nếu như ta có thể chia khoảng đó thành hữu hạn những khoảng con mà trên đó $\mathbf{F}$ trơn.

Ví dụ 10.2.7.(Xác định xem một đường cong có trơn hay không) Xác định xem đồ thị của hàm véctơ

$$\mathbf{F}(t) = \langle t^2 + 1, \cos t, e^t + e^{-t} \rangle$$

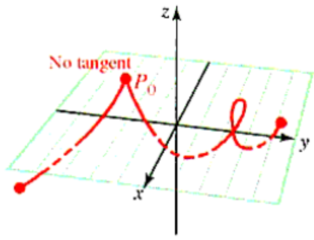
có trơn với mọi t không?

Giải. Đạo hàm

$$\mathbf{F}'(t) = \langle 2t, -\sin t, e^t - e^{-t}\rangle$$

liên tục với mọi t, nhưng $\mathbf{F}'(0) = \langle 0, 0, 0\rangle$. Do đó, đồ thị không trơn với mọi t mà chỉ trơn trên những khoảng không có chứa $t = 0$. $\square$

Chú ý 10.2.4. Một đồ thị sẽ không trơn trên một khoảng nếu nó có chứa một điểm mà tại đó có sự đổi hướng đột ngột. Ví dụ như đồ thị trong hình dưới là không trơn trên bất kỳ khoảng nào mà có chứa điểm tương ứng với góc nhọn. Trong ví dụ vừa rồi, điểm như vậy xảy ra khi $t = 0$, tức là $P_0(1, 1, 2)$. Đường cong trong hình chỉ trơn từng khúc vì ta có thể chia nó làm 2 phần mà mỗi phần là một đường cong trơn.



Hình 10.7: Một đường cong không trơn

10.2.3 Tích phân

Định nghĩa 10.2.4 (Tích phân véctơ)**.** Cho $\mathbf{F}(t) = f_1(t)\mathbf{i} + f_2(t)\mathbf{j} + f_3(t)\mathbf{k}$, với f_1, f_2 và f_3 là các hàm liên tục trên khoảng đóng $a \leq t \leq b$. Khi đó **tích phân bất định** của $\mathbf{F}$ là hàm véctơ

$$\int \mathbf{F}(t)dt = \left[\int f_1(t)dt\right]\mathbf{i} + \left[\int f_2(t)dt\right]\mathbf{j} + \left[\int f_3(t)dt\right]\mathbf{k} + \mathbf{C}$$

với $\mathbf{C} = C_1\mathbf{i} + C_2\mathbf{j} + C_3\mathbf{k}$ là một véctơ hằng số bất kì. **Tích phân xác định** của $\mathbf{F}$ trên $a \leq t \leq b$ là véctơ

$$\int_a^b \mathbf{F}(t)dt = \left[\int_a^b f_1(t)dt\right]\mathbf{i} + \left[\int_a^b f_2(t)dt\right]\mathbf{j} + \left[\int_a^b f_3(t)dt\right]\mathbf{k}$$

Ví dụ 10.2.8.[Tích phân của một hàm véctơ] Tìm $\int_0^\pi [t\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - (\sin t)\mathbf{k}]\, dt$

Giải.

$$\begin{aligned}\int_0^\pi [t\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - (\sin t)\mathbf{k}]\, dt &= \left[\int_0^\pi tdt\right]\mathbf{i} + \left[\int_0^\pi 3dt\right]\mathbf{j} - \left[\int_0^\pi \sin tdt\right]\mathbf{k}] \\ &= \frac{1}{2}\pi^2\mathbf{i} + 3\pi\mathbf{j} - 2\mathbf{k}\end{aligned}$$

$\square$

Ví dụ 10.2.9.[Vị trí của một vật cho bởi vận tốc của nó] Vận tốc của một hạt đang chuyển động trong không gian là

$$\mathbf{V}(t) = e^t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + (\cos 2t)\mathbf{k}$$

Hãy tìm hàm vị trí của hạt theo t nếu vị trí tại thời điểm $t = 0$ là $\mathbf{R}(0) = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$.

Chứng minh. Ta cần giải bài toán điều kiện đầu bao gồm:
Phương trình vi phân: $\mathbf{V}(t) = \dfrac{d\mathbf{R}}{dt} = e^t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + (\cos 2t)\mathbf{k}$
Điều kiện đầu: $\mathbf{R}(0) = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$
Lấy tích phân cả 2 vế của phương trình vi phân theo t

$$\begin{aligned}\int d\mathbf{R} &= \left[\int e^t\right]\mathbf{i} + \left[\int t^2\right]\mathbf{j} + \left[\int (\cos 2t)\right]\mathbf{k} \\ \mathbf{R}(t) &= e^t\mathbf{i} + \frac{1}{3}t^3\mathbf{j} + \frac{1}{2}\sin 2t\mathbf{k} + C_1\mathbf{i} + C_2\mathbf{j} + C_3\mathbf{k}\end{aligned}$$

Bây giờ dùng điều kiện đầu để tìm C ta được $\mathbf{C} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$. Do đó, vị trí của hạt tại thời điểm t là

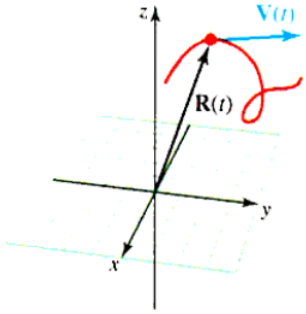
$$\mathbf{R}(t) = (e^t + 1)\mathbf{i} + \left(\frac{1}{3}t^3 + 1\right)\mathbf{j} + \left(\frac{1}{2}\sin 2t - 1\right)\mathbf{k}$$

□

10.2.4 Mô hình chuyển động của một vật trong $\mathbb{R}^3$

Định nghĩa 10.2.5 (Chuyển động véctơ)**.** Một vật chuyển động sao cho vị trí của nó tại thời điểm t được cho bởi hàm véctơ $\mathbf{R}(t)$ được nói là có
Véctơ vị trí, $\mathbf{R}(t)$, và
Vận tốc, $\mathbf{V} = \dfrac{d\mathbf{R}}{dt}$
Tại thời điểm t bất kỳ,
Tốc độ là $\|\mathbf{V}\|$, là độ lớn của vận tốc.
Hướng chuyển động là véctơ đơn vị $\dfrac{\mathbf{V}}{\|\mathbf{V}\|}$, và
Véctơ gia tốc là đạo hàm của vận tốc

$$\mathbf{A} = \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2}$$



Hình 10.8: Véctơ vận tốc tiếp xúc với quĩ đạo của chuyển động

Ví dụ 10.2.10.[Tốc độ và hướng của hạt] Vị trí của 1 hạt tại thời điểm t được xác định bởi véctơ

$$\mathbf{R}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$$

Hãy phân tích chuyển động của hạt. Cụ thể hơn, hãy tìm vận tốc của hạt, tốc độ, gia tốc, và hướng của chuyển động tại thời điểm $t = 2$.

Giải.

$$\mathbf{V} = \frac{d\mathbf{R}}{dt} = (-\sin t)\mathbf{i} + (\cos t)\mathbf{j} + 3t^2\mathbf{k}$$

$$\mathbf{A} = \frac{d\mathbf{V}}{dt} = (-\cos t)\mathbf{i} - (\sin t)\mathbf{j} + 6t\mathbf{k}$$

Vận tốc tại $t = 2$ là $\mathbf{V}(2)$: $(-\sin 2)\mathbf{i} + (\cos 2)\mathbf{j} + 3(2^2)\mathbf{k}$
Gia tốc tại $t = 2$ là $\mathbf{A}(2)$: $(-\cos 2)\mathbf{i} - (\sin 2)\mathbf{j} + 6(2)\mathbf{k}$
Tốc độ là $\|\mathbf{V}\| = \sqrt{1 + 9t^4}$. Tại $t = 2$ thì tốc độ là $\|\mathbf{V}(2)\| = \sqrt{145}$
Hướng của chuyển động tại $t = 2$ là

$$\frac{\mathbf{V}}{\|\mathbf{V}\|} = \frac{1}{\sqrt{145}}[(-\sin t)\mathbf{i} + (\cos t)\mathbf{j} + 3(t^2)\mathbf{k}]$$

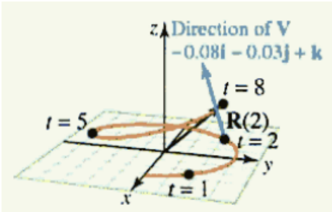
Tại $t = 2$, hướng của chuyển động là $\mathbf{V}(2)/\|\mathbf{V}(2)\|$:

$$\frac{1}{\sqrt{145}}[(-\sin 2)\mathbf{i} + (\cos 2)\mathbf{j} + 12\mathbf{k}]$$

□

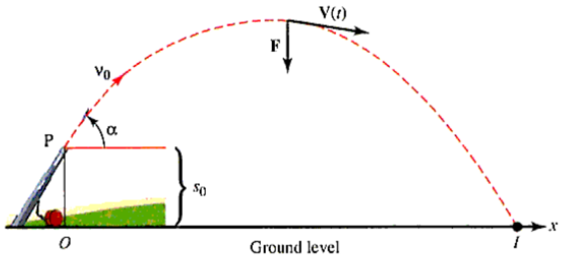
10.2.5 Mô hình ném xiên (chuyển động của viên đạn)

Nhìn chung việc phân tích chuyển động của một viên đạn là rất khó, nhưng bài toán trở nên giải được nếu ta giả sử rằng gia tốc trọng trường là hằng số, và viên đạn đi trong chân không. Mô hình chuyển động trong thực tế (với lực cản không khí chẳng hạn) dựa trên những giả thiết này thì khá đúng với thực tế miễn là viên đạn đủ nặng và bay với vận tốc tương đối thấp, và ở khá gần bề mặt trái đất.



Hình 10.9: Đồ thị của $\mathbf{R}$ và $\mathbf{V}$ tại $t = 2$

Giả sử rằng viên đạn được bắn lên từ một điểm P và đi trong một mặt phẳng tọa độ sao cho P nằm ngay trên gốc tọa độ và điểm va chạm I với mặt đất nằm trên trục x trùng với mặt đất. Gọi s_0 là độ cao của P tính từ O, v_0 là vận tốc đầu của viên đạn, và α là góc nghiêng.



Hình 10.10: Đường đi của một viên đạn

Vì viên đạn chuyển động trong chân không nên lực duy nhất tác động lên nó là lực hút trái đất. Lực $\mathbf{F}$ này hướng xuống, có độ lớn bằng với trọng lượng của viên đạn. Nếu m là khối lượng viên đạn và g là gia tốc trọng trường, thì độ lớn của $\mathbf{F}$ là ma. Theo định luật 2 Newton thì tổng các lực tác động lên viên đạn đúng bằng $m\mathbf{A}(t)$, với $\mathbf{A}(t)$ là gia tốc của viên đạn. Do đó

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= -mg\mathbf{j} \\ m\mathbf{A}(t) &= -mg\mathbf{j} \\ A(t) &= -g\mathbf{j} \end{aligned}$$

Vận tốc của viên đạn có được bằng cách lấy tích phân $\mathbf{A}(t)$. Tức là

$$\mathbf{V}(t) = \int \mathbf{A}(t)dt = \int (-g\mathbf{j})dt = -gt\mathbf{j} + \mathbf{C}_1$$

với $\mathbf{C}_1 = \mathbf{V}(0)$. Vì viên đạn được bắn với tốc độ đầu $v_0 = \|\mathbf{V}(0)\|$ với góc nghiêng α nên vận tốc đầu phải là

$$\mathbf{C}_1 = \mathbf{V}(0) = (v_0 \cos\alpha)\mathbf{i} + (v_0 \sin\alpha)\mathbf{j}$$

Thay vào ta tìm được

$$\mathbf{V}(t) = -gt\mathbf{j} + (v_0 \cos\alpha)\mathbf{i} + (v_0 \sin\alpha)\mathbf{j} = (v_0 \cos\alpha)\mathbf{i} + (v_0 \sin\alpha - gt)\mathbf{j}$$

Bây giờ lấy tích phân của $\mathbf{V}$ theo t, và sử dụng điều kiện $\mathbf{R}(0) = s_0\mathbf{j}$ ta tìm được hàm vị trí

$$\mathbf{R}(t) = \int \mathbf{V}(t)dt = [(v_0 \cos\alpha)t]\mathbf{i} + \left[(v_0 \sin\alpha)t - \frac{1}{2}gt^2 + s_0\right]\mathbf{j}$$

Mệnh đề 10.2.5 (Chuyển động của một viên đạn trong chân không)**.** *Xét một viên đạn chuyển động trong chân không trong một mặt phẳng tọa độ, với trục x nằm ngang mặt đất. Nếu viên đạn được bắn từ một độ cao s_0 với vận tốc đầu v_0 và góc nghiêng α, thì tại thời điểm t $(t \geq 0)$ nó ở tại điểm $(x(t), y(t))$ xác định bởi*

$$x(t) = (v_0 \cos\alpha)t \qquad \text{và} \qquad y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + (v_0 \sin\alpha)t + s_0$$

Chú ý 10.2.6. Khi $\alpha \neq 90°$ thì ta có thể khử tham số t bằng cách giải phương trình đầu tiên để được

$$t = \frac{x}{v_0 \cos\alpha}$$

Bằng cách thay vào phương trình thứ hai, ta tìm được

$$\begin{aligned} y &= -\frac{1}{2}g\left[\frac{x}{v_0\cos\alpha}\right]^2 + (v_0\sin\alpha)\left[\frac{x}{v_0\cos\alpha}\right] + s_0 \\ &= \left[\frac{-g}{2(v_0\cos\alpha)^2}\right]x^2 + (\tan\alpha)x + s_0 \end{aligned}$$

Đây là phương trình trong hệ tọa độ vuông góc cho quĩ đạo của viên đạn. Do phương trình có dạng tổng quát

$$y = ax^2 + bx + c, \quad \text{với} \quad a < 0$$

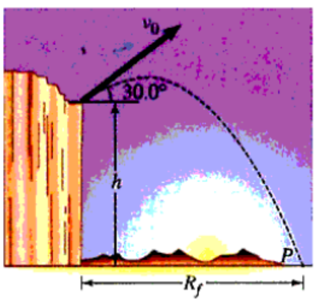
nên quĩ đạo là một phần của một parabol hướng xuống. Tức là, nếu viên đạn không được bắn thẳng đứng thì quĩ đạo của nó sẽ là môt phần của cung parabol hướng xuống.

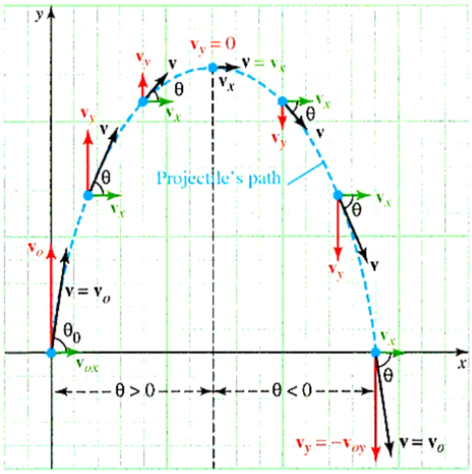
Ví dụ 10.2.11.[Mô hình chuyển động của một vật được ném] Một cậu bé đứng tại một mỏm đá ném một quả bóng lên theo góc nghiêng 30° và vận tốc đầu là 64 ft/s. Giả sử rằng khi quả bóng rời tay cậu bé, nó ở độ cao 48 ft so với mặt đất ở chân mỏm đá.

a. Tìm thời gian bay và phạm vi bay của quả bóng.

b. Tìm vận tốc và tốc độ của quả bóng khi nó chạm đất.

c. Quả bóng có thể đạt đến điểm cao nhất là bao nhiêu?





Hình 10.11: Chuyển động của một viên đạn. Quĩ đạo là một phần của cung parabol.

Giải. a. Quĩ đạo của quả bóng có các phương trình tham số

$$x(t) = (64\cos 30^\circ)t = 32\sqrt{3}t$$
$$y(t) = -\frac{1}{2}(32)t^2 + (64\sin 30^\circ)t + 48 = -16t^2 + 32t + 48$$

a. Quả bóng chạm đất khi $y = 0$. Giải phương trình cho y khi $t \geq 0$ ta tìm được $t = 3$. Do đó phạm vi bay là

$$x(3) = 32\sqrt{3}(3)$$

b. Đạo hàm $x(t)$ và $y(t)$ ta tìm được

$$\mathbf{V}(t) = 32\sqrt{3}\mathbf{i} + (-32t + 32)\mathbf{j}$$

Do đó khi chạm đất vận tốc là $\mathbf{V}(3) = 32\sqrt{3}\mathbf{i} - 64\mathbf{j}$ và tốc độ của nó là

$$\|\mathbf{V}(3)\| \approx 84.664042$$

c. Quả bóng ở vị trí cao nhất khi thành phần đứng của vận tốc là 0, tức là khi $y'(t) = 0$. Giải phương trình này ta tìm được $t = 1$. Do đó độ cao cực đại là

$$y_m = y(1) = 64$$

ứng với vị trí ngang

$$x_m = x(1) = 55.425626$$

□

Mệnh đề 10.2.7 (Thời gian bay/Phạm vi bay). *Một viên đạn được bắn từ mặt đất có* ***thời gian bay*** *T_f và* ***phạm vi bay*** *R_f được cho bởi các phương trình*

$$T_f = \frac{2}{g}v_0 \sin\alpha \qquad \text{và} \qquad R_f = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha$$

Phạm vi bay lớn nhất là $R_m = \dfrac{v_0^2}{g}$*, và xảy ra khi* $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$.

Ví dụ 10.2.12.[Thời gian và phạm vi bay của một viên đạn] Một viên đạn được bắn từ mặt đất với góc nghiêng 40° và vận tốc đầu 110 ft/s. Tìm thời gian và phạm vi bay.

Giải. $T_f = \dfrac{2}{g} v_0 \sin\alpha \approx 4.4191648$

$R = \dfrac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha \approx 372.38043$ □

10.3 Độ cong

TRONG PHẦN NÀY: Tiếp tuyến đơn vị và vectơ pháp tuyến đơn vị chính, độ dài cung khi tham số, độ cong.

10.3.1 Tiếp tuyến đơn vị và vectơ pháp tuyến đơn vị chính

Ở phần 10.2, ta biết rằng nếu $\mathbf{R}(t)$ là một hàm vectơ ứng với đường cong trơn C, khi đó đạo hàm khác không $\mathbf{R}'(t)$ là tiếp tuyến của đường cong C tại điểm P với t tương ứng. Vì đường cong C trơn nên ta có $\mathbf{R}'(t) \neq 0$ và vectơ tiếp tuyến đơn vị $\mathbf{T}$ của C được tính theo công thức

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{R}'(t)}{\|\mathbf{R}'(t)\|}.$$

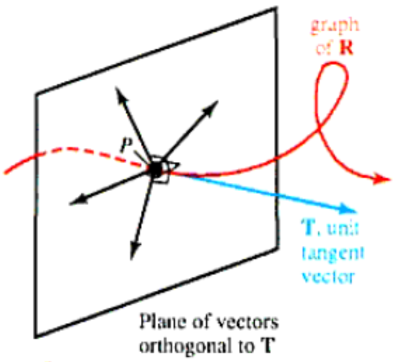


Figure 10.26 Unit tangent vector **T** and vectors orthogonal to **T** on a given curve

Hình 10.26 chỉ ra đường cong C và tiếp tuyến đơn vị $\mathbf{T}$ tại điểm P cụ thể. Theo định lý 10.4(định lý về sự trực giao của hàm số có độ dài cố định và đạo hàm của nó), vì $\mathbf{T}(t)$ có độ lớn không đổi ($\|\mathbf{T}(t)\| = 1$). Điều này dẫn đến $\mathbf{T}'(t)$ trực giao với $\mathbf{T}(t)$ và vì vậy $\mathbf{T}'(t)$ là pháp tuyến của đường cong C tại P. Theo hình 10.26, có vô số véc tơ trực giao với véc tơ tiếp tuyến đơn vị $\mathbf{T}(t)$ và do đó đều là véctơ pháp tuyến. Để phân biệt véctơ $\mathbf{T}'(t)$ với các véctơ pháp tuyến khác, ta chuẩn hóa nó bởi phép chia cho chính độ dài của nó, và xác định một véc tơ pháp tuyến đơn vị chính (principal unit normal vector)

$$\mathbf{N}(t) = \frac{\mathbf{T}'(t)}{\|\mathbf{T}'(t)\|}$$

Tiếp Tuyến Đơn Vị Và Vectơ Pháp Tuyến Đơn Vị Chính

Nếu $\mathbf{R}(t)$ là hàm véctơ xác định một đường cong trơn thì tại mỗi điểm véctơ đơn vị là

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{R}'(t)}{\|\mathbf{R}'(t)\|}$$

và véc tơ pháp tuyến đơn vị chính là

$$\mathbf{N}(t) = \frac{\mathbf{T}'(t)}{\|\mathbf{T}'(t)\|}.$$

Ví dụ 10.3.1.Tiếp tuyến đơn vị và pháp tuyến đơn vị chính

Tìm véctơ tiếp tuyến đơn vị $\mathbf{T}(t)$ và véctơ pháp tuyến đơn vị chính tại mỗi điểm trên đường cho bởi hàm véctơ $\mathbf{R}(t) =< 3\sin t, 4t, 3\cos t >$.

Giải. Ta có $\mathbf{R}'(t) =< 3\cos t, 4, -3\sin t >$, vì vậy

$$\begin{aligned}\|\mathbf{R}'(t)\| &= \sqrt{(3\cos t)^2 + 4^2 + (-3\sin t)^2} \\ &= \sqrt{9\cos^2 t + 16 + 9\sin^2 t} \\ &= \sqrt{9 + 16} \\ &= 5\end{aligned}$$

Do đó, véctơ tiếp tuyến đơn vị là

$$\begin{aligned}\mathbf{T}(t) = &= \frac{\mathbf{R}'(t)}{\|\mathbf{R}'(t)\|} \\ &= \frac{1}{5} < 3\cos t, 4, -3\sin t > \\ &= \left\langle \frac{3}{5}\cos t, \frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\sin t \right\rangle\end{aligned}$$

Để tìm vectơ pháp tuyến đơn vị chính **N**, trước hết ta tìm $\mathbf{T}'(t)$ và độ lớn của nó:

$$\mathbf{T}'(t) = \left\langle -\frac{3}{5}\sin t, 0, -\frac{3}{5}\cos t \right\rangle$$

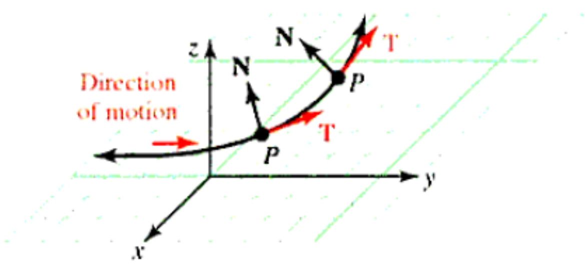
$$\begin{aligned}
\|\mathbf{T}'(t)\| &= \sqrt{\left(-\frac{3}{5}\sin t\right)^2 + 0 + \left(-\frac{3}{5}\cos t\right)^2} \\
&= \sqrt{\frac{9}{25}(\sin^2 t + \cos^2 t)} \\
&= \frac{3}{5}
\end{aligned}$$

Vậy, vectơ pháp tuyến đơn vị chính là

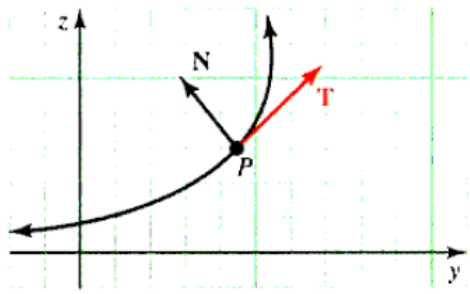
$$\begin{aligned}
\mathbf{N}(t) &= \frac{\mathbf{T}'(t)}{\|\mathbf{T}'(t)\|} \\
&= \frac{\left\langle -\frac{3}{5}\sin t, 0, -\frac{3}{5}\cos t \right\rangle}{\frac{3}{5}} \\
&= \langle -\sin t, 0, -\cos t \rangle
\end{aligned}$$

□

Giả sử một vật thể chuyển động dọc theo đường cong C của véctơ $\mathbf{R}(t)$ theo chiều tăng của t. Khi đó, tại mỗi điểm P trên quỹ đạo C véctơ đơn vị $\mathbf{RT}(t)$ chỉ hướng chuyển động, trong khi đó véctơ vectơ pháp tuyến đơn vị chính $\mathbf{N}(t)$ chỉ ra hướng quay của vật (xem trong hình 10.27 a). Xét quỹ đạo trong mặt phẳng thì $\mathbf{N}(t)$ chỉ ra mặt lõm của quỹ đạo (Hình 10.27b).



a. T points in the direction of motion while **N** points in the direction the moving object is turning



b. In the plane, **N** points toward the concave side of the trajectory

Figure 10.27 Unit tangent **T** and principal unit normal **N** at each point on the trajectory of a moving object

10.3.2 Độ dài cung

Nhắc lại từ mục 6.4, độ dài cung của đồ thị hàm $y = F(x)$ trên khoảng $[a, b]$ được xác định bởi tích phân

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx.$$

Nếu đồ thị được biểu diễn bằng phương trình tham số $x = x(t)$ và $y = y(t)$, thì theo luật dây chuyền $\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}$, vì vậy ra có

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \text{ với } \frac{dx}{dt} \neq 0$$

Do đó, nếu đồ thị chỉ được quét một lần qua $t_1 \leq t \leq t_2$ thì độ dài cung được xác định bởi

$$\begin{aligned} s &= \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\right)^2} dx \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\frac{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}} \left(\frac{dx}{dt}\right) dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt \end{aligned}$$

Hoàn toàn tương tự, nếu $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ là các phương trình tham số của đường cong C trong $\mathbb{R}^3$ quét một lần duy nhất trên khoảng tham số $t_1 \leq t \leq t_2$, thì độ dài cung của C được tính bằng công thức

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt$$

Tuy nhiên ta thường muốn công thức xác định độ dài cung không phụ thuộc vào t hay bất cứ tham số đặc biệt nào trong tính toán. Có thể nói rằng định nghĩa về độ dài của đường sau đây thực sự độc lập với tham số

Hàm độ dài cung Cho C là đường cong trơn từng khúc, được biểu diễn bởi phương trình tham số $\mathbf{R}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$ và $P_0 = P(t_0)$ là điểm đặc biệt trên C (còn gọi là **điểm cơ sở**). Khi đó độ dài của C tính từ điểm cơ sở P_0 tới điểm $P(t)$ bất kì được tính bằng **hàm độ dài cung** $s(t)$ như sau

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2 + \left(\frac{dz}{du}\right)^2} du$$

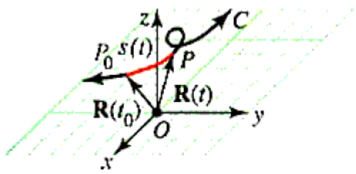


Figure 10.28 s(t) is the length of the curve C from the point $P(t_0)$ to $P(t)$ if $t > t_0$

Hàm độ dài cung $s(t)$ đo khoảng cách dọc theo đường C từ điểm $P(t_0)$ đến $P(t)$ nếu $t > t_0$ và ngược lại nếu $t < t_0$ (xem hình 10.28). Vì chiều dài dọc theo C là tính hình học nên nó không phụ thuộc vào việc ta sử dụng tham số t trong $\mathbf{R}(t)$.

Định nghĩa này cho phép ta sử dụng độ dài $s(t)$ như là tham số để mô tả đường cong. Dù thời gian là tham số tự nhiên cho việc nghiên cứu chuyển động của vật trong không gian, việc sử dụng tham số độ dài để mô tả các đặc trưng hình học của đường cong thường mang lại nhiều lợi ích hơn.

Ví dụ 10.3.2. Tìm độ dài cung cho bởi phương trình tham số

Tìm độ dài cung cho bởi

$$\mathbf{R}(t) =< 12t, 5\cos t, 3 - 5\sin t >$$

từ $t = 0$ đến $t = 2$.

Giải. Ta tìm được

$$\frac{dx}{dt} = 12, \frac{dy}{dt} = -5\sin t, \frac{dz}{dt} = -5\cos t$$

Do đó,

$$\begin{aligned} s = &= \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt \\ &= \int_0^2 \sqrt{12^2 + (-5\sin t)^2 + (-5\cos t)^2} dt \\ &= \int_0^2 13 dt \\ &= 26 \end{aligned}$$

Công thức cho độ dài cung có thể được sử dụng trong việc tính tốc độ chuyển động của vật. □

Định lý 10.3.1. *Tính tốc độ thông qua đạo hàm của độ dài đường cong Giả sử một vật chuyển động dọc theo đường C trơn xác định bởi hàm vị trí $\mathbf{R}(t) =< x(t), y(t), z(t) >$, với $\mathbf{R}'(t)$ liên tục trên khoảng $[t_1, t_2]$. Khi đó vật có tốc độ*

$$\frac{ds}{dt} = \|\mathbf{V}(t)\| = \|\mathbf{R}'(t)\| \quad \text{với} \quad t_1 \le t \le t_2$$

Chứng minh. Áp dụng định lý cơ bản thứ hai để xác định độ dài cung

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_{t_0}^{t} \sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2 + \left(\frac{dz}{du}\right)^2} du \\ \frac{ds}{dt}(t) &= \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} \\ &= \|\mathbf{R}'(t)\| \end{aligned}$$

□

Ví dụ 10.3.3. Tốc độ và quãng đường chuyển động của vật trong không gian

Véctơ vị trí của vật thể chuyển động là $\mathbf{R}(t) =< e^t, \sqrt{2}t + 3, e^{-t} >$. Tìm tốc độ của vật ở thời điểm t và tính toán quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian $t = 0$ và $t = 1$.

Giải. Bằng cách đạo hàm $\mathbf{R}(t)$ theo t, ta tìm vận tốc

$$\mathbf{V}(t) = \mathbf{R}'(t) =< e^t, \sqrt{2}, -e^{-t} >$$

Vì vậy, tốc độ tại thời điểm t là

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= \|\mathbf{R}'(t)\| \\ &= \sqrt{(e^t)^2 + (\sqrt{2})^2 + (-e^{-t})^2} \\ &= \sqrt{e^{2t} + 2 + e^{-2t}} \\ &= \sqrt{(e^t + e^{-t})^2} \\ &= e^t + e^{-t} \end{aligned}$$

Quãng đường vật di chuyển trong khoảng thời gian từ $t = 0$ và $t = 1$ là độ dài cung và được cho bởi

$$s = \int_0^1 (e^t + e^{-t}) dt = [e^t - e^{-t}]_0^1 = e - e^{-1} - 1 + 1 \approx 2.3504024$$

Để thay đổi tham số từ dạng cho trước $\mathbf{R}(t)$ qua dạng liên quan đến tham số s, trước hết ta tìm $s(t)$ sử dụng công thức độ dài cung (như chứng minh của định lý 10.6), và giải phương trình s để tìm t. Đồ thị của $\mathbf{R}(t)$ có thể được tham số hóa trong trường hợp của s bằng cách thế $t = t(s)$. Qui trình tổng quát được minh họa trong ví dụ sau. □

Ví dụ 10.3.4. Sử dụng độ dài cung để tham số hóa đường cong
Biểu diễn đường xoắn ốc $\mathbf{R}(t) =< \sin t, \cos t, 2t >$ trong trường hợp độ dài cung được đo từ điểm $P_0(0,1,0)$ theo hướng tăng dần của t.

Giải. Điểm P_0 tương ứng tại $t = 0$, vì thế độ dài cung $s(t)$ được cho bởi tích phân

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_{t_0}^{t} \sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2 + \left(\frac{dz}{du}\right)^2} du \\ &= \int_0^t \sqrt{(\cos u)^2 + (-\sin u)^2 + 2^2} du \\ &= \int_0^t \sqrt{5} du \\ &= \sqrt{5} t \end{aligned}$$

Giải phương trình $s = \sqrt{5}t$ theo t, ta có $t = \frac{1}{\sqrt{5}} s$ và tham số hóa một lần nữa sẽ là

$$x = \sin\left(\frac{s}{\sqrt{5}}\right), y = \cos\left(\frac{s}{\sqrt{5}}\right), z = \frac{2s}{\sqrt{5}}$$

□

Rõ ràng hàm véctơ $\mathbf{R}$ được tham số độ dài cung theo s thường dẫn đến tính toán phức tạp. Tuy nhiên, khi đã được tham số hóa thì véctơ tiếp tuyến đơn vị $\mathbf{T}$ và véctơ pháp tuyến đơn vị chuẩn có thể được biểu diễn dưới dạng đơn giản như trong định lý sau đây.

Định lý 10.3.2. ***Công thức cho $\mathbf{T}$ và $\mathbf{N}$ trong trường hợp độ dài đường cong s***
Nếu $\mathbf{R}(t)$ có đồ thị trơn từng khúc được biểu diễn bởi $\mathbf{R}(s)$ theo tham số độ dài đường cong thì véctơ tiếp tuyến đơn vị $\mathbf{T}$ và véctơ pháp tuyến đơn vị $\mathbf{N}$ thỏa mãn
$\mathbf{T} = \frac{d\mathbf{R}}{ds}$ *và* $\mathbf{N} = \frac{1}{\kappa}\frac{d\mathbf{T}}{ds}$
với $\kappa = \|\frac{d\mathbf{T}}{ds}\|$ *là hàm vô hướng của s.*

Chứng minh. Bằng luật dây chuyền, ta có

$$\frac{d\mathbf{R}}{dt} = \frac{d\mathbf{R}}{ds}\frac{ds}{dt}$$

và vì $\dfrac{ds}{dt} = \|\mathbf{R}'(t)\|$, điều này dẫn đến

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{R}}{ds} &= \frac{\frac{d\mathbf{R}}{dt}}{\frac{ds}{dt}} \\ &= \frac{\mathbf{R}'(t)}{\|\mathbf{R}'(t)\|} \\ &= \mathbf{T}\end{aligned}$$

Tiếp theo, để có công thức cho véctơ pháp tuyến đơn vị chính

$$\mathbf{N} = \frac{\mathbf{T}'(t)}{\|\mathbf{T}'(t)\|}$$

trong trường hợp tham số độ dài cung s, ta lưu ý rằng

$$\begin{aligned}\mathbf{T}'(t) &= \frac{d\mathbf{T}}{dt} \\ &= \frac{d\mathbf{T}}{ds}\frac{ds}{dt}\end{aligned}$$

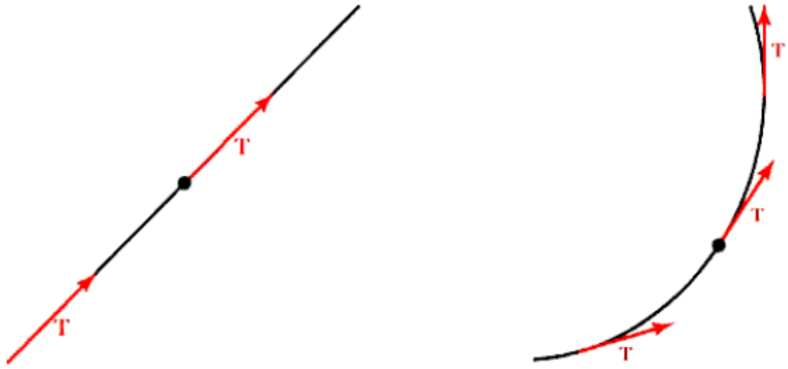
Vì $\dfrac{ds}{dt} > 0$ nên các đạo hàm véctơ $\dfrac{d\mathbf{T}}{dt}$ và $\dfrac{d\mathbf{T}}{ds}$ có dùng hướng, và $\mathbf{N}$ có thể được tính bằng cách tìm $\dfrac{d\mathbf{T}}{ds}$ và chia cho độ dài của nó, nghĩa là

$$\begin{aligned}N &= \frac{\frac{d\mathbf{T}}{dt}}{\|\frac{d\mathbf{T}}{dS}\|} \\ &= \frac{1}{\kappa}\frac{d\mathbf{T}}{ds}\end{aligned}$$

như đã phát biểu. □

10.3.3 Độ cong

Cho C là đường cong trơn, nghĩa là đồ thị của hàm véctơ $\mathbf{R}(t)$ được tham số hóa theo độ dài cung s. Vì tiếp tuyến đơn vị $\mathbf{T}(s)$ là véctơ đơn vị nên chỉ có hướng của nó thay đổi theo s và tốc độ thay đổi của hướng có thể được đo bằng độ lớn của đạo hàm $\dfrac{d\mathbf{T}}{ds}$. Theo như hình 10.29a, nếu đường là đường thẳng thì hướng đi không thay đổi nên $\dfrac{d\mathbf{T}}{ds} = 0$. Tuy nhiên, nếu đường bị uốn cong, hướng của $\mathbf{T}$ sẽ thay đổi rất nhanh chóng nên $\dfrac{d\mathbf{T}}{ds}$ tương ứng cũng lớn về độ lớn (hình 10.29b). Độ lớn của $\dfrac{d\mathbf{T}}{ds}$ được gọi là độ cong của C.

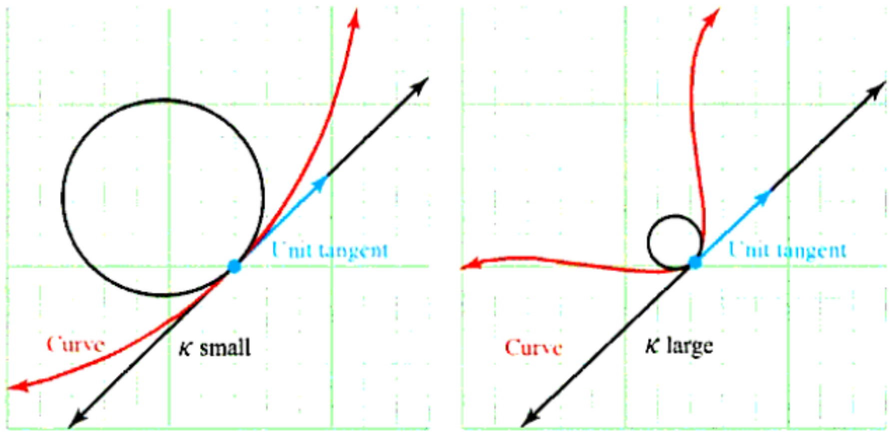


a. For a line, $\dfrac{d\mathbf{T}}{ds} = 0$

b. The magnitude of $\dfrac{d\mathbf{T}}{ds}$ is large where the curve is sharply bent

Figure 10.29 The curvature of a curve C is related to the magnitude of $\dfrac{d\mathbf{T}}{ds}$

> Giả sử đường cong trơn C là đồ thị của hàm véctơ $\mathbf{R}(s)$, được tham số hóa theo độ dài cung s thì độ cong của C là hàm
>
> $$\kappa(s) = \|\frac{d\mathbf{T}}{ds}\|$$
>
> với $\mathbf{T}$ là véctơ tiếp tuyến đơn vị.



a. Small curvature

b. Large curvature

Figure 10.30 Curves with small and large curvature

Điều này có nghĩa là độ cong κ đo tốc độ đổi hướng của đường cong khỏi tiếp tuyến tại một điểm cụ thể như trong hình 10.30.

Trước hết, lưu ý rằng κ trong định lý 10.7 là độ cong của $\mathbf{R}(s)$. Vì hàm véctơ $\mathbf{R}$ thường được biểu diễn dưới dạng tham số hơn là theo độ dài cung s, điều này có thể không quá thuận lợi để tính độ cong theo công thức $\kappa(s) = \|\frac{d\mathbf{T}}{ds}\|$. Ví dụ, nếu tham số là t thì theo luật dây chuyền ta có

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \frac{d\mathbf{T}}{ds}\frac{ds}{dt},$$

do đó

$$\|\frac{d\mathbf{T}}{ds}\| = \frac{\|\frac{d\mathbf{T}}{dt}\|}{\frac{ds}{dt}}.$$

(Nhớ rằng, s tăng cùng chiều với t, vì thế $\frac{ds}{dt} > 0$.) Vì $\frac{ds}{dt} = \|\mathbf{R}'(t)\|$ nên

$$\kappa(s) = \frac{\|\mathbf{T}'(t)\|}{\|\mathbf{R}'(t)\|},$$

công thức mà ta gọi là **dạng hai đạo hàm** của độ cong. Dạng này thường được sử dụng trong việc tính toán κ do nó chỉ liên quan duy nhất đến độ lớn của $\mathbf{R}'(t)$ và $\mathbf{T}'(t)$, cả hai đại lượng này đều dễ tính hơn $\|\frac{d\mathbf{T}}{ds}\|$. Trong ví dụ 5, ta sẽ minh họa cách sử dụng dạng hai đạo hàm thông qua cách tính độ cong của một đường tròn.

Ví dụ 10.3.5.Tìm độ cong của đường tròn

Chỉ ra rằng đường tròn với bán kính r

$$\mathbf{R}(t) =< r\cos r, r\sin t >$$

có độ cong bằng nghịch đảo bán kính của nó, nghĩa là $\kappa = \frac{1}{r}$.

Giải. Vì $\mathbf{R}'(t) =< -r\sin t, r\cos t >$, ta có

$$\|\mathbf{R}'(t)\| = \sqrt{(-r\sin t)^2 + (r\cos t)^2} = r$$

nên

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{R}'(t)}{\|\mathbf{R}'(t)\|} = \frac{< -r\sin t, r\cos t >}{r} =< -\sin t, \cos t >$$

và

$$\mathbf{T}'(t) =< -\cos t, -\sin t >$$

Từ đây ta có

$$\|\mathbf{T}'(t)\| = \sqrt{(-\cos t)^2 + (-\sin t)^2} = 1$$

Độ cong được tính

$$\kappa(s) = \frac{\|\mathbf{T}'(t)\|}{\|\mathbf{R}'(t)\|} = \frac{1}{r}$$

□

Định nghĩa độ cong , $\kappa(s) = \dfrac{\|\mathbf{T}'(t)\|}{\|\mathbf{R}'(t)\|}$, có thể dẫn đến khó khăn trong tính toán nếu $\|\mathbf{R}'(t)\|$ không phải là hằng số. Công thức cho độ cong được rút ra từ định lý sau thường sử dụng dể hơn

Định lý 10.3.3. ***Công thức đạo hàm tích có hướng cho độ cong***
Giả sử đường cong trơn C là đồ thị của hàm véctơ $\mathbf{R}(t)$ thì độ cong được cho bởi công thức

$$\kappa = \frac{\|\mathbf{R}' \times \mathbf{R}''\|}{\|\mathbf{R}'\|^3}$$

Chứng minh. Vì $\|\mathbf{R}'\| = \dfrac{ds}{dt}$, ta có

$$\mathbf{R}' = \|\mathbf{R}'\|\mathbf{T} = \left(\frac{ds}{dt}\right) T$$

$$\mathbf{R}'' = \frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\right)\mathbf{T} + \frac{ds}{dt}\frac{d\mathbf{T}}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}\mathbf{T} + \frac{ds}{dt}\mathbf{T}'$$

nên, ta có

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}' \times \mathbf{R}\text{"} &= \left(\frac{ds}{dt}\mathbf{T}\right) \times \left(\frac{d^2s}{dt^2}\mathbf{T} + \frac{ds}{dt}\mathbf{T}'\right) \\
&= \left(\frac{ds}{dt}\right)\left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)(\mathbf{T} \times \mathbf{T}) + \left(\frac{ds}{dt}\right)^2(\mathbf{T} \times \mathbf{T}') \\
&= \left(\frac{ds}{dt}\right)^2(\mathbf{T} \times \mathbf{T}') \qquad \text{Vì} \qquad \mathbf{T} \times \mathbf{T} = 0
\end{aligned}$$

Vì $\|\mathbf{T}\| = 1$ kéo theo tính trực giao của hàm hằng số độ dài và đạo hàm của chính nó (theo định lý 10.4) đó là $\mathbf{T}.\mathbf{T}' = 0$ nên góc giữa $\mathbf{T}$ và $\mathbf{T}'$ là $\theta = \dfrac{\pi}{2}$. Do đó,

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{R}' \times \mathbf{R}\text{"}\| &= \left(\frac{ds}{dt}\mathbf{T}\right)^2 \|\mathbf{T} \times \mathbf{T}'\| \\
&= \left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)\|\mathbf{T}\|\|\mathbf{T}'\|\sin\theta \\
&= \left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)\|\mathbf{T}\|\|\mathbf{T}'\|\sin\theta \qquad \text{Vì} \qquad \sin\frac{\pi}{2} = 1 \\
&= \left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)\|\mathbf{T}'\|\sin\theta \qquad \text{Vì } \|\mathbf{T}\| = 1 \\
&= \|\mathbf{R}'\|^2\|\mathbf{T}'\|
\end{aligned}$$

Độ cong được cho bởi

$$\kappa = \frac{\|\mathbf{T}'\|}{\|\mathbf{R}'\|}$$
$$= \frac{\frac{\|\mathbf{R}' \times \mathbf{R}''\|}{\|\mathbf{R}'\|^2}}{\|\mathbf{R}'\|}$$
$$= \frac{\|\mathbf{R}' \times \mathbf{R}''\|}{\|\mathbf{R}'\|^3}$$

□

Ví dụ 10.3.6.Độ cong của đường xoắn ốc
Cho a và b là các số không âm, hãy biểu diễn độ cong κ của

$$\mathbf{R}(t) = (a\cos t)\mathbf{i} + (a\sin t)\mathbf{j} + bt\mathbf{k}$$

theo a và b. Đường được định nghĩa bởi $\mathbf{R}$ cho như hình 10.31.

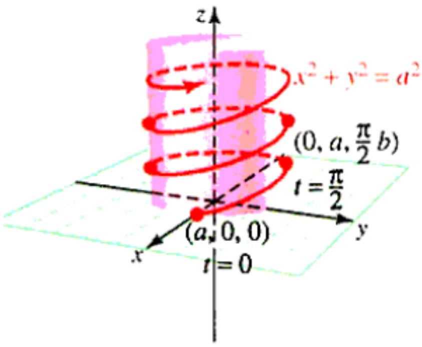


Figure 10.31 Graph of helix

Giải.

$$\mathbf{R}'(t) = (-a\sin t)\mathbf{i} + (a\cos t)\mathbf{j} + b\mathbf{k}$$
$$\mathbf{R}"(t) = (-a\cos t)\mathbf{i} + (-a\sin t)\mathbf{j}$$

$$\mathbf{R}' \times \mathbf{R}" = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -a\sin t & a\cos t & b \\ a\cos t & -a\sin t & 0 \end{vmatrix} = (ab\sin t)i - (ab\cos t)j + a^2k$$

Bây giờ ta cần tìm độ lớn của véctơ này cũng như tìm R':

$$\|\mathbf{R}' \times \mathbf{R}"\| = \sqrt{(ab\sin t)^2 + (ab\cos t)^2 + a^4}$$
$$= \sqrt{a^2b^2(\sin t + ab\cos t)^2 + a^4}$$
$$= \sqrt{a^2b^2 + a^4}$$
$$= a\sqrt{a^2 + b^2} \text{ vì } a > 0 \text{ cho trước}$$

và

$$\|\mathbf{R}'\| = \sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t)^2 + b^2} = \sqrt{a^2+b^2}$$

Cuối cùng ta có

$$\kappa = \frac{\|\mathbf{R}'\times\mathbf{R}''\|}{\|\mathbf{R}'\|^3} = \frac{a\sqrt{a^2+b^2}}{\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^3} = \frac{a\sqrt{a^2+b^2}}{(a^2+b^2)\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{a}{a^2+b^2}$$

□

Trong trường hợp đặc biệt khi C là đường trong mặt phẳng với phương trình $y = f(x)$, độ cong có dạng như định lý sau đây

Định lý 10.3.4. *Độ cong của đường trong mặt phẳng cho bởi phương trình $y = f(x)$ Đồ thị C của hàm số $y = f(x)$ có độ cong*

$$\kappa = \frac{|f''(x)|}{(1+[f'(x)]^2)^{3/2}}$$

tại mọi vị trí $f(x)$, $f'(x)$ và $f''(x)$ tồn tại.

Giải. Sử dụng x làm tham số, ta lưu ý đến đường cong C của đồ thị hàm véctơ $\mathbf{R}(x) = xi + f(x)j$. Khi đó, $\mathbf{R}' = i + f'(x)j$ và $R''(x) = f''(x)j$ nên

$$\mathbf{R}'\times\mathbf{R}'' = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & f'(x) & 0 \\ 0 & f"(x) & 0 \end{vmatrix} = f''(x)k$$

Do đó, vì $\|\mathbf{R}'\| = \sqrt{1+[f'(x)]^2}$, độ cong của C được cho bởi

$$\begin{aligned}\kappa &= \frac{\|R'\times R''\|}{\|R'\|^3} \\ &= \frac{|f''(x)|}{\left(\sqrt{1+[f'(x)]^2}\right)^3} \\ &= \frac{|f''(x)|}{(1+[f'(x)]^2)^{3/2}}\end{aligned}$$

□

Ví dụ 10.3.7. Độ cong cực đại của đường trong mặt phẳng
Tìm độ cong của $y = x^{-1}$ với $x > 0$. Với giá trị nào của x thì độ cong đạt giá trị lớn nhất?

Giải. Theo đề bài, $f(x) = x^{-1}$, ta tính được $f'(x) = x^{-2}$ và $f''(x) = 2x^{-3}$. Áp dụng công thức độ cong sẽ là

$$\begin{aligned}\kappa &= \frac{|f"(x)|}{(1+[f'(x)]^2)^{3/2}} \\ &= \frac{2x^{-3}}{(1+[-x^{-2}]^2)^{3/2}} \\ &= \frac{2x^3}{(x^4+1)^{3/2}}\end{aligned}$$

Để tìm giá trị lớn nhất của κ, ta tìm đạo hàm của $\kappa(x)$ và giải phương trình $\kappa(x) = 0$;

$$\kappa'(x) = \frac{6x^2(1-x^4)}{(x^4+1)^{5/2}}$$

$\kappa'(x) = 0$ khi

$$\begin{aligned}6x^2(1-x^4) &= 0 \\ 6x^2(1-x)(1+x)(1+x^2) &= 0 \\ x &= 0, 1, -1 \qquad \text{giá trị } 0, -1 \text{ không thuộc miền đang xét}\end{aligned}$$

Vì $\kappa'(x) > 0$ khi $x < 1$ và $\kappa < 0$ khi $x > 1$ nên giá trị lớn nhất của độ cong phải xảy ra tại $x = 1$. □

Giả sử đường C trong mặt phẳng có độ cong $\kappa \neq 0$ tại điểm P. Khi đó đường tròn bán kính $\rho = 1/\kappa$ có tâm tại cạnh lõm của đường có chung tiếp tuyến với C tại P gọi là đường tròn mặt tiếp tại P. Bán kính ρ của đường tròn mặt tiếp được gọi là bán kính độ cong và tâm của đường tròn được gọi là tâm độ cong. Đường tròn mặt tiếp và đường C là tiếp tuyến và có cùng độ cong tại P. Theo nghĩa này, đường tròn mặt tiếp là đường tròn xấp xỉ C tốt nhất tại P.

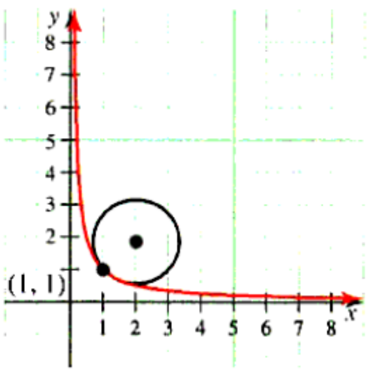


Figure 10.32 Osculating circle at (1,1)

Hình 10.32 chỉ ra rằng đường $y = x^{-1}$ khi $x > 0$ với độ cong tìm được trong ví dụ

7, dọc theo đường tròn mật tiếp tại điểm $P(1,1)$.
Lưu ý rằng độ cong tại P là

$$\kappa(1) = \frac{2(1)^3}{(1^4+1)^{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

nên bán kính độ cong là

$$\rho(1) = \frac{1}{\kappa(1)} = \sqrt{2}$$

Trong bài tập 60, các bạn sẽ được yêu cầu chỉ ra rằng đường tròn mật tiếp có phương trình

$$(x-2)^2 + (y-2)^2 = 2.$$

Bảng sau tóm tắt phần này với một vài công thức để tính độ cong .
Bảng 10.2

Loại	Thông tin cho trước	Công thức	Nơi trích
Tham số độ dài cung	$\mathbf{R}(s)$	$\lVert\frac{d\mathbf{T}}{ds}\rVert$	Định nghĩa
Hai dạng đạo hàm	$\mathbf{R}(t)$	$\frac{\lVert\mathbf{T}'(t)\rVert}{\lVert\mathbf{R}'(t)\rVert}$	Trang 789
Dạng tích có hướng	$\mathbf{T}(t)$	$\frac{\lVert\mathbf{R}'\times\mathbf{R}''\rVert}{\lVert\mathbf{R}'\rVert^3}$	Định lý 10.8
Dạng hàm	$y=f(x)$	$\frac{\lvert f''(x)\rvert}{(1+[f'(x)]^2)^{3/2}}$	Định lý 10.9
Dạng tham số	$x=x(t)$, $y=y(t)$	$\frac{\lvert x'y''-y'x''\rvert}{[(x')^2+(y')^2]^{3/2}}$	bài tập 46
Dạng cực	$r=f(\theta)$	$\frac{\lvert r^2+2r'^2-rr''\rvert}{(r^2+r'^2)^{3/2}}$	Bài tập 48

10.4 Thành phần tiếp tuyến và pháp tuyến của gia tốc

TRONG PHẦN NÀY: Trình bày cách phân tích véctơ vận tốc và gia tốc của vật thể chuyển động thành các thành phần tiếp tuyến và pháp tuyến; và các ứng dụng.

10.4.1 Các thành phần của gia tốc

Khi một vật thể tăng tốc hoặc hãm tốc, người ta quan tâm đến có bao nhiêu thành phần tăng tốc theo hướng chuyển động của vật, cũng như việc chỉ ra bằng véctơ tiếp tuyến đơn vị. Câu hỏi này được trả lời thông qua định lý sau

Định lý 10.4.1. *Tiếp tuyến và các thành phần pháp tuyến của gia tốc Một vật chuyển động dọc theo đường trơn (với $\mathbf{T}' \neq 0$) có vận tốc $\mathbf{V}$ và gia tốc $\mathbf{A}$ với*

$$\mathbf{V} = \left(\frac{ds}{dt}\right)\mathbf{T} \text{ và } \mathbf{A} = \left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)\mathbf{T} + \kappa\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\mathbf{N}$$

và s là độ dài cung dọc theo quỹ đạo.
Tại mỗi điểm trên quỹ đạo chuyển động của vật, vận tốc $\mathbf{V}$ chỉ ra hướng của véctơ tuyến tuyến $\mathbf{T}$, nhưng gia tốc $\mathbf{A}$ có thể bao gồm cả tuyến tuyến và thành phần pháp tuyến. Quỹ đạo có thể xoắn và cuộn nhưng gia tốc luôn nằm trên mặt phẳng được xác định bởi $\mathbf{T}$ và pháp tuyến đơn vị $\mathbf{N}$.

Giải. Công thức $\mathbf{V}$ suy ra từ đinh lý 10.6 đó là véctơ vận tốc có độ lớn $\|\mathbf{V}\| = \dfrac{ds}{dt}$ và chỉ ra trong hướng của véctơ tiếp tuyến đơn vị. Để thiết lập công thức cho $\mathbf{A}$, trước hết ta có

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \left\|\frac{d\mathbf{T}}{ds}\right\|\mathbf{N} = \kappa\mathbf{N}$$

vì đạo hàm của $\mathbf{T}(s)$ chỉ theo hướng vuông góc với $\mathbf{T}$. Sử dụng công thức này ta tìm được

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} &= \frac{d\mathbf{V}}{dt} && \text{định nghĩa của } \mathbf{A}\\
&= \frac{d}{dt}\left[\mathbf{T}\frac{ds}{dt}\right] && \mathbf{V} = \left(\frac{ds}{dt}\right)\mathbf{T}\\
&= \frac{d^2s}{dt^2}\mathbf{T} + \frac{ds}{dt} + \frac{ds}{dt}\frac{d\mathbf{T}}{dt}\\
&= \frac{d^2s}{dt^2}\mathbf{T} + \frac{ds}{dt}\left[\frac{d\mathbf{T}}{ds}\frac{ds}{dt}\right]\\
&= \frac{d^2s}{dt^2}\mathbf{T} + \left(\frac{ds}{dt}\right)^2\frac{d\mathbf{T}}{ds}\\
&= \frac{d^2s}{dt^2}\mathbf{T} + \left(\frac{ds}{dt}\right)^2(\kappa\mathbf{N}) && (\kappa\mathbf{N} = \frac{d\mathbf{T}}{ds})
\end{aligned}$$

□

Hai thành phần của gia tốc có các tên gọi cụ thể.

Thành phần tiếp tuyến/thành phần pháp tuyến
Gia tốc $\mathbf{A}$ của một vật thể chuyển động có thể được viết dưới dạng

$$\mathbf{A} = A_T\mathbf{T} + A_N\mathbf{N}$$

với

$A_T = \dfrac{d^2s}{dt^2}$ là **thành phần tiếp tuyến của gia tốc**

$A_N = \kappa\left(\dfrac{ds}{dt}\right)^2$ là **thành phần pháp tuyến của gia tốc**

Thành phần tiếp tuyến và pháp tuyến được mô tả trong hình 10.35.

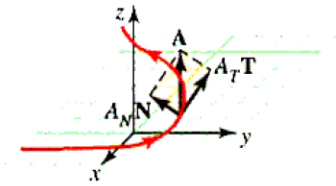


Figure 10.35 Components of acceleration $\mathbf{A} = A_T\mathbf{T} + A_N\mathbf{N}$

Công thức $A_T = \dfrac{d^2s}{dt^2}$ và $A_N = \kappa\left(\dfrac{ds}{dt}\right)^2$ cung cấp thông tin hữu ích về cách vật thể di chuyển trên quỹ đạo của nó, nhưng không phải là dạng tốt nhất cho việc tính toán. Định lý sau đây cung cấp công thức tương ứng cho A_T và A_N mà chỉ sử dụng các đạo hàm $\mathbf{R}'$ và $\mathbf{R}''$ của véctơ vị trí $\mathbf{R}(t)$.

Định lý 10.4.2 (Công thức tính các thành phần của gia tốc)**.** *Cho $\mathbf{R}(t)$ là véctơ vị trí của vật chuyển động dọc theo đường cong trơn C. Khi đó các thành phần tiếp tuyến và pháp tuyến của gia tốc của vật được xác định bởi*

$$A_T = \frac{\mathbf{R}' \cdot \mathbf{R}''}{\|\mathbf{R}'\|} \text{ và } A_N = \frac{\|\mathbf{R}' \times \mathbf{R}''\|}{\|\mathbf{R}'\|}$$

Giải. Lấy θ là góc giữa $\mathbf{R}'$ và $\mathbf{R}''$. Khi này, vì gia tốc được cho bởi $\mathbf{A} = \mathbf{R}''$ nên ta có

$$A_T = \|\mathbf{A}\|\cos\theta = \frac{\|\mathbf{R}'\|\|\mathbf{A}\|\cos\theta}{\|\mathbf{R}'\|} = \frac{\mathbf{R}' \cdot \mathbf{R}''}{\|\mathbf{R}'\|}$$

và

$$A_N = \|\mathbf{A}\|\sin\theta = \frac{\|\mathbf{R}'\|\|\mathbf{A}\|\sin\theta}{\|\mathbf{R}'\|} = \frac{\|\mathbf{R}' \times \mathbf{R}''\|}{\|\mathbf{R}'\|}$$

□

Ví dụ 10.4.1. Tìm các thành phần tiếp tuyến và pháp tuyến của gia tốc
Tìm các thành phần tiếp tuyến và pháp tuyến của gia tốc của vật thể chuyển động với độ dịch chuyển $\mathbf{R}(t) =< t^3, t^2, t >$

Giải. Vì $\mathbf{R}'(t) = \mathbf{V}(t) =< 3t^2, 2t, 1 >$ và $\mathbf{R}''(t) = \mathbf{A}(t) =< 6t, 2, 0 >$, ta có

$$\mathbf{R}'\mathbf{R}'' = \mathbf{V}\mathbf{A} = (3t^2)(6t) + (2t)(2) = 18t^3 + 4t$$

và

$$\mathbf{R}' \times \mathbf{R}'' = \mathbf{V} \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3t^2 & 2t & 1 \\ 6t & 2 & 0 \end{vmatrix} = -2i + 6tj - 6t^2k$$

Do đó, các thành phần của gia tốc là

$$\begin{aligned} A_T &= \frac{\mathbf{R}' \cdot \mathbf{R}''}{\|\mathbf{R}'\|} = \frac{\mathbf{V} \cdot \mathbf{A}}{\|\mathbf{V}\|} \\ &= \frac{18t^3 + 4t}{\sqrt{(3t^2)^2 + (2t)^2 + 1}} = \frac{18t^3 + 4t}{\sqrt{9t^4 + 4t^2 + 1}} \end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned} A_N &= \frac{\|\mathbf{R}' \times \mathbf{R}''\|}{\|\mathbf{R}'\|} \\ &= \frac{\|\mathbf{V} \times \mathbf{A}\|}{\|\mathbf{V}\|} \\ &= \frac{\sqrt{(-2)^2 + (6t)^2 + (-6t^2)^2}}{\sqrt{9t^4 + 4t^2 + 1}} = 2\sqrt{\frac{9t^4 + 9t^2 + 1}{9t^4 + 4t^2 + 1}} \end{aligned}$$

□

Lưu ý trong hình 10.35, $\|\mathbf{A}\|$ là cạnh huyền của tam giác vuông và hai cạnh góc vuông có độ dài $\|A_T\mathbf{T}\| = |A_T|$ và $\|A_N\mathbf{N}\| = A_N$. Do vậy, áp dụng định lý Pythago ta được

$$\|\mathbf{A}\|^2 = A_T^2 + A_N^2$$

$$A_N = \sqrt{\|\mathbf{A}\|^2 = A_T^2}$$

Công thức này được dùng để tính A_N trong các ví dụ sau đây

Ví dụ 10.4.2. Tìm các thành phần của gia tốc trên đường xoắn ốc
Một vật di chuyển dọc theo một dốc thoải xoắn ốc (xem hình 10.36) của một đường xoắn ốc với véctơ vị trí $\mathbf{R}(t) =< \cos t, \sin t, t >$. Tìm thành phần tiếp tuyến và pháp tuyến của gia tốc.

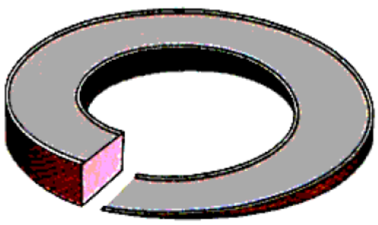


Figure 10.36 Helical ramp

Giải.

$$V = \frac{d\mathbf{R}}{dt} =< -\sin t, \cos t, 1 >$$
$$\frac{ds}{dt} = \|\mathbf{V}\| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1 = \sqrt{2}}$$
$$A_T = \frac{d^2 s}{dt^2}$$

$$A = \frac{d\mathbf{V}}{dt} =< -\cos t, -\sin t, 0 >$$
$$A_N = \sqrt{\|\mathbf{A}\|^2 - A_T^2} = \sqrt{(\sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t})^2 - 0^2} = \sqrt{1} = 1$$

□

Thành phần tiếp tuyến và pháp tuyến của gia tốc tương ứng là 0 và 1. Điều này có nghĩa là gia tốc thỏa mãn

$$\mathbf{A} = A_T\mathbf{T} + A_N\mathbf{N} = (0)\mathbf{T} + (1)\mathbf{N} = \mathbf{N}$$

Nói cách khác, véctơ gia tốc là véctơ pháp tuyến đơn vị chính, và gia tốc luôn vuông góc với quỹ đạo của đường xoắn ốc.

10.4.2 Ứng dụng

Chúng ta đã nắm được cách tính các thành phần tiếp tuyến và pháp tuyến của gia tốc A_T và A_N. Bây giờ ta sẽ thử qua vài ví dụ ứng dụng. Trước hết, theo định luật thứ 2 của Newton về chuyển động, tất cả lực tác động lên vật chuyển động khối lượng m thỏa mãn $\mathbf{F} = m\mathbf{A}$, với $\mathbf{A}$ là gia tốc của vật. Bởi vì $\mathbf{A} = A_T + A_N$, ta có

$$\mathbf{F} = m\mathbf{A} = (mA_T)\mathbf{T} + (mA_N)\mathbf{N} = F_T\mathbf{T} + F_N\mathbf{N}$$

với

$$F_T = m\frac{d^2 s}{dt^2} \text{ và } F_N = m\kappa\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$$

Ví dụ, kinh nghiệm thực tiễn cho thấy ô tô bị trượt nếu đột ngột chuyển hướng với vận tốc vừa phải hoặc đổ dốc nghiêng ở vận tốc cao. Theo cái nhìn toán học, "đột ngột chuyển hướng" xảy ra khi bán kính của độ cong $\rho = 1/\kappa$ nhỏ (đồng nghĩa với κ lớn), và vận tốc cao nghĩa là ds/dt lớn. Trong cả 2 trường hợp

$$F_N = m\kappa\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$$

sẽ tương đối lớn, và ô tô sẽ ở trên đường (quỹ đạo của nó) chỉ khi (giả sử không có rào chắn) thỏa mãn lực ma sát giữa lốp xe và mặt đường lớn. (xem hình 10.37)

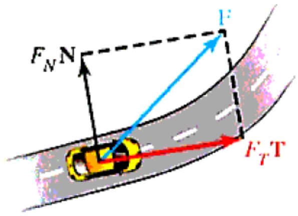


Figure 10.37 Tendency to skid

Khi lực, khối lượng, và gia tốc liên hệ nhau, thông thường để biểu diễn khối lượng m theo slug ($1slug \approx 14.59kg$) của vật mà trọng lượng(sức nặng) được tính bằng pound. Từ định nghĩa ta có

$$m = \frac{W}{g}$$

với g là gia tốc trọng trường ($g \approx 32ft/s^2$).

Ví dụ 10.4.3. Mô hình chuyển động: Xu hướng trượt của xe cộ.
Một xe có trọng lượng $2700lb$ ôm cua trên đường bằng phẳng với vận tốc $56ft/s$ (khoảng $38mi/h$). Nếu bán kính của vòng cua là $70ft$ thì lực ma sát cần bao nhiêu để giữ xe khỏi bị trượt?

Giải. Lực có xu hướng đẩy xe ra khỏi đường là $F_N = m\kappa\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$, với m là khối lượng của xe và κ là độ cong của đường. Đây là lực phải cân bằng với lực ma sát nếu xe không bị trượt. Ta biết rằng $\frac{ds}{dt} = 56ft/s$ và bởi vì trọng lượng của xe $W = 2700lb$ nên khối lượng của nó là $m = \frac{W}{g} = \frac{2700}{32} \approx 84.38slugs$.
Vì bán kính quay là $70ft$ nên ta có $\kappa = \frac{1}{70}$, và

$$F_N = \left(\frac{2700}{32}slugs\right)\left(\frac{1}{70ft}\right)\left(56\frac{ft}{s}\right)^2 = 3780\frac{lb.s^2}{ft}.\frac{1}{ft}\frac{ft^2}{s^2} = 3780lb.$$

□

Một số ứng dụng quan trọng trong chuyển động của vật dọc theo quỹ đạo với vận tốc không đổi $\frac{ds}{dt}$, và khi điều này xảy ra, gia tốc **A** có thể có duy nhất thành phần pháp tuyến do $\frac{d^2s}{dt^2} = 0$

Định lý 10.4.3 (Gia tốc của vật di chuyển với vận tốc không đổi)**.** *Gia tốc của 1 vật chuyển động vận tốc không đổi luôn trực giao với hướng của chuyển động*

Chứng minh. Lưu ý rằng chúng ta thực sự không cần biết về các thành phần của gia tốc để chứng minh định lý này. Khi ta nói vận di chuyển với tốc độc không đổi nghĩa là $\|\mathbf{R}'(t)\|$ là hằng số, và theo định lý 10.4, ta kết luận ngay được rằng $\mathbf{R}'(t)$ trực giao cới đạo hàm $\mathbf{R}''(t) = \mathbf{A}(t)$. Nhưng $\mathbf{R}'(t)$ chỉ ra rằng hướng của vật chuyển động dọc theo quỹ đạo của nó, điều này có nghĩa rằng gia tốc **A** trực giao với hướng chuyển động. □

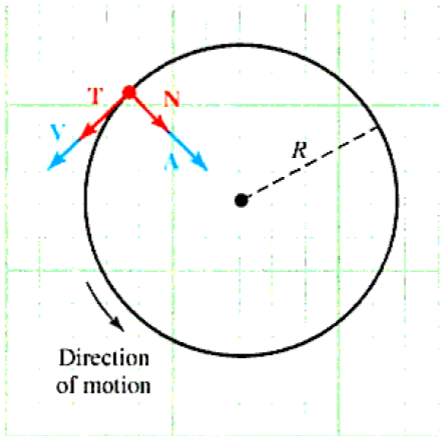
Một ứng dụng khác của kết quả này là một vật di chuyển với vận tốc không đổi v_0 dọc theo đường tròn bán kính R (hay $\kappa = 1/R$) thì gia tốc hướng vào tâm của đường tròn và có độ lớn

$$A_N = \kappa \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{1}{R}v_0^2$$

(xem hình 10.38.) Nếu vận tốc không đổi là v_0, và đường có bán kính R, gia tốc là

$$\mathbf{A} = \frac{v_0^2}{R}\mathbf{N}$$

Hình 10.38 Vật chuyển động với vận tốc không đổi trên đường tròn.



Ví dụ 10.4.4. Mô hình ứng dụng: Chu kỳ của vệ tinh.
Một vệ tinh nhân tạo di chuyển với tốc độ không đổi trên một quỹ đạo tròn ổn định $20000km$ bên trên bề mặt trái đất. Hỏi vệ tinh tốn bao nhiêu thời gian để hoàn thành một vòng đi?

Giải. Đặt m là khối lượng của vệ tinh và v là vận tốc. Ta sẽ giả thiết rằng trái đất là một hình cầu bán kính $6440km$, nên độ cong của đường đi là $\kappa = 1/R$, với

$$R = \underbrace{6440 \text{ km}}_{\text{Bán kính của trái đất}} + \overbrace{20000 \text{ km}}^{\text{độ cao}} = 26440 \text{ km}.$$

là khoảng cách của vệ tinh tính từ tâm của trái đất. Vệ tinh vẫn giữ được quỹ đạo ổn định khi độ lớn của lực $F_c = mv^2/R$ sinh ra bởi tốc độ thay đổi của vận tốc tiếp tuyến, gọi là gia tốc hướng tâm (centripetal), bằng với độ lớn của lực F_g của trọng lực, nhưng ngược hướng. (xem hình 10.39).
Hình 10.39: Một vệ tinh trong một quỹ đạo ổn định; độ lớn của lực hướng tâm F_c bằng độ lớn của lực F_g của trọng lực, nhưng ngược hướng.

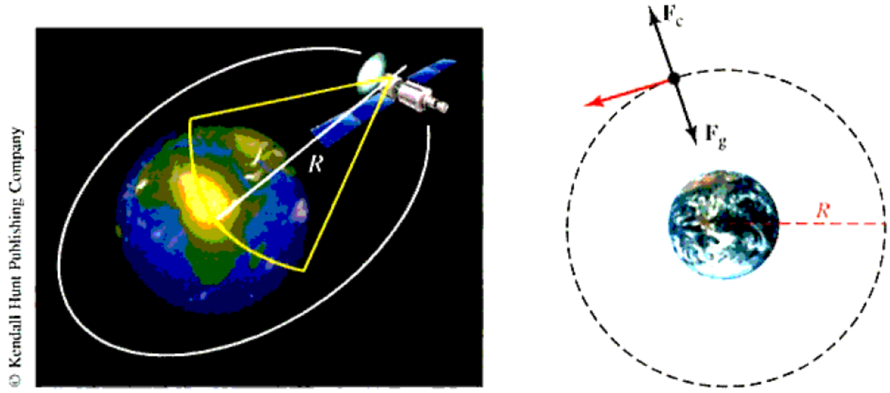


Figure 10.39 A satellite in a stable orbit; the magnitude of the centripetal force $\mathbf{F}_c$ equals the magnitude of the force $\mathbf{F}_g$ due to gravity, but points in the opposite direction

Theo định luật vạn vật hấp dẫn của Newton thì $\|F_g\| = \dfrac{GmM}{R^2}$ với M là khối lượng của trái đất và G là hằng số trọng lực. Do đó, để ổn định ta phải có

$$\frac{mv^2}{R} = \frac{GmM}{R^2}$$

từ đó ta có $v = \sqrt{GM/R}$. Thực nghiệm chỉ ra rằng $GM = 398600km^3/s^2$, và bằng việc thế $R = 26440$, ta tính được

$$v\sqrt{\frac{GM}{R}} = \sqrt{\frac{398600}{26440}} \approx 3.88273653$$

Với ví dụ này, ta thấy rằng tốc độ của vệ tinh xấp xỉ $3.883km/s$.
Cuối cùng, giả sử T là thời gian cần để vệ tinh thực hiện bay một vòng quanh trái

đất (gọi là chu kỳ của vệ tinh). Mỗi chu kỳ, vệ tinh đi quãng đường bằng với chu vi của đường tròn bán kính $R = 26440km$, vận tốc $v\ km/s$, ta phải có $vT = 2\pi R$, do vậy nên thời gian (tính theo giây) là

$$T = \frac{2\pi R}{v} \approx \frac{2\pi(26440km)}{388273653} \approx 42786.16852$$

hoặc xấp xỉ 713 phút (11 giờ 53 phút). $\square$

BÀI TẬP CHƯƠNG 10

Bài tập 10.1

1. Tìm miền xác định của các hàm vectơ sau:

   a) $F(t) = -\frac{1}{t-2}\mathbf{k}$

   b) $F(t) = (\sin t)\mathbf{i} + (\cos t)\mathbf{j} + (\tan t)\mathbf{k}$

   c) $F(t) + G(t)$, với $F(t) = 3r\mathbf{j} + t^{-1}\mathbf{k}$, $G(t) = (5t)\mathbf{i} - \sqrt{10-t}\,\mathbf{j}$

2. Mô tả đồ thị của các hàm vectơ sau hoặc vẽ đồ thị trong R^3:

   a) $F(t) = (\sin t)\mathbf{i} - (\cos t)\mathbf{j}$

   b) $F(t) = (2\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j}$

   c) $G(t) = e^t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$

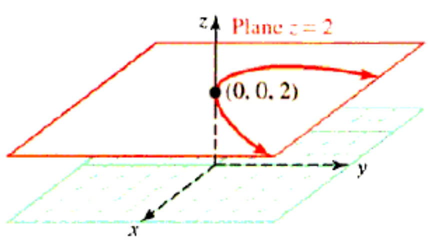
   d) $G(t) = (1-t)\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t\mathbf{k}$

   e) $G(t) = (2\sin t)\mathbf{i} + (2\cos t)\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$

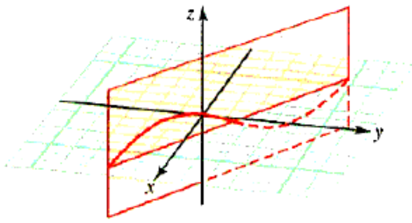
   f) $R(t) = (2\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j} - 2t\mathbf{k}$

3. Tìm hàm vectơ F nếu biết đồ thị là đường cong sau:

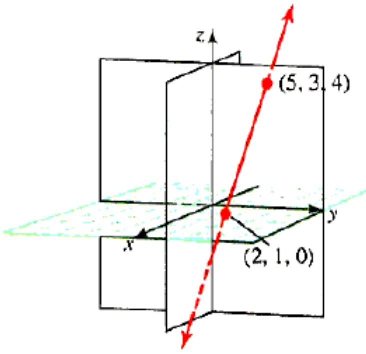
   a) $y = x^2$; $z = 2$



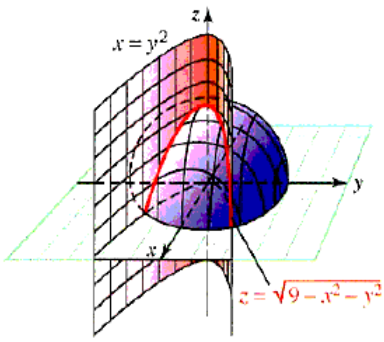
b) $x = 2t,\ y = 1 - t,\ z = \sin t$



c) $\frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{4}$



d) Đường cong là phần giao của bán cầu $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ và mặt cong $x = y^2$.



4. Tính các giới hạn sau

a) $\lim\limits_{t\to 1}[2t\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + e^t\mathbf{k}]$

b) $\lim\limits_{t\to 1}[3t\mathbf{i} - e^{2t}\mathbf{j} + (\sin \pi t)\mathbf{k}]$

c) $\lim\limits_{t\to 0}[\dfrac{\sin t}{t}\mathbf{i} - 3\dfrac{1-\cos t}{t}\mathbf{j} + e^{1-t}\mathbf{k}]$

5. Tìm tất cả các giá trị của t sao cho các hàm sau liên tục

a) $F(t) = t\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - (1-t)\mathbf{k}$

b) $G(t) = \frac{\mathbf{i}+2\mathbf{j}}{t^2+t}$

c) $G(t) = e^t[t\mathbf{i} + \frac{1}{t}\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$

e) $G(t) = (2\sin t)\mathbf{i} + (2\cos t)\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$

Bài tập 10.2

1. Tìm F' and F''

   a) $F(t) = t^2\mathbf{i} + t^{-1}\mathbf{j} + e^{2t}\mathbf{k}$
   b) $F(t) = (1-2s^2)\mathbf{i} + (s)\cos s\mathbf{j} - s\mathbf{k}$
   c) $F(t) = \sin s\mathbf{i} + (\cos s)\mathbf{j} + s^2\mathbf{k}$
   d) $F(t) = (\sin^2\theta)\mathbf{i} + (\cos 2\theta)\mathbf{j} + \theta^2\mathbf{k}$

2. Tính đạo hàm

   a) $f(x) = [x\mathbf{i} + (x+1)\mathbf{j}] \cdot [(2x)\mathbf{i} - (3x^2)\mathbf{j}]$
   b) $f(x) = (\cos x, x, -x) \cdot (\sec x, -x^2, 2x)$
   c) $g(x) = \|\langle \sin x, -2x, \cos x\rangle\|$
   d) $f(x) = \|[x\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}] + [(1-x)\mathbf{i} - e^x\mathbf{j}]\|$

3. Cho R là vector vị trí của một phân tử trong không gian tại thời điểm t. Tìm vectơ vận tốc, vectơ gia tốc, tốc độ và hướng chuyển động tại thời điểm t.

   a) $R(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}$ tại $t = 1$
   b) $R(t) = (1-2t)\mathbf{i} - t^2\mathbf{j} + e^t\mathbf{k}$ tại $t = 0$
   c) $R(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j} + 3t\mathbf{k}$ tại $t = \frac{\pi}{4}$
   d) $R(t) = (2\cos t)\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + (2\sin t)\mathbf{k}$ tại $t = \frac{\pi}{2}$
   e) $R(t) = e^t\mathbf{i} + e^{-t}\mathbf{j} + e^{2t}\mathbf{k}$ tại $t = \ln 2$
   f) $R(t) = (\ln t)\mathbf{i} + \frac{1}{2}t^3\mathbf{j} - t\mathbf{k}$ tại $t = 1$

4. Tìm vectơ tiếp tuyến với đồ thị của các hàm vectơ F tại các giá trị t.

   a) $F(t) = t^2\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + (t^3 + t^2)\mathbf{k}$ tại $t = 0, t = 1, t = -1$.
   b) $F(t) = \frac{\mathbf{ti} + \mathbf{t^2j} + \mathbf{t^3k}}{1+2t}$ tại $t = 0, t = 2$.

5. Tính tích phân vectơ bất định

   a) $\int \langle \cos t, \sin t, -2t\rangle dt$
   b) $\int \langle t\ln t, -\sin(1-t0, t\rangle dt$

6. Tìm vectơ vị trí $R(t)$ nếu biết vận tốc $V(t)$ và vị trí khởi đầu $R(0)$

   a) $V(t) = t^2\mathbf{i} - e^{2t}\mathbf{j} + \sqrt{t}\mathbf{k};\ R(0) = \mathbf{i} + 4\mathbf{j} - \mathbf{k}$
   b) $V(t) = 2\sqrt{t}bfi + (\cos t)\mathbf{j};\ R(0) = \mathbf{i} + \mathbf{j}$

Bài tập 10.3

1. Một vật thể chuyển động dọc theo đường cong trong không gian được cho dưới dạng tham số hóa. Tìm vận tốc và gia tốc

   a) $r = \sin\theta,\ \theta = 2t$

   b) $r = \frac{1}{1-\cos\theta},\ \theta = t$

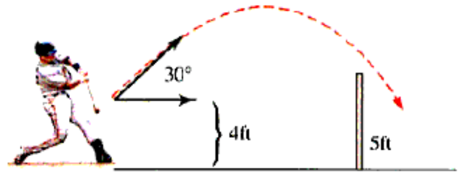
2. Một vật thể chuyển động trên một đường tròn có bán kính

$$R(t) = (a\cos wt)\mathbf{i} + (a\sin wt)\mathbf{j}$$

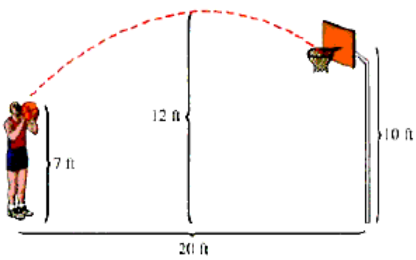
   với $w = \frac{d\theta}{dt}$. Chứng minh rằng vectơ vận tốc vuông góc với $R(t)$.

3. Một viên đạn được bắn từ mặt đất với vận tốc đầu là 167 feet/giây. Nếu muốn viên đạn đi xa 600 feet thì nên bắn viên đạn với góc nghiêng bao nhiêu ?

4. Vận động viên Buster Posey đánh quả bóng với góc nghiêng 30^o với vận tốc 144 feet/giây. Nếu quả bóng cách mặt đất 4 feet khi bị đánh, độ cao tối đa mà quả bóng đạt được là bao nhiêu ? Quả bóng đi xa được bao nhiêu ? Quả bóng đi được bao xa khi quả bóng đang rơi xuống cách mặt đất 5 feet ?



5. Một vận động viên bóng rổ có thể ném trúng khi đứng cách xa 20 feet. Nếu cú ném từ độ cao 7 feet và quả bóng đạt độ cao tối đa 12 feet trước khi rơi vào rổ ở độ cao 10 feet thì vận tốc khởi đầu của quả bóng là bao nhiêu ?



Bài tập 10.4

1. Tìm các thành phần tiếp tuyến $T(t)$ và pháp tuyến $N(t)$ của đường cong $R(t)$.

   a) $R(t) = t^2\mathbf{i} + t^3\mathbf{j}, \quad t \neq 0$

   b) $R(t) = t^2\mathbf{i} + \sqrt{t}\mathbf{j}, \quad t > 0$

c) $R(t) = (e^t \cos t)\mathbf{i} + (e^t \sin t)\mathbf{j}$

d) $R(t) = (\sin t)\mathbf{i} - (\cos t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}$

2. Tìm độ cong của các đường cong tại các điểm được cho.

   a) $y = x + \frac{1}{x}$, tại $x = 2$

   b) $y = \ln x$ tại $x = 1$

   c) $y = x - \frac{1}{9}x^2$ tại $x = 3$

3. Cho đường cong
$$R(t) = (\sin t)\mathbf{i} + (\cos t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}$$

   a) Tìm vectơ tiếp tuyến đơn vị tại điểm trên đường cong ứng với $t = \pi$.

   b) Tìm độ cong khi $t = \pi$.

   c) Tìm độ dài của đường cong từ $t = 0$ đến $t = \pi$.

4. Cho đường cong C có phương trình tham số $x = 32t,\ y = 16t^2 - 4$.

   a) Vẽ đồ thị.

   b) Tìm vectơ tiếp tuyến đơn vị tại $t = 3$.

   c) Tìm đường kính của độ cong của điểm P trên C với $t = 3$.

5. Tìm độ cong cực đại của đường cong $y = e^{2x}$.

6. Tìm độ cong của hình cycloid được định nghĩa bởi
$$x = t - \sin t, \quad y = 1 - \cos t.$$
Vẽ đường cong ứng với $0 \le t \le 2\pi$ và vẽ đường tròn mật tiếp tại điểm tương ứng với $t = \frac{\pi}{2}$.