Mục lục

11 ĐẠO HÀM RIÊNG **3**
11.1 Hàm nhiều biến . . . 3
11.1.1 Các khái niệm cơ bản . . . 3
11.1.2 Đường mức và mặt . . . 4
11.1.3 Đồ thị của hàm hai biến . . . 7
11.2 Giới hạn và liên tục . . . 9
11.2.1 Tập đóng, tập mở trong $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ . . . 9
11.2.2 Giới hạn của hàm hai biến . . . 10
11.2.3 Liên tục . . . 13
11.2.4 Giới hạn và liên tục của hàm ba biến . . . 15
11.3 Đạo hàm riêng . . . 16
11.3.1 Phép lấy đạo phân riêng . . . 16
11.3.2 Hệ số góc . . . 18
11.3.3 Tốc độ thay đổi . . . 19
11.3.4 Đạo hàm riêng cấp cao . . . 20
11.4 Mặt phẳng tiếp xúc, xấp xỉ và sự khả vi . . . 22
11.4.1 Mặt phẳng tiếp xúc . . . 22
11.4.2 Xấp xỉ số gia . . . 23
11.4.3 Vi phân toàn phần . . . 26
11.4.4 Sự khả vi . . . 27
11.5 Quy tắc dây chuyền . . . 28
11.5.1 Quy tắc dây chuyền một biến . . . 28
11.5.2 Các mở rộng của quy tắc dây chuyền . . . 30
11.6 Đạo hàm theo hướng và Gradient . . . 31
11.6.1 Đạo hàm theo hướng . . . 31
11.6.2 Gradient . . . 34
11.6.3 Đối với hàm ba biến . . . 35
11.6.4 T´inh vuông góc của Gradient . . . 36
11.6.5 Tiếp diện và pháp tuyến . . . 37
11.7 Cực trị của hàm hai biến . . . 39
11.7.1 Cực trị tương đối . . . 40
11.7.2 Tiêu chuẩn đạo hàm riêng cấp hai . . . 41

11.7.3 Cực trị tuyệt đối của hàm liên tục 44
11.8 Nhân tử Lagrange 48
11.8.1 Phương pháp nhân tử Lagrange 48
11.8.2 Nhân tử Lagrange với hai biến 52

Chương 11

ĐẠO HÀM RIÊNG

Chương này mở rộng các phương pháp vi phân hàm một biến sang hàm nhiều biến. Chúng ta sẽ học cách lấy đạo hàm của những hàm này và cách thể hiện những đạo hàm đó như là hệ số góc và tốc độ thay đổi. Chúng ta cũng sẽ học quy tắc dây chuyền tổng quát và phương pháp tối ưu hóa một hàm số. Các phương pháp vectơ trong chương 9 và 10 đóng vai trò quan trọng trong chương này.

Trong nhiều tình huống thực tế, giá trị của một đại lượng phụ thuộc vào giá trị của hai hay nhiều đại lượng khác. Chẳng hạn, lượng nước trong bể chứa phụ thuộc vào lượng mưa và lượng nước cư dân địa phương sử dụng, vì vậy có thể xem nó như một hàm theo hai biến độc lập. Cường độ dòng điện trong mạch là một hàm theo bốn biến: suất điện động, điện dung, điện trở và độ tự cảm. Chúng ta sẽ phân tích một loạt các mô hình sử dụng các kỹ thuật và công cụ được phát triển trong chương này.

11.1 Hàm nhiều biến

11.1.1 Các khái niệm cơ bản

Các đại lượng vật lý thường phụ thuộc vào từ hai biến trở lên. Chẳng hạn, chúng ta có thể xem nhiệt độ T tại những điểm khác nhau (x, y) trên một tấm kim loại. Trong trường hợp này, T có thể được xem như một hàm theo hai biến vị trí x và y. Bằng cách mở rộng ký hiệu hàm một biến, ta có thể ký hiệu mối quan hệ này là $T(x, y)$.

Định nghĩa 11.1.1. Một hàm hai biến là một quy tắc f mà tương ứng mỗi cặp $(x,\ y)$ trong một tập D với một số duy nhất $f\,(x,\ y)$. Tập D được gọi là miền xác định của hàm số, và các giá trị tương ứng của $f\,(x,\ y)$ tạo thành miền giá trị của f.

Các hàm ba biến hoặc nhiều biến hơn có thể được định nghĩa tương tự. Chẳng hạn, nhiệt độ có thể khác nhau không chỉ tại các vị trí khác nhau trên tấm kim loại, mà còn khác nhau theo thời gian t, trong trường hợp này nhiệt độ sẽ được ký hiệu

$T(x, y, t)$. Thỉnh thoảng, ta sẽ xem xét các hàm từ bốn biến trở lên, nhưng để cho đơn giản, ta sẽ tập trung chủ yếu vào hàm hai hoặc ba biến.

Khi xét một hàm hai biến f, ta có thể viết $z = f(x, y)$ và xem x, y là các biến độc lập và z là biến phụ thuộc. Tập xác định của f là tập hợp lớn nhất của những điểm trong mặt phẳng mà biểu thức của hàm số được xác định.

Ví dụ 11.1.1. Cho $f(x,\ y) = \sqrt{9 - x^2 - 4y^2}$.

a. Tính $f(2,\ 1)$ và $f(2t,\ t^2)$.

b. Mô tả miền xác định và miền giá trị của f.

Giải. a. $f(2,\ 1) = \sqrt{9 - 2^2 - 4(1)^2} = 1$.

$f(2t,\ t^2) = \sqrt{9 - (2t)^2 - 4(t^2)^2} = \sqrt{9 - 4t^2 - 4t^4}$.

b. Miền xác định của f là tập hợp tất cả các cặp sắp thứ tự $(x,\ y)$ sao cho $\sqrt{9 - x^2 - 4y^2}$ xác định. Ta phải có $9 - x^2 - 4y^2 \geq 0$, tương đương $x^2 + 4y^2 \leq 9$. Như vậy, miền xác định của f là tập hợp tất cả các điểm $(x,\ y)$ ở trong và trên đường êlíp $x^2 + 4y^2 = 9$. Miền giá trị của f là tập hợp tất cả các số $z = \sqrt{9 - x^2 - 4y^2}$ với $(x,\ y)$ thuộc miền $x^2 + 4y^2 \leq 9$. Như vậy miền giá trị là đoạn $0 \leq z \leq 3$.

□

CÁC PHÉP TOÁN HÀM HAI BIẾN

Nếu $f(x,\ y)$ và $g(x,\ y)$ là các hàm hai biến với miền xác định là D, thì

Tổng	$(f+g)(x,\ y) = f(x,\ y) + g(x,\ y)$
Hiệu	$(f-g)(x,\ y) = f(x,\ y) - g(x,\ y)$
Tích	$(f.g)(x,\ y) = f(x,\ y) . g(x,\ y)$
Thương	$\left(\frac{f}{g}\right)(x,\ y) = \frac{f(x,\ y)}{g(x,\ y)},\ g(x,\ y) \neq 0$

Một hàm đa thức theo x và y là tổng của các hàm có dạng Cx^my^n với $m,\ n$ là các số nguyên không âm và C là một hằng số; chẳng hạn, $3x^5y^3 - 7x^2y + 2x - 3y + 11$ là một đa thức theo x và y. Một hàm hữu tỷ là thương của một hàm đa thức chia cho một hàm đa thức khác không. Khái niệm và ký hiệu tương tự áp dụng cho những hàm từ ba biến trở lên.

11.1.2 Đường mức và mặt

Tương tự với trường hợp hàm một biến, ta định nghĩa đồ thị của hàm $f(x,\ y)$ là tập hợp tất cả các bộ ba thành phần được sắp thứ tự $(x,\ y,\ z)$ sao cho $(x,\ y)$ thuộc miền xác định của f và $z = f(x,\ y)$. Đồ thị của $f(x,\ y)$ là một mặt trong $\mathbb{R}^3$ mà có hình chiếu của nó lên mặt phẳng Oxy là miền xác định D.

Thường không dễ vẽ đồ thị của một hàm hai biến mà không có sự trợ giúp của phần mềm máy tính. Một cách vẽ được minh họa ở hình 11.2. Khi vẽ đồ thị mặt bậc hai trong phần 9.7, ta đã sử dụng vết của một đồ thị trong một mặt phẳng, ta sử dụng ý tưởng này vào đây.

Chú ý rằng khi mặt phẳng $z = C$ giao với mặt $z = f(x, y)$, ta được vết có phương trình $f(x, y) = C$. Tập hợp các điểm (x, y) trong mặt phẳng Oxy thỏa mãn $f(x, y) = C$ được gọi là **đường mức** (hay **đường đồng mức**) của f tại C, và một họ toàn bộ các đường mức được sinh ra khi C thay đổi trên tập giá trị của f. Ta có thể hình dung một vết như một “lát mỏng” của mặt (đồ thị của f) tại một vị trí đặc biệt, và hình dung đường mức như hình chiếu của “lát mỏng” này lên mặt phẳng Oxy. Bằng cách vẽ các thành phần trong họ đường mức này lên mặt phẳng Oxy, ta được một bản đồ địa hình của mặt $z = f(x, y)$.

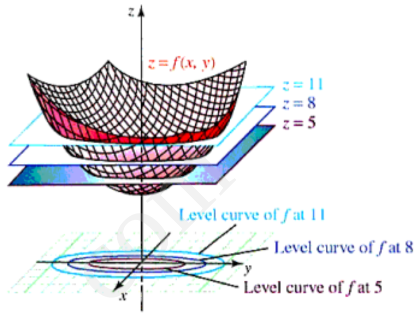
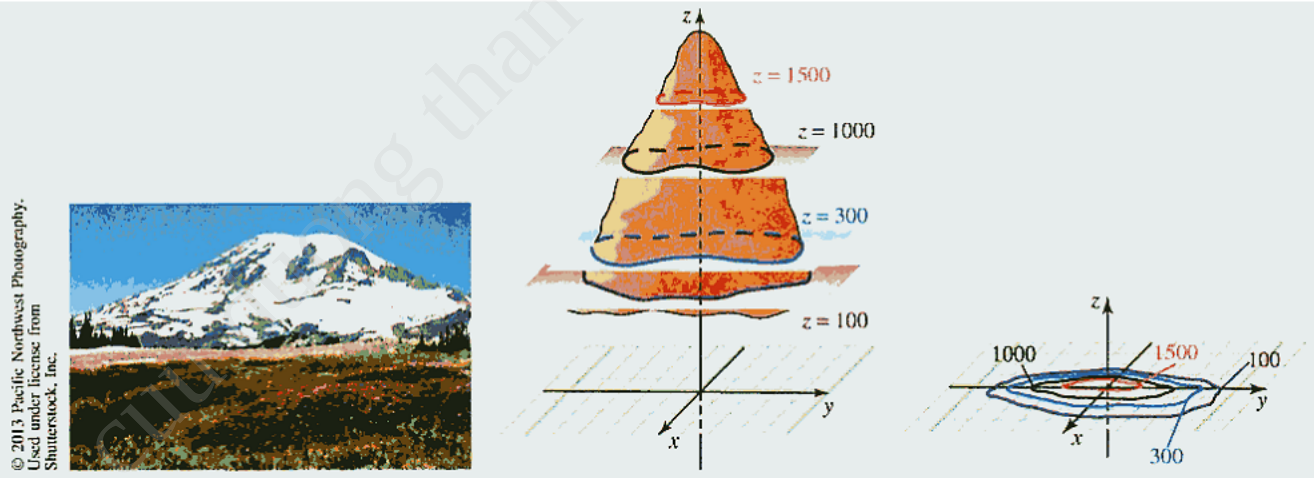
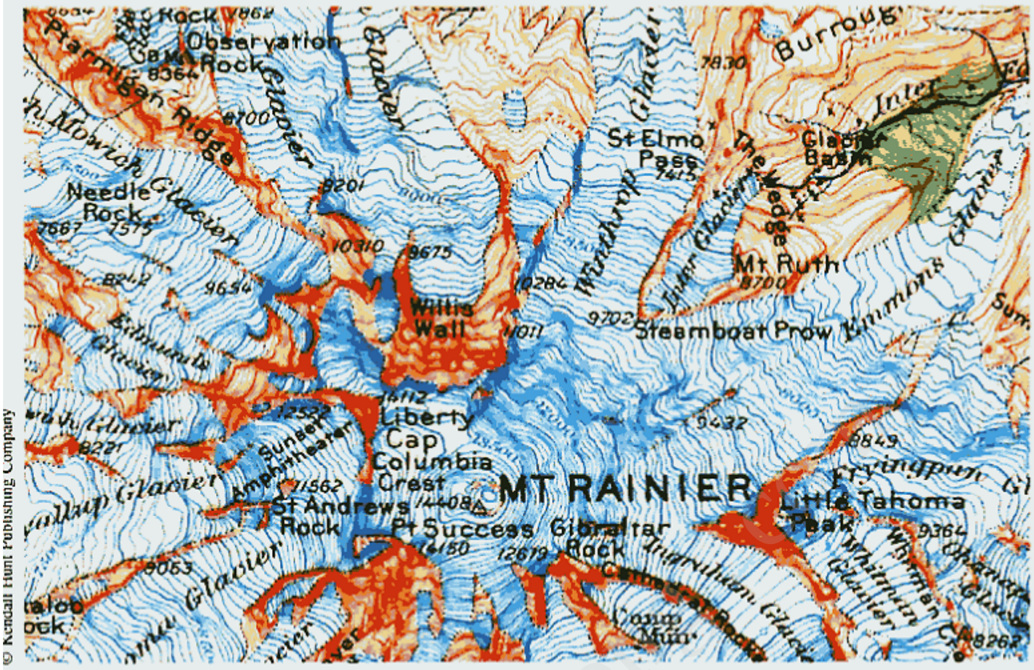


Figure 11.2 Graph of a function of two variables



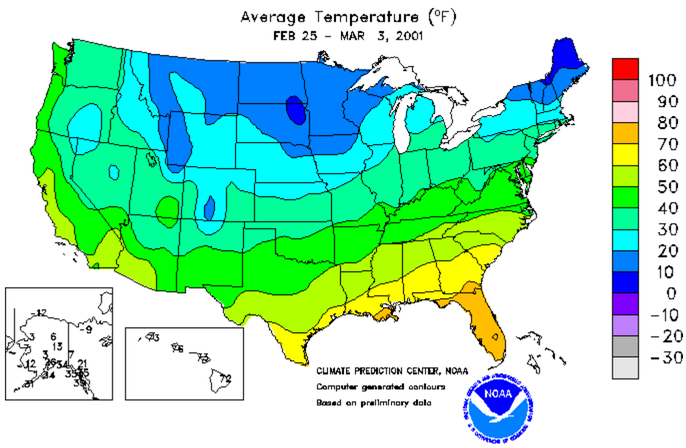
a. Mt. Rainier **b.** The surface as a mountain **c.** Level curves yield a topographic map



d. Topographic map of Mt. Rainier

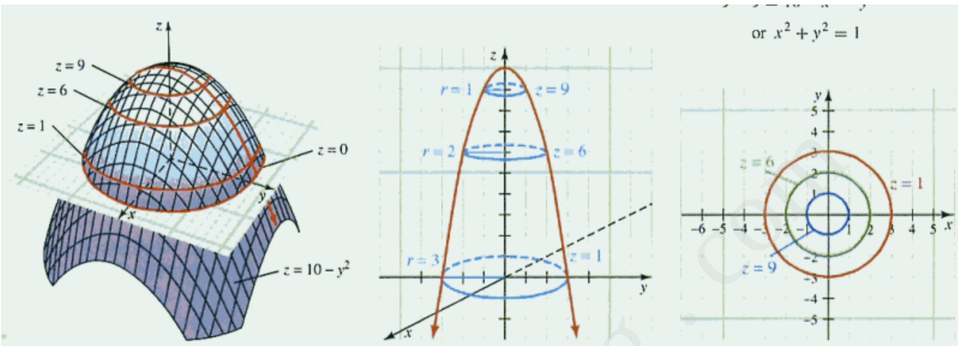
Figure 11.3 Level curves of a surface

Chẳng hạn, hãy tưởng tượng mặt $z = f(x, y)$ là một "ngọn núi" và ta muốn vẽ một hình hai chiều hình dáng của mặt này. Để vẽ, ta biểu diễn các đường có cùng độ cao so với mực nước biển bằng cách vẽ họ các đường mức trong mặt phẳng và ghim một "lá cờ" với mỗi đường mức để chỉ ra độ cao tương ứng (xem hình 11.3c). Chú ý rằng các vùng trên bản đồ nơi các đường chồng lên nhau tương ứng với các đoạn dốc của ngọn núi. Một bản đồ địa hình thật sự của Mount Rainier được chỉ ra ở hình 11.3d. Bạn có thể thấy các đường mức ở dự báo thời tiết trên báo hoặc trên tivi, ở đó các đường mức của nhiệt độ bằng nhau được gọi là các **đường đẳng nhiệt** (xem hình 11.4). Ngoài ra đường mức còn dùng để biểu diễn áp suất bằng nhau (gọi là các **đường đẳng áp**) và những đường của hiệu điện thế (gọi là các **đường đẳng thế**).



Ví dụ 11.1.2.[Vẽ các đường mức] Vẽ một số đường mức của hàm số $f(x,\ y) = 10 - x^2 - y^2$.

Giải. Đồ thị của $z = f(x,\ y)$ là mặt được chỉ ra ở hình 11.5a (vẽ bằng máy tính). Hình 11.5b chỉ ra các vết của đồ thị hàm f trong các mặt phẳng $z = 1,\ z = 6,\ z = 9$, và các đường mức tương ứng được chỉ ra ở hình 11.5c. Một bảng giá trị được chỉ ra ở dưới.



a. **Interactive** Computer generated graph of surface

b. Simplified graph showing traces

c. Level curves

Figure 11.5 Three ways of viewing the surface $z = 10 - x^2 - y^2$

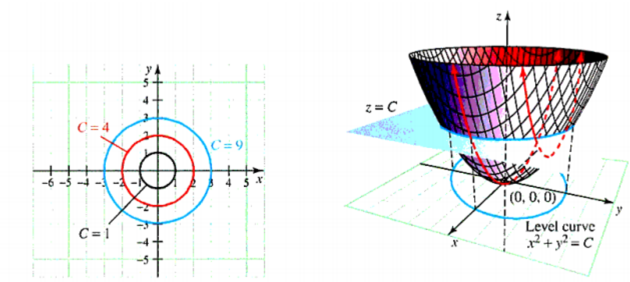
□

11.1.3 Đồ thị của hàm hai biến

Các đường mức của một hàm số $f(x,\ y)$ cung cấp thông tin về các tiết diện (lát cắt) của mặt $z = f(x,\ y)$ vuông góc với trục Oz. Tuy nhiên, chúng ta có thể có được một hình vẽ hoàn chỉnh hơn của mặt này bằng cách kiểm tra thêm các tiết diện theo các hướng khác. Phương pháp này được sử dụng để vẽ đồ thị trong Ví dụ 11.1.3.

Ví dụ 11.1.3. Dùng các đường mức của hàm số $f(x,\ y) = x^2 + y^2$ để vẽ đồ thị hàm f.

Giải. Đường mức $x^2 + y^2 = 0$ (khi $C = 0$) là điểm $(0,\ 0)$, và với $C > 0$, đường mức $x^2 + y^2 = C$ là đường tròn tâm $(0,\ 0)$ bán kính $\sqrt{C}$ (Hình 11.6a). Không có điểm $(x,\ y)$ thỏa $x^2 + y^2 = C$ với $C < 0$.



a. **Interactive** The level curves are circles

b. The cross sections perpendicular to the y-axis are parabolas (shown in white)

Figure 11.6 The graph of the function $f(x, y) = x^2 + y^2$

Ta có thể thu được thêm thông tin về hình dáng của mặt này bằng cách kiểm tra các tiết diện vuông góc với hai hướng chính còn lại: đó là trục Ox và trục Oy. Các mặt phẳng tiết diện vuông góc với trục Ox có dạng $x = A$ và giao với mặt $z = x^2 + y^2$ tạo ra các parabol có dạng $z = A^2 + y^2$. Chẳng hạn, tiết diện của mặt phẳng $x = 5$ giao với mặt này là parabol $z = 25 + y^2$. Đó là tập hợp các điểm $(5,\ y,\ 25 + y^2)$ khi y biến thiên. Tương tự, mặt phẳng tiết diện vuông góc với trục Oy có dạng $y = B$ và giao với mặt $z = x^2 + y^2$ là parabol dạng $z = x^2 + B^2$ (Hình 11.6b).

Tóm lại, mặt $z = x^2 + y^2$có tiết diện là các hình tròn trong các mặt phẳng vuông góc với trục Oz (hình 11.6a) và là các parabol theo hai hướng chính còn lại. Vì mặt này được tạo thành bằng cách xoay một parabol quanh trục của nó, nên nó được gọi là một paraboloid tròn xoay. □

Khái niệm đường mức có thể được tổng quát áp dụng cho các hàm từ hai biến trở lên. Đặc biệt, nếu f là hàm ba biến $x,\ y,\ z$ thì tập nghiệm của phương trình $f(x,\ y,\ z) = C$ là một miền trong $\mathbb{R}^3$được gọi là **mặt mức** (hay **mặt đồng mức**) của f tại C.

Ví dụ 11.1.4.(Mặt đẳng nhiệt)
Giả sử một miền của $\mathbb{R}^3$ được làm nóng sao cho nhiệt độ T của nó tại mỗi điểm $(x,\ y,\ z)$ là $T(x,\ y,\ z) = 100 - x^2 - y^2 - z^2$ độ C (độ Celsius). Mô tả các mặt phẳng đẳng nhiệt với $T > 0$.

Giải. Mặt đẳng nhiệt được cho bởi $T(x,\ y,\ z) = k$ với k là hằng số; đó là $x^2 + y^2 + z^2 = 100 - k$. Nếu $100 - k > 0$ thì đồ thị của $x^2 + y^2 + z^2 = 100 - k$ là mặt cầu bán kính $\sqrt{100 - k}$ và tâm $(0,\ 0,\ 0)$. Khi $k = 100$, đồ thị là gốc tọa độ, và $T(0,\ 0,\ 0) = 100$. Khi nhiệt độ giảm thì hằng số k nhỏ hơn, và bán kính $\sqrt{100 - k}$ của mặt cầu lớn hơn. Như vậy, mặt đẳng nhiệt là các mặt cầu, và bán kính càng lớn thì mặt càng lạnh.

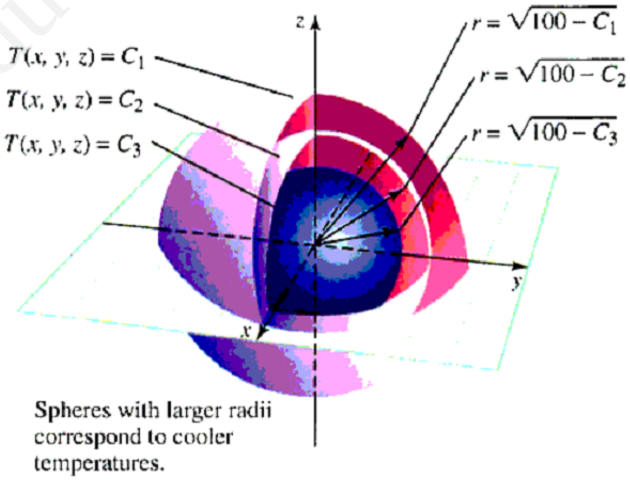


Figure 11.8 Isothermal surfaces for T

□

Khi xem các ví dụ trong mục này, chúng ta cần nhớ đồ thị của các mặt bậc hai (xem mục 9.7). Cũng sẽ có ích nếu bạn nhận diện ra các mặt bằng cách nhìn phương trình của chúng. Điều bạn cần nhớ được tóm tắt ở Bảng 9.2 (Chương 9).

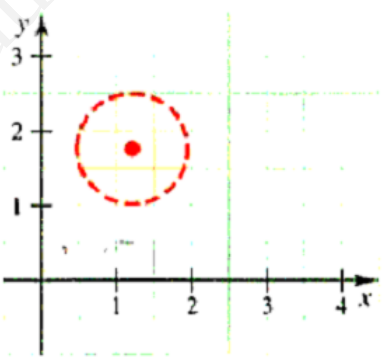
11.2 Giới hạn và liên tục

Giống như trong trường hợp một biến, khái niệm giới hạn đóng vai trò quan trọng trong giải tích của hàm nhiều biến. Ta tập trung vào hàm hai biến, tuy nhiên những khái niệm đã được thảo luận ở đây cũng áp dụng được cho các hàm từ ba biến trở lên.

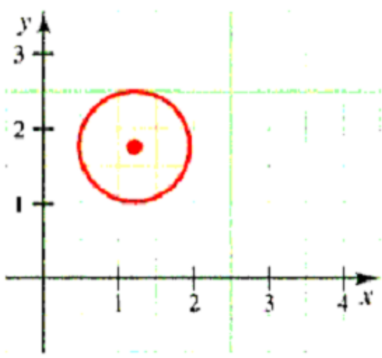
Hầu hết các hàm một biến được xét có miền xác định có thể được mô tả bằng các khoảng. Tuy nhiên, đối với những hàm từ hai biến trở lên thì đòi hỏi thuật ngữ và ký hiệu đặc biệt mà ta sẽ giới thiệu trong phần này, sau đó sử dụng chúng để thảo luận về giới hạn và liên tục đối với hàm hai biến.

11.2.1 Tập đóng, tập mở trong $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$

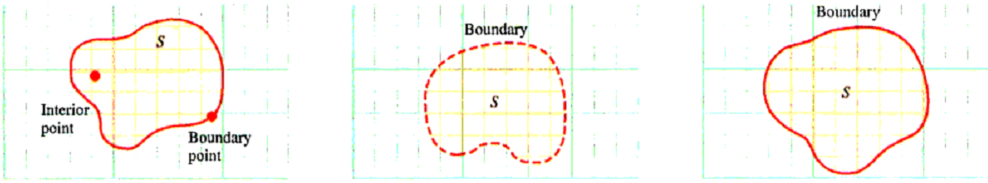
Một **đĩa mở** có tâm tại điểm $C\,(a,\ b)$ trong $\mathbb{R}^2$ là tập hợp tất cả các điểm $P\,(x,\ y)$ sao cho $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}<r$, với $r>0$ (hình 11.10a). Nếu tính luôn biên của đĩa này (tức là $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}\le r$), thì đĩa này được gọi là **đĩa đóng** (Hình 11.10b). Đĩa đóng, đĩa mở tương tự với khoảng đóng, khoảng mở trên một trục tọa độ. Một điểm P_0 được gọi là một **điểm trong** của một tập S trong $\mathbb{R}^2$ nếu có một đĩa mở nào đó có tâm tại P_0 nằm hoàn toàn trong S (hình 11.11a). Một điểm P_0 được gọi là **điểm biên** của S nếu mọi đĩa mở có tâm tại P_0 đều chứa cả những điểm thuộc S và những điểm không thuộc S. Tập hợp tất cả các điểm biên của S được gọi là biên của S. Tập S được gọi là đóng nếu nó chứa biên của nó (hình 11.11c). Tập rỗng và tập$\mathbb{R}^2$ là các tập vừa đóng, vừa mở.



a. Open disk



b. Closed disk



a. Interior points and boundary points of a set S
b. The set S is open if all its points are interior points
c. The set S is closed if it contains all its boundary points

Figure 11.11 Open and closed points in $\mathbb{R}^2$

Tương tự, **quả cầu mở** tâm tại $C(a,\ b,\ c)$ là tập tất cả các điểm $P(x,\ y,\ z)$ sao cho $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}<r$, với $r>0$. Một điểm P_0 là một **điểm trong** của tập S trong $\mathbb{R}^3$ nếu có một quả cầu mở tâm tại P_0 nằm hoàn toàn trong S, và một tập không rỗng S là một tập mở nếu tất cả các điểm thuộc nó đều là điểm trong. Một điểm P_0 là **điểm biên** của S nếu mọi quả cầu mở có tâm tại P_0 đều chứa cả điểm thuộc S và điểm không thuộc S. Tập S là **tập đóng** nếu nó chứa tất cả các điểm biên của nó. Tương tự $\mathbb{R}^2$ thì $\mathbb{R}^3$ cũng vừa là tập đóng, vừa là tập mở.

11.2.2 Giới hạn của hàm hai biến

Trong Chương 2, giới hạn $\lim_{x\to c} f(x)=L$ có nghĩa là $f(x)$ có thể làm cho gần bằng L một cách tùy ý bằng cách chọn x thích hợp gần bằng c (nhưng không bằng c). Đối với một hàm hai biến, ta viết

$$\lim_{(x,\ y)\to(x_0,\ y_0)} f(x,\ y)=L$$

có nghĩa là giá trị hàm $f(x,\ y)$ có thể làm cho gần bằng số L một cách tùy ý bằng cách chọn điểm $(x,\ y)$ thích hợp gần điểm $(x_0,\ y_0)$. Sau đây là định nghĩa chính xác của giới hạn.

Định nghĩa 11.2.1 (Giới hạn của hàm hai biến)**.** Giới hạn $\lim_{(x,\ y)\to(x_0,\ y_0)} f(x,\ y)=L$ có nghĩa là với mỗi số $\varepsilon>0$ cho trước, tồn tại một số $\delta>0$ sao cho khi điểm $(x,\ y)$ thuộc miền xác định D thỏa $0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$ thì $|f(x,\ y)-L|<\varepsilon$.

Chú ý rằng nếu $\lim_{(x,\ y)\to(x_0,\ y_0)} f(x,\ y)=L$ thì với số $\varepsilon>0$ cho trước, giá trị hàm $f(x,\ y)$ phải nằm trong khoảng $(L-\varepsilon,\ L+\varepsilon,)$ khi điểm $(x,\ y)$ thuộc miền xác định của f, khác điểm $P_0(x_0,\ y_0)$ và nằm bên trong đĩa có tâm P_0 bán kính δ (Hình 11.12).

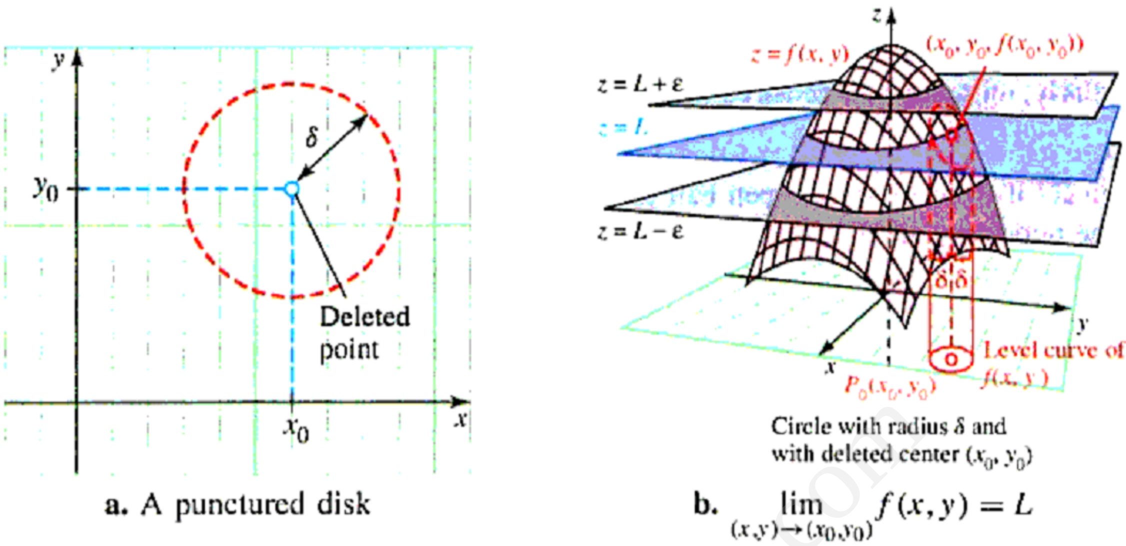


Figure 11.12 Limit of a function of two variables

Khi xét $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ ta cần kiểm tra x tiến đến c từ cả hai hướng (giới hạn trái và giới hạn phải). Tuy nhiên, đối với hàm hai biến, ta viết $(x,\ y) \to (x_0,\ y_0)$ có nghĩa là điểm $(x,\ y)$ tiến đến $(x_0,\ y_0)$ dọc theo bất kỳ đường cong đi qua $(x_0,\ y_0)$ nào trong miền xác định của f. Nếu giới hạn

$$\lim_{(x,\ y)\to(x_0,\ y_0)} f(x,\ y) = L$$

không giống nhau đối với mọi đường trong miền xác định của f, thì giới hạn không tồn tại.

Ví dụ 11.2.1.(Tính giới hạn của hàm hai biến)

$$\lim_{(x,\ y)\to(0,\ 0)} \frac{x^2 + x - xy - y}{x - y}$$

Giải. Chú ý rằng với $x \neq y$ thì $f(x,\ y) = \frac{x^2+x-xy-y}{x-y} = \frac{(x+1)(x-y)}{x-y} = x + 1$. Như vậy $\lim\limits_{(x,\ y)\to(0,\ 0)} \frac{x^2+x-xy-y}{x-y} = \lim\limits_{(x,\ y)\to(0,\ 0)} (x+1) = 1$. □

Ví dụ 11.2.2.(Chỉ ra giới hạn không tồn tại)

Cho $f(x,\ y) = \frac{2xy}{x^2+y^2}$, hãy chỉ ra

$$\lim_{(x,\ y)\to(0,\ 0)} f(x,\ y)$$

không tồn tại bằng cách tính giới hạn này dọc theo trục Ox , trục Oy và dọc theo đường thẳng $y = x$.

Giải. Chú ý rằng mẫu số bằng 0 tại $(0,\ 0)$, vì thế $f(0,\ 0)$ không xác định. Nếu cho $(x,\ y)$ tiến đến gốc tọa độ dọc theo trục Ox (tức là $y = 0$) thì $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2x(0)}{x^2+0} = \lim\limits_{x\to 0} 0 = 0$ vì thế $f(x,\ y) \to 0$ khi $(x,\ y) \to (0,\ 0)$ dọc theo đường $y = 0$ (và $x \neq 0$). Ta tìm được kết quả tương tự nếu cho $(x,\ y)$ tiến đến gốc tọa độ dọc theo trục Oy (tức là $x = 0$).

Tuy nhiên, dọc theo đường thẳng $y = x$, giá trị hàm (với $x \neq 0$) là

$$f(x,\ x) = \frac{2x^2}{x^2 + x^2} = 1,$$

vì thế $\frac{2xy}{x^2+y^2} \to 1$ khi $(x,\ y) \to (0,\ 0)$ dọc theo đường $y = x$. Do $f(x,\ y)$ tiến đến số khác nhau khi $(x,\ y) \to (0,\ 0)$ dọc theo các đường cong khác nhau, nên f không có giới hạn tại gốc tọa độ. $\square$

Ví dụ 11.2.3.(Chỉ ra giới hạn không tồn tại)
Chỉ ra

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4 + y^2}$$

không tồn tại.

Giải. Nếu làm như Ví dụ 2, ta lấy các giới hạn khi $(x,\ y) \to (0,\ 0)$ dọc theo trục Ox, trục Oy và đường thẳng $y = x$. Tất cả các đường này đều có dạng tổng quát là $y = mx$. Như vậy, dọc theo đường $y = mx$:

$$\lim_{(x,\ y)\to(0,\ 0)} \frac{x^2y}{x^4 + y^2} = \lim_{(x,\ y)\to(0,\ 0)} \frac{x^2(mx)}{x^4 + (mx)^2} = \lim_{(x,\ y)\to(0,\ 0)} \frac{mx}{x^2 + m^2} = 0.$$

Tuy nhiên, nếu ta cho $(x,\ y)$ tiến đến $(0,\ 0)$ dọc theo parabol $y = x^2$:

$$\lim_{(x,\ y)\to(0,\ 0)} \frac{x^2y}{x^4 + y^2} = \lim_{(x,\ y)\to(0,\ 0)} \frac{x^2(x^2)}{x^4 + (x^2)^2} = \lim_{(x,\ y)\to(0,\ 0)} \frac{x^4}{2x^4} = \frac{1}{2}.$$

Vì khi $(x,\ y)$ tiến đến $(0,\ 0)$ dọc theo đường $y = mx$ cho giá trị giới hạn khác với khi dọc theo đường parabol $y = x^2$, nên ta kết luận giới hạn đã cho không tồn tại. $\square$

Chú ý 11.2.1. Thông thường có thể chỉ ra một giới hạn không tồn tại bằng những phương pháp được minh họa ở Ví dụ 11.2.2 và 11.2.3. Tuy nhiên, không thể chứng minh rằng

$$\lim_{(x,\ y)\to(0,\ 0)} f(x,\ y)$$

tồn tại bằng cách chỉ ra giá trị giới hạn của $f(x,\ y)$ là như nhau dọc theo mọi đường cong đi qua $(x_0,\ y_0)$ vì có quá nhiều những đường cong như thế.

Ta vừa thấy rằng rất khó để có chỉ ra giới hạn đã cho tồn tại. Tuy nhiên, giới hạn của những hàm hai biến mà biết trước sự tồn tại có thể được tính toán giống như hàm một biến. Sau đây là danh sách các quy tắc cơ bản cho việc tính giới hạn.

CÁC QUY TẮC TÍNH GIỚI HẠN HÀM HAI BIẾN

Giả sử $\lim\limits_{(x,\ y)\to(x_0,\ y_0)} f(x,\ y) = L$ và $\lim\limits_{(x,\ y)\to(x_0,\ y_0)} g(x,\ y) = M$. Khi đó, với hằng số a bất kỳ,

Quy tắc nhân vô hướng	$\lim\limits_{(x,\ y)\to(x_0,\ y_0)} [af](x,\ y) = aL$
Quy tắc tổng	$\lim\limits_{(x,\ y)\to(x_0,\ y_0)} [f+g](x,\ y) = L + M$
Quy tắc tích	$\lim\limits_{(x,\ y)\to(x_0,\ y_0)} [fg](x,\ y) = LM$
Quy tắc thương	$\lim\limits_{(x,\ y)\to(x_0,\ y_0)} \left[\frac{f}{g}\right](x,\ y) = \frac{L}{M}$, nếu $M \neq 0$

Ví dụ 11.2.4. Giả sử các giới hạn sau đều tồn tại, hãy tính

a. $\lim\limits_{(x,\ y)\to(4,\ 3)} (x^2 + xy + y^2)$

b. $\lim\limits_{(x,\ y)\to(1,\ 2)} \frac{2xy}{x^2+y^2}$

Giải. a. $\lim\limits_{(x,\ y)\to(4,\ 3)} (x^2 + xy + y^2) = (4)^2 + (4)(3) + (3)^2 = 37$

b. $\lim\limits_{(x,\ y)\to(1,\ 2)} \frac{2xy}{x^2+y^2} = \frac{\lim\limits_{(x,\ y)\to(1,\ 2)} 2xy}{\lim\limits_{(x,\ y)\to(1,\ 2)} (x^2+y^2)} = \frac{2(1)(2)}{1^2+2^2} = \frac{4}{5}$

□

11.2.3 Liên tục

Định nghĩa 11.2.2. Hàm $f(x,\ y)$ gọi là **liên tục tại điểm** $(x_0,\ y_0)$ nếu

1. $f(x_0,\ y_0)$ xác định;
2. $\lim\limits_{(x,\ y)\to(x_0,\ y_0)} f(x,\ y)$ tồn tại;
3. $\lim\limits_{(x,\ y)\to(x_0,\ y_0)} f(x,\ y) = f(x_0,\ y_0)$.

Hàm f **liên tục trên tập** S nếu nó liên tục tại mọi điểm trong S.

Chú ý rằng hàm f liên tục tại $(x_0,\ y_0)$ nếu giá trị của hàm $f(x,\ y)$ gần $f(x_0,\ y_0)$ với mọi $(x,\ y)$ trong miền xác định của f mà đủ gần với $(x_0,\ y_0)$. Về mặt hình học, điều này có nghĩa là f liên tục nếu mặt $z = f(x,\ y)$ không có các "lỗ hổng" (holes) hoặc các "kẽ hở" (gaps).

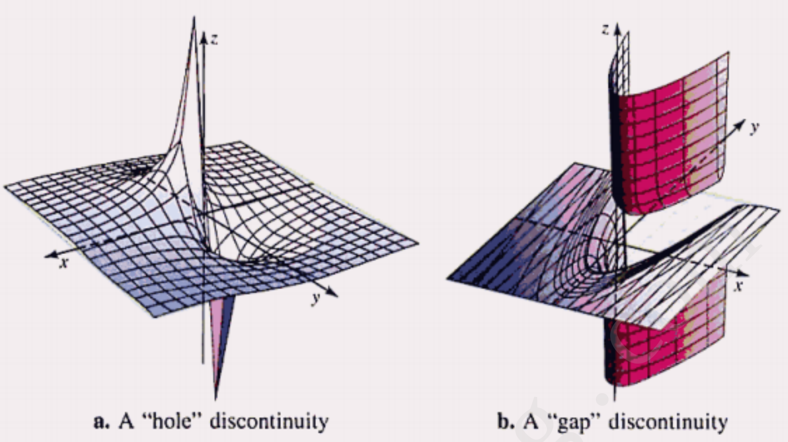


Figure 11.14 Two types of discontinuity

Từ các tính chất cơ bản của giới hạn, ta có thể suy ra rằng, nếu f và g là các hàm liên tục trên tập S thì các hàm sau đây liên tục $f+g$, af, fg, f/g tại những điểm mà $g \neq 0$, $\sqrt[n]{f}$ tại những nơi mà nó xác định.

Nếu F là một hàm hai biến sao cho $F(x,\ y)$ liên tục tại $(x_0,\ y_0)$ và G là hàm một biến mà liên tục tại $F(x_0,\ y_0)$, thì hàm hợp $G \circ F$ liên tục tại $(x_0,\ y_0)$.

Nhiều hàm thông thường (hàm hai biến) liên tục tại các điểm hàm xác định. Chẳng hạn, một đa thức theo hai biến $x^3y^2 + 3xy^3 - 7x + 2$ liên tục trên toàn mặt phẳng, và hàm hữu tỷ theo hai biến liên tục tại các điểm để đa thức mẫu khác không. Trong tài liệu này, nếu không nói gì thêm thì các hàm hai biến được xét ở đây đều liên tục tại những nơi mà nó xác định.

Ví dụ 11.2.5. Hãy kiểm tra tính liên tục của các hàm số sau:

1. $f(x,\ y) = \frac{x-y}{x^2+y^2}$

2. $f(x,\ y) = \frac{1}{y-x^2}$

Giải. 1. Hàm f là hàm hữu tỷ của x và y (vì $x-y$ và x^2+y^2 đều là các đa thức), nên nó chỉ không liên tục tại các điểm mà mẫu bằng 0; tức là tại $(0,\ 0)$.

2. Đây cũng là một hàm hữu tỷ và chỉ không liên tục tại các điểm mà mẫu bằng 0; đó là tại các điểm mà $y - x^2 = 0$. Như vậy, hàm này liên tục tại tất cả các điểm ngoại trừ các điểm nằm trên parabol $y = x^2$.

□

Ví dụ 11.2.6. Chỉ ra hàm f liên tục tại $(0,\ 0)$, với

$$f(x,\ y) = \begin{cases} y\sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0\quad\ , & x = 0 \end{cases}$$

Giải. Vì hàm số bị triệt tiêu dọc theo trục Oy, nên ta chỉ cần phân tích tại các điểm $(x,\ y)$, với $x \neq 0$. Để chứng minh tính liên tục tại $(0,\ 0)$, ta phải chỉ ra rằng với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại $\delta > 0$ sao cho $|f(x,\ y) - f(0,\ 0)| = |f(x,\ y)| < \varepsilon$, với mọi $0 < x^2 + y^2 < \delta^2,\ x \neq 0$ (Ở đây ta sử dụng $x^2 + y^2$ và δ^2 thay cho $\sqrt{x^2 + y^2}$ và δ cho tiện). Nếu $x = 0$ thì $|f(x,\ y)| = 0$. Nếu $x \neq 0$, chú ý rằng $|f(x,\ y)| \leq |y|$ vì $\left|\sin \frac{1}{x}\right| \leq 1$ với $x \neq 0$. Như vậy, trong cả hai trường hợp, $|f(x,\ y)| \leq |y|$. Cũng có, nếu $(x,\ y)$ nằm trong đĩa $x^2 + y^2 < \delta^2$, thì các điểm $(0,\ y)$ mà thỏa $y^2 < \delta^2$ cũng nằm trên đĩa này (cho $x = 0$ trong $x^2 + y^2 < \delta^2$). Nói cách khác, các điểm thỏa $|y| < \delta$ nằm trong đĩa này, và nếu ta đặt $\delta = \varepsilon$ thì $|f(x,\ y) - f(0,\ 0)| \leq |y| < \delta = \varepsilon$, với mọi $0 < x^2 + y^2 < \delta^2$ □

11.2.4 Giới hạn và liên tục của hàm ba biến

Các khái niệm ta vừa giới thiệu đối với hàm hai biến trong $\mathbb{R}^2$ mở rộng một cách tự nhiên cho các hàm ba biến trong $\mathbb{R}^3$. Cụ thể, giới hạn

$$\lim_{(x,\ y,\ z)\to(x_0,\ y_0,\ z_0)} f(x,\ y,\ z) = L$$

có nghĩa là với mỗi số $\varepsilon > 0$, tồn tại một số $\delta > 0$ sao cho

$$|f(x,\ y,\ z) - L| < \varepsilon$$

với mọi $(x,\ y,\ z)$ là điểm trong miền xác định của f sao cho

$$0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} < \delta.$$

Hàm $f(x,\ y,\ z)$ là liên tục tại điểm $P_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ nếu

1. $f(x_0,\ y_0,\ z_0)$ xác định;
2. $\lim\limits_{(x,\ y,\ z)\to(x_0,\ y_0,\ z_0)} f(x,\ y,\ z)$ tồn tại;
3. $\lim\limits_{(x,\ y,\ z)\to(x_0,\ y_0,\ z_0)} f(x,\ y,\ z) = f(x_0,\ y_0,\ z_0)$

Các hàm ba biến thông thường được xét ở đây liên tục tại các điểm mà nó xác định. Ta xét một ví dụ minh họa cách xác định tập gián đoạn của hàm ba biến.

Ví dụ 11.2.7. (Tính liên tục đối với hàm ba biến) Hàm số sau liên tục tại những điểm $(x,\ y,\ z)$ nào? $f(x,\ y,\ z) = \frac{3}{\sqrt{x^2+y^2-2z}}$.

Giải. Hàm $f(x,\ y,\ z)$ liên tục ngoại trừ tại các điểm mà nó không xác định; đó là tại $x^2 + y^2 - 2z \leq 0$. Như vậy, $f(x,\ y,\ z)$ liên tục tại mọi điểm không nằm trong hay nằm trên paraboloid $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$. □

11.3 Đạo hàm riêng

Trong nhiều bài toán liên quan đến hàm nhiều biến, mục tiêu là tìm ra đạo hàm của các hàm này theo một trong các biến của nó khi tất cả các biến còn lại được xem là hằng số. Trong phần này, ta xem xét khái niệm trên và ta sẽ thấy nó có thể được dùng để tìm ra hệ số góc và tộc độ thay đổi như thế nào.

11.3.1 Phép lấy đạo phân riêng

Việc biết được một hàm hai biến có thể đổi tương ứng thành hàm một biến như thế nào thường quan trọng. Chẳng hạn, theo định luật khí lý tưởng, áp suất khí liên hệ với nhiệt độ và thể tích của nó theo công thức $P = \frac{kT}{V}$, với k là hằng số. Nếu nhiệt độ được giữ không đổi trong khi thể tích được thay đổi, thì ta muốn biết ảnh hưởng của nó đến tốc độ thay đổi của áp suất. Tương tự, nếu thể tích được giữ không đổi trong khi nhiệt độ được phép thay đổi, thì ta muốn biết tác động của nó lên tốc độ thay đổi của áp suất. Quá trình lấy vi phân của hàm nhiều biến theo một trong các biến của nó, trong khi các biến còn lại giữ cố định được gọi là phép lấy vi phân riêng, và kết quả đạo hàm là đạo hàm riêng của hàm số này. Nhớ rằng đạo hàm của một hàm một biến f được định nghĩa là giới hạn của tỷ số sai phân,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Đạo hàm riêng theo x hoặc y được định nghĩa tương tự.

Định nghĩa 11.3.1. Nếu $z = f(x,\ y)$ thì đạo hàm riêng của f theo x và y lần lượt là các hàm số f_x và f_y, được định nghĩa

$$f_x(x,\ y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x,\ y) - f(x,\ y)}{\Delta x}$$

và

$$f_y(x,\ y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x,\ y+\Delta y) - f(x,\ y)}{\Delta y}$$

nếu các giới hạn trên tồn tại.

Chú ý rằng đối với phép lấy đạo hàm riêng của hàm hai biến $z = f(x,\ y)$, ta tìm đạo hàm riêng theo x bằng cách xem y như hằng số trong khi lấy vi phân của hàm theo x. Tương tự cho phép lấy vi phân riêng theo biến y.

Ví dụ 11.3.1. Cho $f(x,\ y) = x^3y + x^2y^2$, tìm a. f_x b. f_y.

Giải. a. Với f_x, giữ y không đổi và tìm đạo hàm theo x:

$$f_x(x,\ y) = 3x^2y + 2xy^2.$$

b. Với f_y, giữ x không đổi và tìm đạo hàm theo y:

$$f_y(x,\ y) = x^3 + 2x^2y.$$

□

MỘT SỐ KÝ HIỆU THAY THẾ

Với $z = f(x,\ y)$, đạo hàm riêng f_x và f_y được ký hiệu bởi

$$f_x(x,\ y) = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} f(x,\ y) = z_x = D_x(f)$$

và

$$f_y(x,\ y) = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} f(x,\ y) = z_y = D_y(f).$$

Các giá trị đạo hàm riêng của $f(x,\ y)$ tại điểm $(a,\ b)$ được ký hiệu bởi

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(a,\ b)} = f_x(a,\ b) \text{ và } \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(a,\ b)} = f_y(a,\ b).$$

Ví dụ 11.3.2. (Tìm và tính đạo hàm riêng)
Cho $z = x^2 \sin(3x + y^3)$. a. Tính $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\left(\frac{\pi}{3},\ 0\right)}$ b. Tính z_y tại $(1,\ 1)$.

Giải. a. $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x\sin(3x + y^3) + 3x^2\cos(3x + y^3)$,
$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\left(\frac{\pi}{3},\ 0\right)} = 2\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\pi + 3\left(\frac{\pi}{3}\right)^2\cos\pi = -\frac{\pi^2}{3}$.

b. $z_y = 3x^2y^2\cos(3x + y^3)$, $z_y(1,\ 1) = 3\cos 4$.

□

Ví dụ 11.3.3.(Đạo hàm riêng của hàm ba biến)
Cho $f(x,\ y,\ z) = x^2 + 2xy^2 + yz^3$, hãy xác định a. f_x b. f_y c. f_z.

Giải. a. Với f_x, ta hãy xem f như hàm chỉ của biến x với y và z được xem như các hằng số: $f_x(x,\ y,\ z) = 2x + 2y^2$.

b. $f_y(x,\ y,\ z) = 4xy + z^3$.

c. $f_z(x,\ y,\ z) = 3yz^2$.

□

Ví dụ 11.3.4.(Đạo hàm riêng hàm ẩn)
Cho z là hàm ẩn theo biến x và y được xác định bởi phương trình $x^2z + yz^3 = x$. Xác định $\partial z/\partial x$, $\partial z/\partial y$.

Giải. Lấy vi phân hàm ẩn theo biến x, xem y là hằng số

$$2xz + x^2\frac{\partial z}{\partial x} + 3yz^2\frac{\partial z}{\partial x} = 1.$$

Giải phương trình trên ta được

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1 - 2xz}{x^2 + 3yz^2}.$$

Tương tự, xem x là hằng số và lấy vi phân hàm ẩn theo biến y, ta được

$$x^2\frac{\partial z}{\partial y} + z^3 + 3yz^2\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

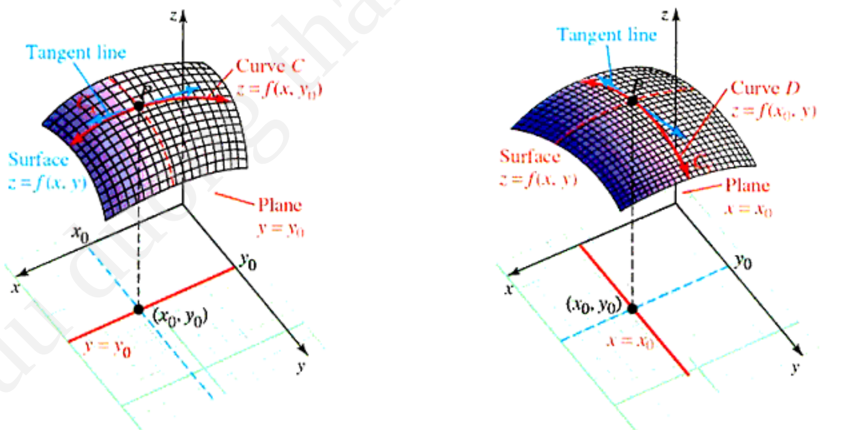
Vì thế

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-z^3}{x^2 + 3yz^2}.$$

□

11.3.2 Hệ số góc

Một minh họa hình học của đạo hàm riêng được chỉ ra ở Hình 11.16. Trong hình 11.16a, mặt phẳng $y = y_0$ cắt mặt $z = f(x, y)$ theo đường cong C song song với mặt phẳng Oxz. Khi đó, C là vết của mặt $z = f(x, y)$ trong mặt phẳng $y = y_0$. Phương trình của đường cong này là $z = f(x, y_0)$, và vì y_0 cố định nên hàm này chỉ phụ thuộc vào x. Như vậy, ta có thể tính hệ số góc tiếp tuyến đối với đường cong C tại điểm $P(x_0, y_0, z_0)$ trong mặt phẳng $y = y_0$ bằng cách lấy vi phân $f(x, y_0)$ theo biến x và tính đạo hàm này tại $x = x_0$. Hệ số góc là $f_x(x_0, y_0)$, chính là giá trị của đạo hàm riêng f_x tại (x_0, y_0). Tương tự cho minh họa đối với $f_y(x_0, y_0)$ được chỉ ra ở Hình 11.16b.



a. The tangent line in the plane $y = y_0$ to the curve C at the point P has slope $f_x(x_0, y_0)$

b. The tangent line in the plane $x = x_0$ to the curve D at the point P has slope $f_y(x_0, y_0)$

Figure 11.16 Slope interpretation of the partial derivative

ĐẠO HÀM RIÊNG NHƯ LÀ HỆ SỐ GÓC CỦA TIẾP TUYẾN

Đường thẳng song song với mặt phẳng Oxz và tiếp xúc với mặt $z = f(x,\ y)$ tại điểm $P_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ có hệ số góc $f_x(x_0,\ y_0)$. Tương tự, đường thẳng tiếp xúc với mặt $z = f(x,\ y)$ tại P_0 và song song với mặt phẳng Oyz có hệ số góc $f_y(x_0,\ y_0)$.

Ví dụ 11.3.5. Tìm hệ số góc của đường thẳng song song với mặt phẳng Oxz và tiếp xúc với mặt $z = x\sqrt{x+y}$ tại điểm $P(1,\ 3,\ 2)$.

Giải. Nếu $f(x,\ y) = x\sqrt{x+y}$ thì hệ số góc cần tìm là $f_x(1,\ 3)$. Ta có $f_x(x,\ y) = \frac{x}{2\sqrt{x+y}} + \sqrt{x+y}$, do đó $f_x(1,\ 3) = \frac{9}{4}$. □

11.3.3 Tốc độ thay đổi

Đạo hàm của hàm một biến có thể được biểu diễn như tốc độ thay đổi, và tương tự cho đạo hàm riêng.

ĐẠO HÀM RIÊNG XEM NHƯ TỐC ĐỘ THAY ĐỔI

Khi điểm $(x,\ y)$ di chuyển từ điểm cố định $P_0(x_0,\ y_0)$ thì hàm $f(x,\ y)$ thay đổi với tốc độ $f_x(x_0,\ y_0)$ theo hương dướng của trục Ox và $f_y(x_0,\ y_0)$ theo hướng dương của trục Oy.

Ví dụ 11.3.6.(Đạo hàm riêng như là tốc độ thay đổi)
Trong một mạch điện với suất điện động (EMF) E (volt) và điện trở R (ohm) thì cường độ dòng điện là $I = E/R$ (ampere). Tìm đạo hàm riêng ngay khi $E = 120$ và $R = 15$ và giải thích các đạo hàm này như là tốc độ thay đổi.

Giải. Vì $I = ER^{-1}$ nên ta có

$$\frac{\partial I}{\partial E} = R^{-1},\quad \frac{\partial I}{\partial R} = -ER^{-2}$$

và như vậy, khi $E = 120,\ R = 15$ ta tìm được $\frac{\partial I}{\partial E} \approx 0.0667; \quad \frac{\partial I}{\partial R} \approx -0.5333$. Điều này có nghĩa là nếu điện trở cố định là 15 (ohm) thì cường độ dòng điện tăng (vì đạo hàm dương) tương ứng với tốc độ 0.0667 ampere mỗi volt khi suất điện động là 120 volt. Tương tự, với suất điện động EMF cố định thì cường độ dòng điện giảm (vì đạo hàm âm) tương ứng với tốc độ 0.5333 ampere mỗi ohm khi điện trở là 15 ohm. □

11.3.4 Đạo hàm riêng cấp cao

Đạo hàm riêng của một hàm lại là một hàm số, vì thể có thể lấy đạo hàm riêng của một đạo hàm riêng. Điều này rất giống với việc lấy đạo hàm cấp hai của hàm một biến nếu ta lấy liên tiếp hai đạo hàm riêng ứng với cùng một biến, và kết quả đạo hàm được gọi là đạo hàm riêng cấp hai ứng với biến đó. Tuy nhiên, ta cũng có thể lấy đjao hàm riêng ứng với một biến, sau đó lấy đạo hàm riêng thứ hai ứng với một biến khác, kết quả này gọi là đạo hàm riêng cấp hai hỗn hợp. Các đạo hàm riêng cấp cao của một hàm hai biến được ký hiệu ở bảng sau:

CÁC ĐẠO HÀM RIÊNG CẤP HAI

Cho $z = f(x,\ y)$.Các đạo hàm riêng cấp hai là

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = (f_x)_x = f_{xx},$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = (f_y)_y = f_{yy}.$$

Các đạo hàm riêng cấp hai hỗn hợp

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = (f_y)_x = f_{yx},$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = (f_x)_y = f_{xy}.$$

Ví dụ 11.3.7. Với $z = f(x,y) = 5x^2 - 2xy + 3y^3$, xác định các đạo hàm riêng cấp cao

1. $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.
2. $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$.
3. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.
4. $f_{xy}(3,2)$.

Giải. 1. a. $\frac{\partial z}{\partial y} = -2x + 9y^2$, $\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = -2.$

2. $\frac{\partial f}{\partial x} = 10x - 2y$; $\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = -2.$

3. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 10.$

4. $f_{xy}(3,\ 2) = -2.$

$\square$

Chú ý rằng từ phần a và b của ví dụ trên, có $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$. Đẳng thức của các đạo hàm hỗn hợp này không phải đúng với mọi hàm số, nhưng phần lớn các hàm chúng ta gặp thì điều này sẽ đúng. Định lý sau cung cấp những điều kiện thích hợp để đẳng thức này đúng.

Định lý 11.3.1 (Sự bằng nhau của các đạo hàm hỗn hợp)**.** *Nếu hàm $f(x,\ y)$ có các đạo hàm riêng cấp hai hỗn hợp f_{xy} và f_{yx} liên tục trên một khoảng mở chứa $(x_0,\ y_0)$ thì $f_{yx}(x_0,\ y_0) = f_{xy}(x_0,\ y_0)$.*

Ví dụ 11.3.8.(Đạo hàm riêng cấp cao của hàm hai biến)
Xác định $f_{xy},\ f_{yx},\ f_{xx},\ f_{xxy}$, với $f(x,\ y) = x^2 y e^y$

Giải. $f_x = 2xye^y$, $f_y = x^2 e^y + x^2 y e^y$, $f_{xy} = 2xe^y + 2xye^y$, $f_{yx} = 2xe^y + 2xye^y$, $f_{xx} = 2ye^y$, $f_{xxy} = (f_{xx})_y = 2e^y + 2ye^y$. $\square$

Một phương trình chứa các đạo hàm riêng được gọi là một phương trình đạo hàm riêng. Một phương trình đạo hàm riêng quan trọng là phương trình khuếch tán hày phương trình nhiệt

$$\frac{\partial T}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

với $T(x,\ t)$ là nhiệt độ trong một thanh mỏng tại vị trí x và thời gian t. Hằng số c được gọi là hệ số khuếch tán của vật liệu tạo thanh. Trong ví dụ sau, ta kiểm tra một hàm thỏa phương trình nhiệt.
Ví dụ 11.3.9.(Kiểm tra hàm thỏa mãn phương trình nhiệt) Kiểm tra $T(x,\ t) = e^{-t} \cos \frac{x}{c}$ thỏa phương trình nhiệt $\frac{\partial T}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$.

Giải. $\frac{\partial T}{\partial t} = -e^{-t} \cos \frac{x}{c}$; $\quad \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = -\frac{1}{c^2} e^{-t} \cos \frac{x}{c}$. Vì vậy T thỏa phương trình nhiệt $\frac{\partial T}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$. $\square$

Một định nghĩa tương tự có thể dùng cho hàm nhiều hơn hai biến. Chẳng hạn với hàm ba biến $f(x, y, z)$

$$f_{zzz} = \frac{\partial^3 f}{\partial z^3} = \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)\right]; \qquad f_{xyz} = \frac{\partial^3 f}{\partial z \partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right].$$

Ví dụ 11.3.10. Bằng cách tính toán trực tiếp, chỉ ra rằng $f_{xyz} = f_{yzx} = f_{zyx}$, với hàm

$$f(x,\ y,\ z) = xyz + x^2 y^3 z^4.$$

Giải.

$$f_x = yz + 2xy^3z^4, f_y = xz + 3x^2y^2z^4, f_z = xy + 4x^2y^3z^3.$$

$$f_{xy} = z + 6xy^2z^4, f_{yz} = x + 12x^2y^2z^3, f_{zy} = x + 12x^2y^2z^3.$$

Vậy

$$f_{xyz} = 1 + 24xy^2z^3; \quad f_{yzx} = 1 + 24xy^2z^3; \quad f_{zyx} = 1 + 24xy^2z^3.$$

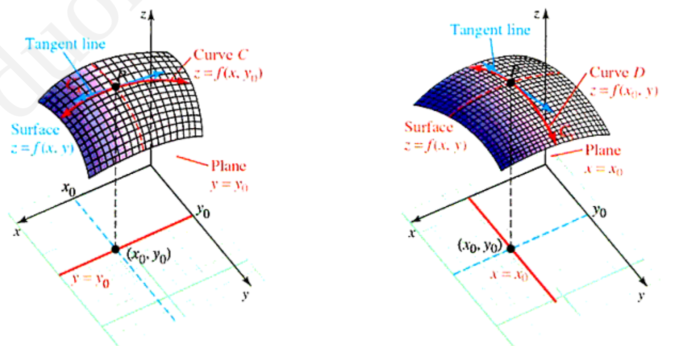
□

11.4 Mặt phẳng tiếp xúc, xấp xỉ và sự khả vi

Trong mục này chúng ta tìm phương trình của mặt phẳng tiếp xúc với một mặt tại một điểm cho trước trên mặt này và sau đó sử dụng mặt phẳng tiếp xúc này như một xấp xỉ cho giá trị của một điểm gần với điểm trên mặt. Điều này giúp ta giới thiệu số gia của một hàm hai biến và chỉ ra khái niệm này có thể được dùng như thế nào để định nghĩa sự khả vi.

11.4.1 Mặt phẳng tiếp xúc

Giả sử S là một mặt với phương trình $z = f(x, y)$, với f có các đạo hàm riêng cấp một liên tục f_x, f_y. Cho $P_0(x_0, y_0, z_0)$ là một điểm trên S, và cho C_1 là đường cong giao giữa S và mặt phẳng $x = x_0$, C_2 là đường cong giao giữa S và mặt phẳng $y = y_0$ (hình 11.18a). Đường thẳng T_1, T_2 tiếp xúc tương ứng với C_1, C_2 tại P_0 xác định duy nhất một mặt phẳng, và ta sẽ tìm ra mặt phẳng này thực sự chứa đường thẳng tiếp xúc với mọi đường cong trơn trên S mà đi qua P_0 (hình 11.18b).



a. The tangent line in the plane $y = y_0$ to the curve C at the point P has slope $f_x(x_0, y_0)$

b. The tangent line in the plane $x = x_0$ to the curve D at the point P has slope $f_y(x_0, y_0)$

Figure 11.16 Slope interpretation of the partial derivative

Để tìm một phương trình cho mặt phẳng tiếp xúc tại P_0 , xem xét pháp vectơ $\mathbf{N} = A\,\mathbf{i} + B\,\mathbf{j} + C\,\mathbf{k}$. Mặt phẳng này có thể biểu diễn

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Nếu $C \neq 0$, chia cả hai vế cho C và đặt $a = -A/C$, $b = -B/C$ ta được

$$z - z_0 = a\left(x - x_0\right) + b\left(y - y_0\right)$$

Giao của mặt phẳng này và mặt $x = x_0$ là đường tiếp tuyến T_1, mà ta biết hệ số góc của đường này là $f_y\left(x_0,\ y_0\right)$. Thay $x = x_0$ trong phương trình của mặt phẳng tiếp xúc, ta tìm T_1 có dạng điểm-hệ số góc

$$z - z_0 = b\left(y - y_0\right).$$

Vì vậy ta phải có $b = f_y\left(x_0,\ y_0\right) = \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(x_0, y_0)}$. Tương tự, thay $y = y_0$, ta được $z - z_0 = a\left(x - x_0\right)$ biểu diễn tiếp tuyến T_2 với hệ số góc $a = f_x\left(x_0,\ y_0\right)$. Tổng quát

PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẲNG TIẾP XÚC

Giả sử S là một mặt với phương trình $z = f\left(x,\ y\right)$ và cho $P_0\left(x_0,\ y_0,\ z_0\right)$ là một điểm trên S mà tại đó tồn tại mặt phẳng tiếp xúc. Khi đó phương trình của mặt phẳng tiếp xúc với S tại P_0 là $z - z_0 = f_x\left(x_0,\ y_0\right)\left(x - x_0\right) + f_y\left(x_0,\ y_0\right)\left(y - y_0\right)$ Nếu phương trình này được viết dưới dạng $Ax + By + Cz + D = 0$ thì ta nói phương trình của mặt phẳng này ở dạng chuẩn tắc.

Ví dụ 11.4.1. Tìm phương trình của mặt phẳng tiếp xúc với mặt $z = \tan^{-1}\frac{y}{x}$ tại điểm $P_0\left(1,\ \sqrt{3},\ \frac{\pi}{3}\right)$.

Giải. $f_x\left(x,\ y\right) = \frac{-y}{x^2+y^2}$, $f_x\left(1, \sqrt{3}\right) = \frac{-\sqrt{3}}{4}$, $f_y\left(x,\ y\right) = \frac{x}{x^2+y^2}$, $f_y\left(1, \sqrt{3}\right) = \frac{1}{4}$. Phương trình của mặt phẳng tiếp xúc là $z - \frac{\pi}{3} = \left(\frac{-\sqrt{3}}{4}\right)\left(x - 1\right) + \frac{1}{4}\left(y - \sqrt{3}\right)$. Dạng chuẩn tắc là $3\sqrt{3}x - 3y + 12z - 4\pi = 0$. □

11.4.2 Xấp xỉ số gia

Trong chương 3, ta thấy rằng đường thẳng tiếp xúc với đường cong $y = f\left(x\right)$ tại điểm $P\left(x_0,\ y_0\right)$ là một đường thẳng gần với hình dáng đường cong nhất trong lân cận của điểm P. Tức là nếu f khả vi tại $x = x_0$ và số gia Δx nhỏ thích hợp thì

$$\Delta y = f\left(x_0 + \Delta x\right) - f\left(x_0\right) \approx f'\left(x_0\right)\Delta x,$$

hay tương đương

$$f\left(x_0 + \Delta x\right) \approx f\left(x_0\right) + f'\left(x_0\right)\Delta x.$$

Tương tự, mặt phẳng tiếp xúc tại $P\left(x_0,\ y_0,\ z_0\right)$ là mặt phẳng gần với hình dáng của mặt $z = f\left(x,\ y\right)$ nhất trong lân cận của P, và công thức xấp xỉ số gia tương tự như sau

XẤP XỈ SỐ GIA CỦA HÀM HAI BIẾN

Nếu $f(x,\ y)$ và các đạo hàm riêng của nó $f_x,\ f_y$ xác định trên một miền mở R chứa điểm $P(x_0,\ y_0)$ và $f_x,\ f_y$ liên tục tại P thì

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x,\ y_0 + \Delta y) - f(x_0,\ y_0)\ \approx f_x(x_0,\ y_0)\,\Delta x + f_y(x_0,\ y_0)\,\Delta y.$$

vì thế

$$f(x_0 + \Delta x,\ y_0 + \Delta y) \approx f(x_0,\ y_0) + f_x(x_0,\ y_0)\,\Delta x + f_y(x_0,\ y_0)\,\Delta y.$$

Đồ thị minh họa của công thức xấp xỉ số gia này được chỉ ra ở Hình 11.19.

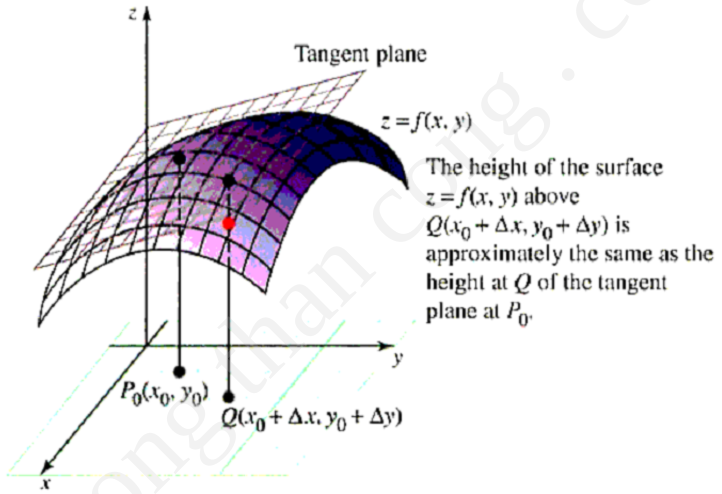


Figure 11.19 Incremental approximation to a function of two variables

$$\underbrace{f(x_0 + \Delta x,\ y_0 + \Delta y)}_{\substack{\text{Độ cao của } z=f(x,y) \\ \text{so với điểm } Q(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y)}} \approx \underbrace{f(x_0,\ y_0) + f_x(x_0,\ y_0)\,\Delta x + f_y(x_0,\ y_0)\,\Delta y}_{\text{Độ cao của mặt phẳng tiếp xúc so với điểm} Q(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y)}\ .$$

Số gia của hàm ba biến $f(x,\ y,\ z)$ có thể được định nghĩa tương tự

$$\begin{aligned}\Delta f &= f(x_0 + \Delta x,\ y_0 + \Delta y,\ z_0 + \Delta z) - f(x_0,\ y_0,\ z_0) \\ &\approx f_x(x_0,\ y_0,\ z_0)\,\Delta x + f_y(x_0,\ y_0,\ z_0)\,\Delta y + f_z(x_0,\ y_0,\ z_0)\,\Delta z.\end{aligned}$$

Ví dụ 11.4.2.(Sử dụng số gia để ước lượng sự thay đổi của hàm số)

Một cái hộp mở có chiều dài 3 ft, rộng 1 ft và cao 2 ft được làm từ vật liệu có giá 2 đô/ft^2 đối với mặt bên và 3 đô/ft^2 đối với mặt đáy (hình 11.20). Tính giá làm chiếc hộp, và sau đó sử dụng số gia để ước lượng sự thay đổi của giá nếu chiều dài và rộng mỗi cái tăng 3 in. và chiều cao giảm 4 in.

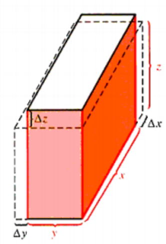


Figure 11.20 Construction of a box

Giải. Hộp mở có chiều dài x, rộng y và cao z có diện tích xung quanh

$$S = \underbrace{xy}_{\text{Đáy}} + \underbrace{2xz + 2yz}_{\text{Bốn mặt bên}}$$

Vì mặt bên giá 2 đô/ft2 và mặt đáy giá 3 đô/ft2 nên tổng giá trị là

$$C(x,\ y,\ z) = 3xy + 2(2xz + 2yz).$$

Các đạo hàm riêng của C là

$$C_x = 3y + 4z, \quad C_y = 3x + 4z, \quad C_z = 4x + 4y.$$

và các cạnh của hộp thay đổi

$$\Delta x = \frac{3}{12} = 0.25ft; \qquad \Delta y = \frac{3}{12} = 0.25ft; \qquad \Delta z = \frac{-4}{12} \approx -0.33ft.$$

Như vậy, sự thay đổi về tổng giá trị xấp xỉ với

$$\Delta C \approx C_x(3,\ 1,\ 2)\,\Delta x + C_y(3,\ 1,\ 2)\,\Delta y + C_z(3,\ 1,\ 2)\,\Delta z \approx 1.67.$$

Vậy giá tăng xấp xỉ 1.67 đô. □

Ví dụ 11.4.3.(Sai số phần trăm cực đại bằng cách sử dụng vi phân)
Bán kính và chiều cao của một hình nón tròn thẳng được đo với các sai số tối đa tương ứng 3% và 2%. Sử dụng xấp xỉ số gia để ước lượng sai số phần trăm cực đại trong việc tính thể tích của hình nón này bằng cách sử dụng những phép đo này và sử dụng công thức $V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$.

Giải. Ta có

$$\left|\frac{\Delta R}{R}\right| \le 0.03 \left|\frac{\Delta H}{H}\right| \le 0.02.$$

Các đạo hàm riêng của V là $V_R = \frac{2}{3}\pi RH, V_H = \frac{1}{3}\pi R^2$, vì thế sự thay đổi của thể tích được xấp xỉ bởi

$$\Delta V \approx \left(\frac{2}{3}\pi RH\right)\Delta R + \left(\frac{1}{3}\pi R^2\right)\Delta H.$$

Chia cho thể tích $V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$, ta được

$$\frac{\Delta V}{V} \approx 2\left(\frac{\Delta R}{R}\right) + \left(\frac{\Delta H}{H}\right).$$

Vì thế

$$\left|\frac{\Delta V}{V}\right| \le 2\left|\frac{\Delta R}{R}\right| + \left|\frac{\Delta H}{H}\right| = 0.08.$$

Tức là sai số phần trăm cực đại trong việc tính thể tích V là xấp xỉ 8%. □

11.4.3 Vi phân toàn phần

Định nghĩa 11.4.1. Vi phần toàn phần của hàm hai biến $f(x,\ y)$ là

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = f_x(x,\ y)\,dx + f_y(x,\ y)\,dy,$$

với x và y là các biến độc lập. Tương tự, vi phân toàn phần của hàm ba biến $w = f(x, y,\ z)$ là,

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz.$$

Ví dụ 11.4.4. Xác định vi phần toàn phần của hàm:

1. $f(x, y) = x^2 \ln(3y^2 - 2x)$.
2. $f(x, y, z) = 2x^3 + 5y^4 - 6z$.

Giải. 1. $df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = \left[2x\ln(3y^2 - 2x) - \frac{2x^2}{3y^2-2x}\right]dx + \frac{6x^2y}{3y^2-2x}dy.$

2. $df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz = 6x^2dx + 20y^3dy - 6dz.$

□

Ví dụ 11.4.5. Một công ty có sản lượng hàng ngày là $Q = 60K^{1/2}\,L^{1/3}$ (đơn vị sản phẩm), với K là vốn đầu tư (đơn vị ngàn đô) và L là lượng nhân lực (đơn vị giờ lao động). Vốn đầu tư hiện tại là 900,000 đô và 1,000 giờ lao động được sử dụng mỗi ngày. Ước lượng sử thay đổi của sản lượng nếu vốn đầu tư tăng 1,000 đô và lao động giảm 2 giờ làm việc.

Giải. Sự thay đổi của sản lượng được đặc trưng bởi đại lượng ΔQ. Ta có $K = 900,\ L = 1000,\ \Delta K = 1,\ \Delta L = -2$. Vi phân toàn phần của $Q(K,\ L)$ là

$$dQ = \frac{\Delta Q}{\Delta K}dK + \frac{\Delta Q}{\Delta L}dL = 30K^{-1/2}\,L^{1/3}\,dK + 20K^{1/2}\,L^{-2/3}\,dL$$

Cũng vậy, ta có $\Delta Q \approx \frac{\partial Q}{\partial K}\Delta K + \frac{\partial Q}{\partial L}\Delta L = -2$. Như vậy, sản lượng giảm xấp xỉ 2 đơn vị khi vốn đầu tư tăng 1000 đô và lao động giảm 2 giờ làm việc. □

Ví dụ 11.4.6.(Sai số phần trăm cực đại trong mạch điện)
Khi hai điện trở R_1 và R_2 được mắc song song, thì tổng điện trở R thỏa

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}.$$

Nếu R_1 đo được 300 (ohm) với sai số tối đa là 2% và R_2đo được 500 (ohm) với sai số tối đa là 3%, thì hãy sử dụng xấp xỉ số gia để ước lượng sai số phần trong cực đại ứng với R.

Giải. Ta có $\left|\frac{\Delta R_1}{R_1}\right| \le 0.02;\quad \left|\frac{\Delta R_2}{R_2}\right| \le 0.03$, và ta muốn tìm giá trị lớn nhất của $\left|\frac{\Delta R}{R}\right|$.
Vì $R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$ nên

$$\frac{\partial R}{\partial R_1} = \frac{R_2^2}{(R_1+R_2)^2};\ \frac{\partial R}{\partial R_2} = \frac{R_1^2}{(R_1+R_2)^2}$$

.

$$\Delta R \approx \frac{\partial R}{\partial R_1}\Delta R_1 + \frac{\partial R}{\partial R_2}\Delta R_2 = \frac{R_2^2}{(R_1+R_2)^2}\Delta R_1 + \frac{R_1^2}{(R_1+R_2)^2}\Delta R_2$$

Vì $\frac{1}{R} = \frac{R_1+R_2}{R_1 R_2}$ nên

$$\frac{\Delta R}{R} \approx \frac{R_2}{R_1+R_2}.\frac{\Delta R_1}{R_1} + \frac{R_1}{R_1+R_2}.\frac{\Delta R_2}{R_2}.$$

Cuối cùng, áp dụng bất đẳng thức tam giác, ta có

$$\frac{\Delta R}{R} \le \left|\frac{R_2}{R_1+R_2}\right|\left|\frac{\Delta R_1}{R_1}\right| + \left|\frac{R_1}{R_1+R_2}\right|\left|\frac{\Delta R_2}{R_2}\right|$$

$$\le \frac{500}{300+500}(0.02) + \frac{300}{300+500}(0.03) = 0.02375.$$

Sai số phần trăm cực đại xấp xỉ 2.4% □

11.4.4 Sự khả vi

Đối với hàm hai biến, số gia của x là một biến độc lập được ký hiệu bởi Δx, số gia của y là một biến độc lập được ký hiệu bởi Δy, và số gia của f tại $(x_0,\ y_0)$ được định nghĩa

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x,\ y_0 + \Delta y) - f(x_0,\ y_0).$$

Ta sử dụng biểu diễn số gia để định nghĩa sự khả vi như sau.

Định nghĩa 11.4.2. Hàm $f(x,\ y)$ khả vi tại $(x_0,\ y_0)$ nếu số gia của f có thể biểu diễn $\Delta f = f_x(x_0,\ y_0)\Delta x + f_y(x_0,\ y_0)\Delta y + \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y$ trong đó $\varepsilon_1 \to 0,\quad \varepsilon_2 \to 0$ khi cả hai $\Delta x \to 0,\quad \Delta y \to 0$. Ngoài ra, $f(x,\ y)$ được gọi là khả vi trong miền R của mặt phẳng nếu f khả vi tại mọi điểm trong R.

Định lý 11.4.1 (Khả vi thì liên tục)**.** *Nếu $f(x,\ y)$ khả vi tại $(x_0,\ y_0)$ thì nó cũng liên tục tại đó.*

Ví dụ 11.4.7.(Hàm không khả vi với $f_x,\ f_y$ tồn tại)
Cho

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & x > 0, y > 0; \\ 0, & \text{trường hợp còn lại.} \end{cases}$$

Chỉ ra rằng các đạo hàm riêng f_x, f_y tồn tại tại gốc tọa độ nhưng f không khả vi tại đó.

Giải. Vì $f(0,\ 0) = 0$ nên ta có

$$f_x(0,\ 0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0 + \Delta x,\ 0) - f(0,\ 0)}{\Delta x} = 0$$

và tương tự $f_y(0,\ 0) = 0$. Như vậy, cả hai đạo hàm riêng đều tồn tại tại gốc tọa độ. Nếu $f(x,\ y)$ khả vi tại gốc tọa độ thì nó sẽ liên tục tại đó (định lý 11.2). Như vậy, ta có thể chỉ ra f không khả vi bằng cách chỉ ra nó không liên tục tại $(0,\ 0)$. Chú ý rằng $\lim\limits_{(x,\ y) \to (0,\ 0)} f(x,\ y)$ là 1 dọc theo đường $y = x$ trong góc phần tư thứ nhất nhưng là 0 nếu tiến đến dọc theo trục Ox. Điều này có nghĩa là giới hạn không tồn tại. Vì vậy, f không liên tục tại $(0,\ 0)$ và tức là cũng không khả vi tại đây. □

Mặc dù sự tồn tại của các đạo hàm riêng tại $P(x_0,\ y_0)$ không đủ để đảm bảo rằng $f(x,\ y)$ khả vi tại P, nhưng ta có điều kiện đủ sau để nó khả vi.

Định lý 11.4.2 (Điều kiện đủ cho sự khả vi)**.** *Nếu f là hàm theo biến x và y, và $f,\ f_x,\ f_y$ liên tục trên một đĩa D có tâm tại $(x_0,\ y_0)$ thì f khả vi tại $(x_0,\ y_0)$.*

Ví dụ 11.4.8.(Thiết lập sự khả vi)
Chỉ ra rằng $f(x,\ y) = x^2y + xy^3$ khả vi tại $(x,\ y)$ bất kỳ.

Giải. Ta có $f_x(x,\ y) = 2xy + y^3, f_y(x,\ y) = x^2 + 3xy^2$. Vì $f,\ f_x,\ f_y$ là các đa thức theo x và y nên chúng liên tục trên toàn mặt phẳng. Do đó, định lý điều kiện đủ cho sự khả vi đảm bảo rằng f khả vi tại mọi x và y. □

Cuối cùng, ta chú ý rằng mặc dù tính liên tục của đạo hàm riêng cấp một trong lân cận của điểm $(x_0,\ y_0)$ đảm bảo rằng f khả vi tại $(x_0,\ y_0)$, nhưng vẫn có thể có hàm khả vi tại $(x_0,\ y_0)$ mà các đạo hàm riêng không liên tục tại đó.

11.5 Quy tắc dây chuyền

Đối với hàm nhiều biến, việc kết hợp hàm cũng quan trọng như trường hợp một biến, và bây giờ do xuất hiện nhiều hơn một biến, ta có thể cấu tạo "hàm của một hàm" một cách đa dạng. Chúng ta sẽ xem xét một số đạo hàm và đạo hàm riêng trong mỗi trường hợp.

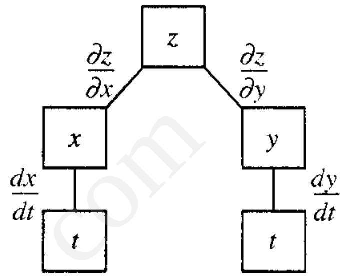
11.5.1 Quy tắc dây chuyền một biến

Chúng ta bắt đầu với một hàm khả vi hai biến $f(x, y)$. Nếu $x = x(t)$ và $y = y(t)$ lần lượt là các hàm của biến độc lập t, khi đó $z = f(x(t), y(t))$ là một hàm hợp của biến t. Trong trường hợp này, quy tắc dây chuyền tìm đạo hàm đối với hàm một biến được thiết lập.

Định lý 11.5.1. *Cho $f(x, y)$ là một hàm khả vi của hai biến x và y, và $x = x(t)$ và $y = y(t)$ là hàm khả vi của biến t, khi đó $z = f(x, y)$ là một hàm khả vi của t và*

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

Sơ đồ hình cây được chỉ ra ở đây là một công cụ dùng để nhớ quy tắc dây chuyền. Sơ đồ bắt đầu trên đỉnh với biến độc lập z và phân tầng thành hai nhánh xuống phía dưới, đầu là các biến độc lập x và y, và sau đó là tham số t cho mỗi nhánh. Mỗi một đoạn nhánh được gắn nhãn với một đạo hàm, và quy tắc dây chuyền nhận được bằng cách đầu tiên nhân các đạo hàm trên mỗi đoạn của mỗi nhánh cộng lại để có được



$$\frac{dz}{dt} = \underbrace{\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt}}_{\text{nhánh trái}} + \underbrace{\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}}_{\text{nhánh phải}}.$$

Ví dụ 11.5.1. Cho $z = x^2 + y^2$, với $x = \frac{1}{t}$ và $y = t^2$. Tính $\frac{dz}{dt}$ theo hai cách:
a. trước hết biểu diễn tường minh z theo t.
b. sử dụng quy tắc dây chuyền.

Giải. a. Thay $x = \frac{1}{t}$ và $y = t^2$ ta thấy (với mọi $t \neq 0$) $z = x^2 + y^2 = \left(\frac{1}{t}\right)^2 + (t^2)^2 = t^{-2} + t^4$. Do đó, $\frac{dz}{dt} = -2t^{-3} + 4t^3$. b. Vì $z = x^2 + y^2$, với $x = \frac{1}{t}$ và $y = t^2$ nên

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x, \frac{\partial z}{\partial x} = 2y, \frac{dx}{dt} = -t^{-2}; \frac{dy}{dt} = 2t.$$

Sử dụng quy tắc dây chuyền cho một tham biến độc lập ta có:

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dt} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}\\ &= (2x)\left(-t^{-2}\right) + (2y)(2t)\\ &= \left(2t^{-1}\right)\left(-t^{-2}\right) + \left(2t^2\right)(2t)\\ &= -2t^{-3} + 4t^3\end{aligned}$$

□

Ví dụ 11.5.2.(Quy tắc dây chuyền cho một tham biến độc lập)
Cho $z = \sqrt{x^2 + 2xy}$, trong đó $x = \cos\theta, y = \sin\theta$. Tìm $\frac{dz}{d\theta}$ theo x, y, θ.

Ví dụ 11.5.3.(Ứng dụng về quan hệ giữa các tỷ lệ sử dụng quy tắc dây chuyền)
Một hình trụ tròn đứng được thay đổi bằng cách tăng bán kính r của nó với tốc độ 3 in./min và giảm chiều cao h của nó với tốc độ 5 in./min. Thể tích của hình trụ thay đổi theo tốc độ nào nếu bán kính của nó là 10 in. và chiều cao là 8 in.?

Định lý 11.5.2. *Cho F được xác định trên một đĩa tròn chứa (a,b) như một điểm trong, sao cho $F(a,b) = 0$, và giả sử rằng F_x, F_y cùng liên tục trên đĩa này, với $F_y(a,b) \neq 0$. Khi đó tồn tại một khoảng I trên đường thẳng thực chứa a như một điểm trong và một hàm duy nhất $y = y(x)$ được xác định trên khoảng I, sao cho $y(a) = b$ và $F(x, y(x)) = 0$,với mọi giá trị x trong khoảng I. Hơn nữa, đạo hàm của y được xác định bởi*

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}.$$

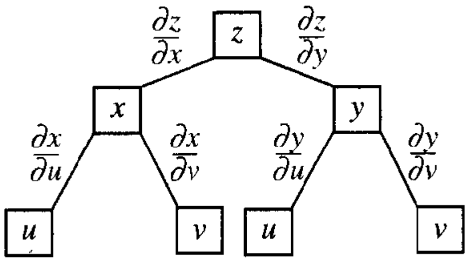
Ví dụ 11.5.4.(Đạo hàm hàm ẩn sử dụng các đạo hàm riêng)
Nếu y là một hàm khả vi của x sao cho $\sin(x+y) + \cos(x-y) = y$,tìm $\frac{dy}{dx}$.

Khi z được xác định ẩn theo x và y bởi phương trình $F(x,y,z) = 0$, quy tắc dây chuyền có thể được dùng để tìm $\frac{\partial z}{\partial x}$ và $\frac{\partial z}{\partial y}$ theo F_x, F_y và F_z. Cách thức này được phác thảo trong Bài tập 57.

Ví dụ 11.5.5.(Đạo hàm riêng cấp hai của một hàm hai biến)
Cho $z = f(x,y)$, trong đó $x = at$ và $y = bt$ với a và b là các hằng số. Giả sử về các sự khả vi cần thiết, hãy tìm $\frac{d^2z}{dt^2}$ theo các đạo hàm riêng của z.

11.5.2 Các mở rộng của quy tắc dây chuyền

Tiếp theo, chúng ta sẽ xét loại hàm hợp xuất hiện khi x và y cùng là các hàm cử hai tham biến. Đặc biệt, cho $z = F(x,y)$, trong đó $x = x(u,v)$ và $y = y(u,v)$ cùng là hàm của hai tham số độc lập u và v. Khi đó, $z = F(x(u,v), y(u,v))$ là một hàm hợp của u và v, và với những giả thiết thích hợp của sự khả vi, chúng ta có thể tìm được các đạo hàm riêng $\partial z/\partial u, \partial z/\partial v$ bằng các áp dụng quy tắc dây chuyền nhận được từ định lý sau đây.



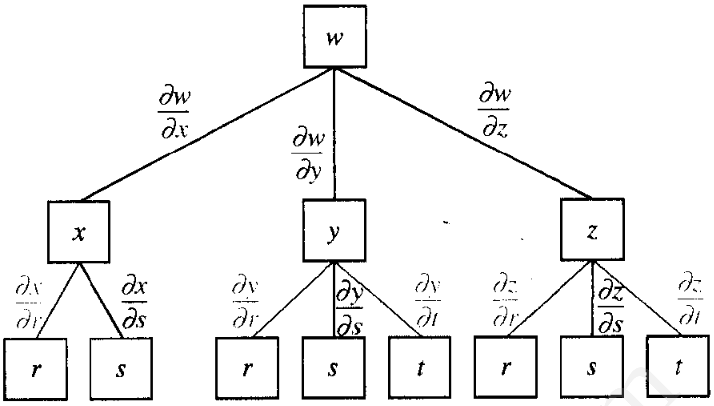
Định lý 11.5.3. *Giả sử $z = f(x,y)$ khả vi tại (x,y) và các đạo hàm riêng của $x = x(u,v)$ và $y = y(u,v)$ tồn tại tại (u,v). Khi đó hàm hợp $z = F(x(u,v), y(u,v))$ là khả vi tại (u,v) với*

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} \text{ và } \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}.$$

Ví dụ 11.5.6.(Quy tắc dây chuyền cho hai tham biến độc lập)
Cho $z = 4x - y^2$, trong đó $x = uv^2$ và $y = u^3v$. Tìm $\frac{\partial z}{\partial u}$ và $\frac{\partial y}{\partial v}$.

Ví dụ 11.5.7.(Đạo hàm hàm ẩn sử dụng quy tắc dây chuyền)
Nếu f là hàm khả vi và $f(u,v) = u + f(u^2v^2)$, hãy chỉ ra rằng $u\frac{\partial z}{\partial u} - v\frac{\partial z}{\partial v} = u$.

Ví dụ 11.5.8.(Quy tắc dây chuyền cho một hàm ba biến với ba tham biến)
Tìm $\frac{\partial w}{\partial s}$ nếu $w = 4x + y^2 + z^3$, trong đó $x = e^{rs^2}, y = \ln\frac{r+s}{t}, z = rst^2$.



11.6 Đạo hàm theo hướng và Gradient

Trong mục này chúng ta xem xét làm cách nào để tìm một đạo hàm trong rất nhiều hướng đã được chỉ ra, được gọi là các đạo hàm theo hướng. Sau khi chúng ta tìm được các đạo hàm theo hướng, chúng ta sẽ biểu diễn nó theo một hàm véctơ được gọi là một gradient. Chúng ta kết thúc bằng việc xem xét các ứng dụng của gradient. Giả sử $z = T(x, y)$ cho nhiệt độ tại điểm (x, y) trong miền R của mặt phẳng, và $P_0(x_0, y_0)$ là một điểm cụ thể trong R. Khi đó chúng ta biết rằng đạo hàm riêng $T_x(x_0, y_0)$ cho tốc độ thay đổi nhiệt độ quanh P_0 theo hướng trục x, trong khi đó tốc độ thay đổi nhiệt độ theo hướng y được cho bởi $T_y(x_0, y_0)$. Giả sử rằng chúng ta muốn tìm hướng mà nhiệt độ thay đổi lớn nhất, mà có thể là hướng không song song với các trục tọa độ. Để trả lời câu hỏi này, chúng ta sẽ giới thiệu khái niệm đạo hàm theo hướng và xem xét các tính chất của nó.

11.6.1 Đạo hàm theo hướng

Trong Chương 3 chúng ta đã định nghĩa độ dốc của một đường cong tại một điểm là tốc độ thay đổi của biến phụ thuộc theo sự thay đổi của biến độc lập tại một điểm cho trước. Để xác định hệ số góc của tiếp tuyến tại một điểm $P_0(x_0, y_0)$ trên mặt cong xác định bởi $z = f(x, y)$, chúng ta cần chỉ rõ hướng mà chúng ta muốn đo. Chúng ta thực hiện điều này bằng cách sử dụng véctơ. Trong Mục 11.3 chúng ta đã tìm được độ dốc mà song song với mặt phẳng yz là đạo hàm riêng $f_x(x_0, y_0)$. Chúng ta có thể chỉ rõ hướng này theo véctơ đơn vị i (hướng x), trong khi đó $f_y(x, y)$ xác định theo hướng véctơ đơn vị j.

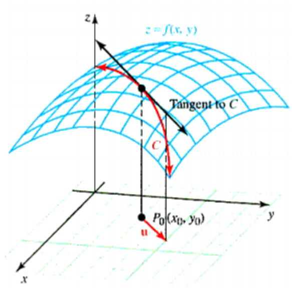


Figure 11.24 The directional derivative

Cuối cùng, để đo độ dốc của tiếp tuyến theo một hướng bất kỳ, chúng ta sử dụng một véctơ đơn vị $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j}$.

Để tìm một độ dốc mong muốn, chúng ta tìm giao của mặt cong với mặt phẳng thẳng đứng đi qua điểm P_0 song song với véctơ $\mathbf{u}$, như đã chỉ ra trong Hình 11.24.

Mặt phẳng thẳng đứng này giao với mặt cong tạo nên một đường cong C, và chúng ta định nghĩa độ dốc của mặt cong tại P_0 theo hướng $\mathbf{u}$ là độ dốc của tiếp tuyến với đường cong C tại điểm đó. Chúng ta tóm tắt ý tưởng về độ dốc này theo một hướng đặc biệt với định nghĩa sau đây.

Định nghĩa 11.6.1 (Đạo hàm theo hướng)**.** Cho f là một hàm hai biến, và cho $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j}$ là véctơ đơn vị. Đạo hàm theo hướng của f tại $P_0(x_0, y_0)$ theo hướng của $\mathbf{u}$ cho bởi

$$D_{\mathbf{u}}f(x_0, y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + hu_1, y + hu_2) - f(x_0, y_0)}{h}$$

miễn là giới hạn này tồn tại (chú ý rằng, $\mathbf{u}$ phải là véctơ đơn vị).

Tại một điểm $P_0(x_0, y_0)$, có vô hạn đạo hàm theo hướng cho đồ thị của $z = f(x, y)$, mỗi một hướng đều tỏa ra từ P_0. Hai trong chúng là các đạo hàm riêng $f_x(x_0, y_0)$ và $f_y(x_0, y_0)$. Để thấy điều này, chú ý rằng nếu $\mathbf{u} = \mathbf{i}$ (nghĩa là $u_1 = 1$ và $u_2 = 0$), khi đó

$$D_{\mathbf{i}}f(x_0, y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} = f_x(x_0, y_0).$$

và nếu $\mathbf{u} = \mathbf{j}$ (nghĩa là $u_1 = 0$ và $u_2 = 1$), khi đó

$$D_{\mathbf{j}}f(x_0, y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h} = f_y(x_0, y_0).$$

Định nghĩa đạo hàm theo hướng là tương tự định nghĩa đạo hàm của hàm với một biến duy nhất. Giống như với hàm một biến, thật khó để áp dụng định nghĩa này một cách trực tiếp. May mắn là định lý sau đây cho phép chúng ta tìm ra các đạo hàm theo hướng hiệu quả hơn so với sử dụng định nghĩa.

Định lý 11.6.1 (Tính đạo hàm theo hướng sử dụng các đạo hàm riêng)**.** *Cho $f(x, y)$ là một hàm khả vi tại $P_0(x_0, y_0)$. Khi đó f có đạo hàm theo hướng của véctơ đơn vị $\boldsymbol{u} = u_1\boldsymbol{i} + u_2\boldsymbol{j}$ xác định bởi*

$$D_{\boldsymbol{u}}f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)\,u_1 + f_y(x_0, y_0)\,u_2.$$

Ví dụ 11.6.1.(Tìm đạo hàm theo hướng sử dụng đạo hàm riêng)
Tìm đạo hàm theo hướng của $f(x, y) = 3 - 2x^2 + y^3$ tại điểm $P(1, 2)$ theo hướng của véctơ đơn vị $\mathbf{u} = \frac{1}{2}\mathbf{i} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{j}$.

Giải. Trước hết, tìm các đạo hàm riêng . Khi đó từ $u_1 = \frac{1}{2}, u_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ta có

$$D_{\mathbf{u}}f\,(1,2) = f_x\,(1,2)\left(\frac{1}{2}\right) + f_y\,(1,2)\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

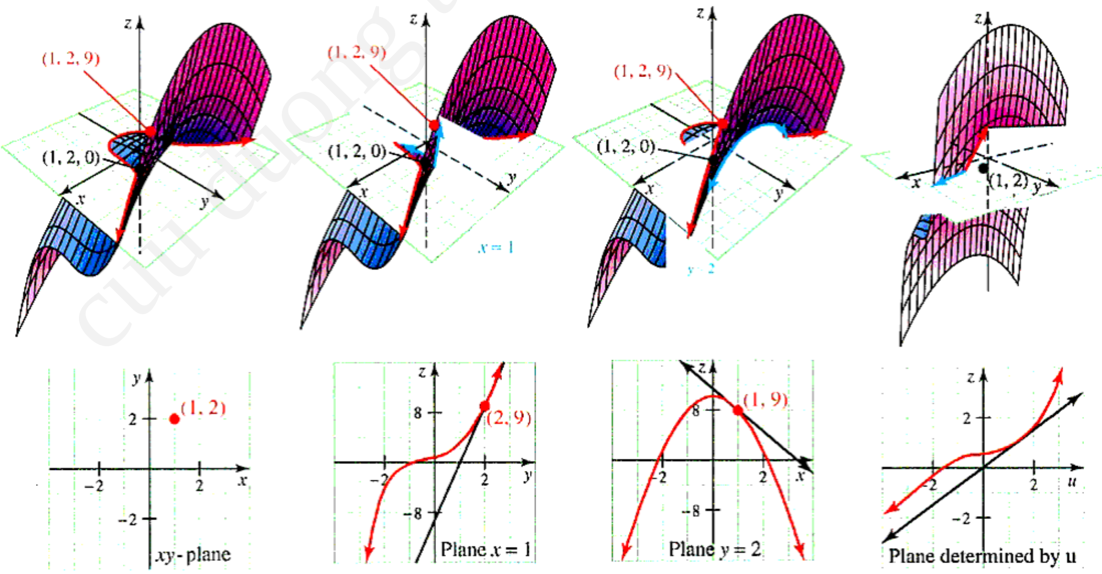
$$= -4\,(1)\left(\frac{1}{2}\right) + 3(2)^2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= -2 - 6\sqrt{3}$$

Chú ý rằng đạo hàm theo hướng là một số. Số này có thể hiểu như là độ dốc của tiếp tuyến với $z = f\,(x, y)$ hoặc như một tốc độ thay đổi của hàm $z = f\,(x, y)$. Với Ví dụ 1 chúng ta thấy số $-2 - 6\sqrt{3} \approx -12.4$. Chúng ta sử dụng ví dụ này để minh họa đạo hàm theo hướng như là độ dốc và như là một tỷ lệ. $\square$

Đạo hàm theo hướng như là độ dốc

Bằng hình học chúng ta tìm mặt cong được xác định trong Ví dụ 1, cụ thể là $z = 3 - 2x^2 + y^3$. Giao của mặt này với một mặt phẳng cùng phương với véctơ $\mathbf{u} = \frac{1}{2}\mathbf{i} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{j}$ là đường cong C, và đạo hàm theo hướng này là độ dốc của tiếp tuyến với C tạo điểm nằm trên mặt cong phía trên $P\,(1, 2)$. Đạo hàm theo hướng này được chỉ ra như trong Hình 11.25d.



a. The point $(1, 2)$ in the xy-plane

b. Directional derivative at $(2, 9)$ in plane $x = 1$

c. Directional derivative at $(1, 9)$ in plane $y = 2$

d. Directional derivative in plane determined by $\mathbf{u}$

Figure 11.25 Graph of $z = 3 - 2x^2 + y^3$ and some derivatives

Đạo hàm theo hướng như là một tỷ lệ

Đạo hàm theo hướng $D_{\mathbf{u}}f(x_0, y_0)$ cũng có thể xem như tỷ lệ thay đổi của hàm $z = f(x, y)$ quanh điểm $P_0(x_0, y_0)$ theo hướng véctơ đơn vị u. Do đó, tổng Ví dụ 1, chúng ta nói rằng hàm $f(x, y) = 3 - 2x^2 + y^3$ thay đổi với tỷ lệ $-2 - 6\sqrt{3} \approx -12.4$ khi chúng ta di chuyển từ $P(1, 2)$ theo hướng véctơ đơn vị $\mathbf{u} = \frac{1}{2}\mathbf{i} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{j}$.

11.6.2 Gradient

Đạo hàm theo hướng $D_{\mathbf{u}}f(x, y)$ có thể biểu diễn một cách gãy gọn theo một véctơ được gọi là gradient, cái mà được sử dụng rất nhiều trong toán học. Gradient của một hàm hai biến có thể được định nghĩa như sau.

Định nghĩa 11.6.2. Cho f là một hàm khả vi tại (x, y) và cho $f(x, y)$ có các đạo hàm riêng $f_x(x, y)$ và $f_y(x, y)$. Khi đó gradient của f, được ký hiệu bởi ∇f (đọc là del eff), là một véctơ xác định bởi $\nabla f(x, y) = f_x(x, y)\,\mathbf{i} + f_y(x, y)\,\mathbf{j}$.

Giá trị của gradient tại điểm $P_0(x_0, y_0)$ được xác định bởi $\nabla f_0 = f_x(x_0, y_0)\,\mathbf{i} + f_y(x_0, y_0)\,\mathbf{j}$ Hãy xem ký hiệu ∇ như một "toán tử" tác động lên một hàm mà cho một véctơ. Một ký hiệu khác của ∇f là $\mathbf{grad} f(x, y)$.
Ví dụ 11.6.2.(Tìm gradient của một hàm)
Tìm $\nabla f(x, y)$ với $f(x, y) = x^2y + y^3$.

Định lý 11.6.2. *Nếu f là một hàm khả vi của x và y, khi đó đạo hàm theo hướng của f tại điểm $P_0(x_0, y_0)$ theo hướng của véctơ đơn vị $\boldsymbol{u}$ là*

$$D_{\boldsymbol{u}}f(x_0, y_0) = \nabla f_0.\boldsymbol{u}.$$

Ví dụ 11.6.3.(Sử dụng công thức gradient để tính đạo hàm theo hướng)
Tìm đạo hàm theo hướng của $f(x, y) = \ln(x^2 + y^3)$ tại $P_0(1, -3)$ theo hướng của $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$

Mặc dù một hàm khả vi một biến $f(x)$ có chính xác một đạo hàm $f'(x)$, một hàm khả vi hai biến $F(x, y)$ có hai đạo hàm riêng và vô hạn các đạo hàm theo hướng. Liệu có khái niệm toán học đơn lẻ nào về các hàm nhiều biến tương tự như của đạo hàm của một hàm một biến đơn lẻ không? Các tính chất được liệt kê trong định lý sau đây gợi ý về vai trò của gradient.

Định lý 11.6.3. *Cho f và g là các hàm khả vi. Khi đó*

Quy tắc hằng	$\nabla c = 0$ *với mọi hằng số* c
Quy tắc tuyến tính	$\nabla(af + bg) = a\nabla f + b\nabla g$ *với các hằng số* a *và* b
Quy tắc nhân	$\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$
Quy tắc thương	$\nabla\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{f\nabla g - f\nabla g}{g^2}$, $g \neq 0$
Quy tắc mũ	$\nabla(f^n) = nf^{n-1}\nabla f$

Tính chất cực đại của Gradient

Trong ứng dụng, việc tính tỷ lệ biến thiên cực đại (hoặc cực tiểu) của một hàm cho trước tại một điểm cụ thể là rất có ích. Hướng mà nó xuất hiện được gọi là hướng tăng nhanh nhất – steepest ascent (hoặc giảm nhanh nhất – steepest descent). Chẳng hạn, giả sử hàm $z = f(x, y)$ mô tả cao độ của một người trượt tuyết đang đổ xuống một con dốc, và chúng ta muốn phát biểu một định lý mà sẽ cho người trượt tuyết một la bàn định hướng về đường xuống dốc nhanh nhất (xem Hình 11.26).

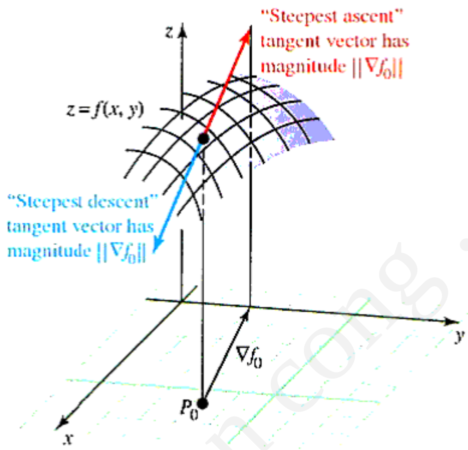


Figure 11.26 Curve of steepest ascent or descent

Định lý 11.6.4 (Hướng cực đại của gradient). *Giả sử f khả vi tại điểm P_0 và gradient của f tại P_0 thỏa mãn $\nabla f_0 \neq 0$. Khi đó*

a. *Giá trị lớn nhất của đạo hàm theo hướng $D_{\boldsymbol{u}}f$ tại P_0 là $\|\nabla f_0\|$ và xuất hiện khi véctơ đơn vị u chỉ hướng của ∇f_0.*

b. *Giá trị nhỏ nhất của $D_{\boldsymbol{u}}f$ tại P_0 là $-\|\nabla f_0\|$ và xuất hiện khi véctơ đơn vị u chỉ hướng của $-\nabla f_0$.*

Định lý phát biểu rằng tại P_0 hàm f tăng nhanh nhất theo hướng của véctơ ∇f_0 và giảm nhanh nhất theo hướng ngược lại.

Ví dụ 11.6.4.(Tỷ lệ tăng và giảm cực đại)

Theo hướng nào thì hàm được xác định $f(x, y) = xe^{2y-x}$ tăng nhanh nhất tại điểm $P_0(2, 1)$, và tỷ lệ tăng cực đại là bao nhiêu? Theo hướng nào thì f là giảm nhanh nhất?

11.6.3 Đối với hàm ba biến

Khái niệm đạo hàm theo hướng và gradient có thể dễ dàng mở rộng cho các hàm ba biến hoặc nhiều biến hơn. Với hàm ba biến, $f(x, y, z)$, gradient ∇f được xác định bởi $\nabla f = f_x\mathbf{i} + f_y\mathbf{j} + f_z\mathbf{k}$ và đạo hàm theo hướng $D_{\mathbf{u}}f$ của $f(x, y, z)$ tại $P_0(x_0, y_0, z_0)$ theo hướng của véctơ đơn vị u cho bởi

$$D_{\mathbf{u}}f = \nabla f_0 \cdot \mathbf{u}$$

trong đó như trên, ∇f_0 là gradient ∇f tại P_0. Các tính chất cơ bản của gradient của $f(x, y)$ (Định lý 11.9) vẫn còn đúng, cũng như tính chất hướng cực đại của Định lý 11.10. Các định nghĩa và tính chất tương tự cũng đúng cho hàm nhiều hơn ba biến.
Ví dụ 11.6.5.(Đạo hàm theo hướng của hàm ba biến)
Cho $f(x, y, z) = xy\sin(xz)$. Tìm ∇f_0 tại điểm $P_0(1, -2, \pi)$ và sau đó tính đạo hàm theo hướng (được làm tròn đến phần trăm) của f tại P_0 theo hướng của véctơ $\mathbf{v} = -2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$.

11.6.4 Tính vuông góc của Gradient

Giả sử S là một mặt mức của hàm xác định bởi $f(x, y, z)$; nghĩa là, $f(x, y, z) = K$ với hằng số K nào đó. Khi đó nếu $P_0(x_0, y_0, z_0)$ là một điểm thuộc S, định lý sau đây chỉ ra rằng gradient ∇f_0 tại P_0 là một véctơ và vuông góc (trực giao) với mặt phẳng tiếp xúc của mặt cong tại P_0 (xem Hình 11.28).

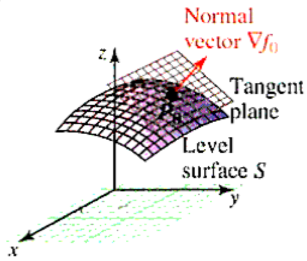


Figure 11.28 The normal property of the gradient

Định lý 11.6.5 (Tính vuông góc của gradient)**.** *Giả sử hàm f là khả vi tại điểm P_0 và gradient tại P_0 thỏa mãn $\nabla f_0 \neq 0$. Khi đó ∇f_0 là trực giao với mặt mức của f qua P_0.*

Giải thích: Gradient ∇f_0 tại điểm P_0 trên mặt $f(x, y, z) = K$ là trực giao tại P_0 với véctơ tiếp xúc $\mathbf{T} = \frac{d\mathbf{R}}{dt}$ của mỗi đường cong C: $\mathbf{R} = \mathbf{R}(t)$ trên mặt cong đi qua P_0. Do đó, tất cả những véctơ tiếp xúc này nằm trên một mặt phẳng đơn đi qua P_0. Do đó, tất cả các véctơ tiếp xúc này nằm trên một mặt phẳng đơn đi qua P_0 với véctơ pháp tuyến $\mathbf{N} = \nabla f_0$. Mặt phẳng này là mặt phẳng tiếp xúc (hay tiếp diện) với mặt cong tại P_0.
Ví dụ 11.6.6.(Tìm véctơ vuông góc với mặt mức)
Tìm véctơ vuông góc với mặt mức $x^2 + 2xy - yz + 3z^2 = 7$ tại điểm $P_0(1, 1, -1)$.
Ví dụ 11.6.7.(Tìm véctơ vuông góc với đường mức)
Hãy vẽ đường mức tương ứng với $C = 1$ của hàm $f(x, y) = x^2 - y^2$ và tìm một véctơ pháp tuyến tại điểm $P_0(2, \sqrt{3})$.

Giải. Đường mức với $C = 1$ là một hyperbol cho bởi $x^2 - y^2 = 1$, như được chỉ ra trong Hình

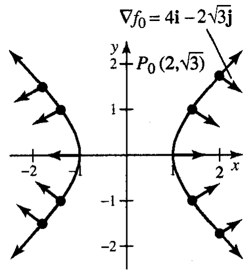


Figure 11.29 The level curve $x^2 - y^2 = 1$

11.29. Véctơ gradient là vuông góc với đường mức, vì thế chúng ta có $\nabla f = f_x\mathbf{i} + f_y\mathbf{j} = 2x\mathbf{i} - 2y\mathbf{j}$. Tại điểm $\left(2, \sqrt{3}\right)$, $\nabla f_0 = 4\mathbf{i} - 2\sqrt{3}\mathbf{j}$ là véctơ cần tìm. Véctơ trực giao này và một vài véctơ khác được chỉ ra trong Hình 11.29. $\square$

Ví dụ 11.6.8.(Ứng dụng truyền nhiệt)
Tập các điểm (x, y) với $0 \le x \le 5$ và $0 \le y \le 5$ là một hình vuông trong góc một phần tư thứ nhất của mặt phẳng xy. Giả sử rằng hình vuông này được đốt nóng theo cách mà $T(x, y) = x^2 + y^2$ là nhiệt độ tại điểm $P(x, y)$. Hỏi nhiệt độ sẽ tỏa ra từ điểm $P_0(3, 4)$ theo hướng nào?

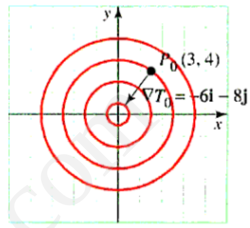


Figure 11.30 Isotherms

Giải. Lượng nhiệt trong một vùng được cho bởi hàm véctơ $\mathbf{H}(x, y)$, giá trị của nó tại điểm (x, y) phụ thuộc theo x và y. Theo vật lý học, $\mathbf{H}(x, y)$ sẽ vuông góc với các đường đẳng nhiệt $T(x, y) = C$ với C là hằng số. Gradient ∇T và tất cả các bội của nó đều chỉ về một hướng như vậy. Bởi thế, chúng ta cần biểu diễn lưu lượng nhiệt theo phương trình $\mathbf{H} = -k\nabla T$, trong đó k là một hằng số dương (được gọi là hằng số dẫn nhiệt) và dấu âm là để lý giải cho thực tế là lượng nhiệt tỏa ra một cách "xuống dốc" (nghĩa là, theo hướng giảm nhiệt độ). Vì $T(3, 4) = 25$, điểm $P_0(3, 4)$ nằm trên đường đẳng nhiệt $T(x, y) = 25$, là một phần của đường tròn $x^2 + y^2 = 25$, như được chỉ ra trong Hình 11.30. Chúng ta biết rằng lưu lượng nhiệt $\mathbf{H}_0$ tại P_0 sẽ thỏa mãn phương trình $\mathbf{H}_0 = -k\nabla T_0$, trong đó ∇T_0 là gradient tại P_0. Vì $\nabla T = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j}$, chúng ta thấy rằng $\nabla T_0 = 6\mathbf{i} + 8\mathbf{j}$. Do đó, lượng nhiệt tại P_0 thỏa mãn

$$\mathbf{H}_0 = -k\nabla T_0 = -k\left(6\mathbf{i} + 8\mathbf{j}\right).$$

Vì hệ số dẫn nhiệt k là dương, chúng ta có thể nói rằng nhiệt tỏa ra từ P_0 theo hướng véctơ đơn vị $\mathbf{u}$ được cho bởi

$$\mathrm{u} = \frac{-\left(6\mathrm{i} + 8\mathrm{j}\right)}{\sqrt{(-6)^2 + (-8)^2}} = -\frac{3}{5}\mathrm{i} - \frac{4}{5}\mathrm{j}.$$

$\square$

11.6.5 Tiếp diện và pháp tuyến

Các mặt phẳng tiếp xúc và các pháp tuyến với một mặt cong là những mở rộng tự nhiên tới $\mathbb{R}^3$ của tiếp tuyến và pháp tuyến mà chúng ta đã xác định trong $\mathbb{R}^2$. Giả sử S là một mặt cong và $\mathbf{N}$ là một véctơ pháp tuyến

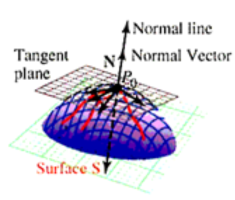


Figure 11.31 Tangent plane and normal line

của S tại điểm P_0. Bằng trực giác, ta nghĩ rằng pháp tuyến và tiếp diện với S tại P_0 một cách tương ứng sẽ là đường thẳng qua P_0 có phương **N** và mặt phẳng qua P_0 với pháp tuyến **N** (xem Hình 11.31). Những quan sát này dẫn chúng ta tới định nghĩa sau đây.

Định nghĩa 11.6.3 (Pháp tuyến và tiếp tuyến)**.** Giả sử mặt cong S có một véctơ pháp tuyến khác không **N** tại P_0. Khi đó đường thẳng đi qua P_0 song song với N được gọi là **pháp tuyến** với S tại P_0, và mặt phẳng qua P_0 với véctơ pháp tuyến **N** là **tiếp diện** với S tại P_0.

Chúng ta mong muốn rằng một mặt cong S với biểu diễn $z = f(x, y)$ có một tiếp diện không thẳng đứng tại mỗi điểm có $\nabla f \neq 0$. Đặc biệt, nếu S có phương trình dạng $F(x, y, z) = C$, trong đó C là một hằng số và F là một hàm khả vi tại P_0, tính trực giao của gradient cho ta thấy rằng véc tơ gradient ∇F_0 tại P_0 là trực giao với S (nếu $\nabla F_0 \neq 0$) và S do đó phải có một tiếp diện tại P_0.
Ví dụ 11.6.9.(Tìm tiếp diện và pháp tuyến của một mặt cong)
Tìm các phương trình của tiếp diện và pháp tuyến tại điểm $P_0(1, -1.2)$ trên mặt cong S xác định bởi $x^2y + y^2z + z^2x = 5$.

Định nghĩa 11.6.4 (Phương trình tiếp diện và pháp tuyến của một mặt cong)**.** Giả sử S là một mặt cong có phương trình $F(x, y, z) = C$ là $P_0(x_0, y_0, z_0)$ là một điểm trên S với F là hàm khả vi có $\nabla F_0 \neq 0$. Khi đó **phương trình tiếp diện** với S tại P_0 là

$$F_x(P_0)(x - x_0) + F_y(P_0)(y - y_0) + F_z(P_0)(z - z_0) = 0.$$

và **pháp tuyến** với S tại P_0 có phương trình tham số là

$$\begin{cases} x = x_0 + F_x(x_0, y_0, z_0)\, t \\ y = y_0 + F_y(x_0, y_0, z_0)\, t \\ z = z_0 + F_z(x_0, y_0, z_0)\, t \end{cases}.$$

Ví dụ 11.6.10.(Phương trình tiếp diện và pháp tuyến)
Tìm các phương trình của tiếp diện và pháp tuyến với mặt nón $z^2 = x^2 + y^2$ tại điểm có $x = 3, y = 4$ và $z > 0$.

Giải. Nếu $P_0(x_0, y_0, z_0)$ là điểm tiếp xúc và $x_0 = 3, y_0 = 4$ và $z_0 > 0$, khi đó

$$z_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5.$$

Nếu ta xét $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ thì nón này có thể xem như mặt mức $F(x, y, z) = 0$. Các đạo hàm riêng của F là

$$F_x = 2x, F_y = 2y, F_z = -2z$$

do đó tại $P_0(3,4,5)$ ta có

$$F_x(3,4,5) = 6, F_y(3,4,5) = 8, F_z(3,4,5) = -10$$

. Vậy phương trình tiếp diện là

$$6(x-3) + 8(y-4) - 10(z-5) = 0$$

hay $3x + 4y - 5z = 0$, và phương trình pháp tuyến là

$$x = 3 + 6t, y = 4 + 8t, z = 5 - 10t.$$

□

11.7 Cực trị của hàm hai biến

Trong thế giới thực, chúng ta phải đối đầu với rất nhiều vấn đề liên quan đến tối ưu hóa. Trong Chương 4, chúng ta đã xét các hàm một biến, và trong mục này chúng ta mở rộng cho các hàm hai biến. Có rất nhiều tình huống thực tế mà trong đó cần thiết hoặc hữu ích hơn để biết được giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của một hàm hai biến. Chẳng hạn, nếu $T(x,y)$ là nhiệt độ tại điểm (x,y) trong một cái đĩa, thì đâu là điểm nóng nhất hoặc nhỏ nhất và nhiệt độ tại những điểm này bằng bao nhiêu? Một bãi rác thải công nghiệp độc hại được bao bởi một đường cong $F(x,y) = 0$. Khoảng cách lớn nhất và nhỏ nhất từ một điểm trong P_0 tới biên là bao nhiêu? Chúng ta bắt đầu nghiên cứu cực trị với một vài khái niệm.

Định nghĩa 11.7.1 (Cực trị tuyệt đối)**.** Hàm $f(x,y)$ được gọi là đạt **cực đại tuyệt đối** (absolute maximum) tại (x_0,y_0) nếu $f(x_0,y_0) \geq f(x,y)$ với mọi (x,y) trong miền xác định D của f. Tương tự, f được gọi là đạt **cực tiểu tuyệt đối** (absolute minimum) tại (x_0,y_0) nếu $f(x_0,y_0) \leq f(x,y)$ với mọi (x,y) trong D. Cực đại tuyệt đối và cực tiểu tuyệt đối được gọi chung là **cực trị tuyệt đối** (absolute extrema).

Trong Chương 4, chúng ta đã xác định cực trị tuyệt đối của hàm một biến bởi trước hết là tìm cực trị tương đối (hay cực trị địa phương), những giá trị này của $f(x)$ là lớn hơn hoặc nhỏ hơn giá trị tại những điểm lân cận. Cực trị tương đối của một hàm hai biến có thể được định nghĩa như sau.

Định nghĩa 11.7.2 (Cực trị tương đối)**.** Cho f là một hàm xác định trên một miền chứa (x_0,y_0).

i. $f(x_0,y_0)$ là một **cực đại tương đối** (relative maximum) nếu $f(x,y) \leq f(x_0,y_0)$ với mọi (x,y) nằm trong một đĩa mở chứa (x_0,y_0).

ii. $f(x_0,y_0)$ là một **cực tiểu tương đối** (relative minimum) nếu $f(x,y) \geq f(x_0,y_0)$ với mọi (x,y) nằm trong một đĩa mở chứa (x_0,y_0).

11.7.1 Cực trị tương đối

Trong Chương 4, chúng ta đã thấy rằng cực trị tương đối của một hàm f ứng với "đỉnh và đáy" của đồ thị của nó, và một quan sát tương tự có thể có được về cực trị tương đối trong trường hợp hai biến, như được thấy trong Hình 11.35.

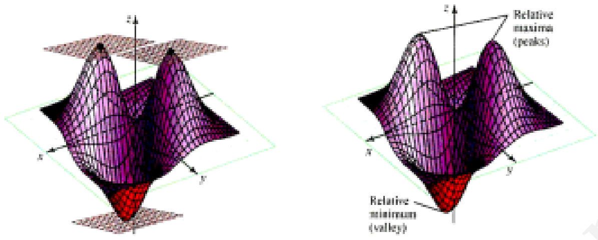


Figure 11.35 Relative extrema correspond to peaks and valleys

Với một hàm một biến f, chúng ta đã thấy rằng cực trị tương đối xuất hiện khi $f'(x) = 0$ hoặc $f'(x)$ không tồn tại. Định lý sau đây chỉ ra rằng cực trị tương đối của một hàm hai biến có thể được xác định một cách tương tự.

Định lý 11.7.1. *Nếu f có một cực trị tương đối (cực đại hoặc cực tiểu) tại $P_0(x_0, y_0)$ và các đạo hàm riêng f_x và f_y đều tồn tại tại (x_0, y_0) thì*

$$f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0.$$

Chú ý là tồn tại một tiếp diện nằm ngang tại mỗi điểm cực trị, nơi mà các đạo hàm riêng tồn tại. Tuy nhiên, điều này không khẳng định được rằng nếu tồn tại tiếp diện nằm ngang tại điểm P, thì tại đó ắt có cực trị. Tất cả điều đó chỉ có thể nói rằng tại những điểm P như thế hàm có khả năng đạt cực trị.

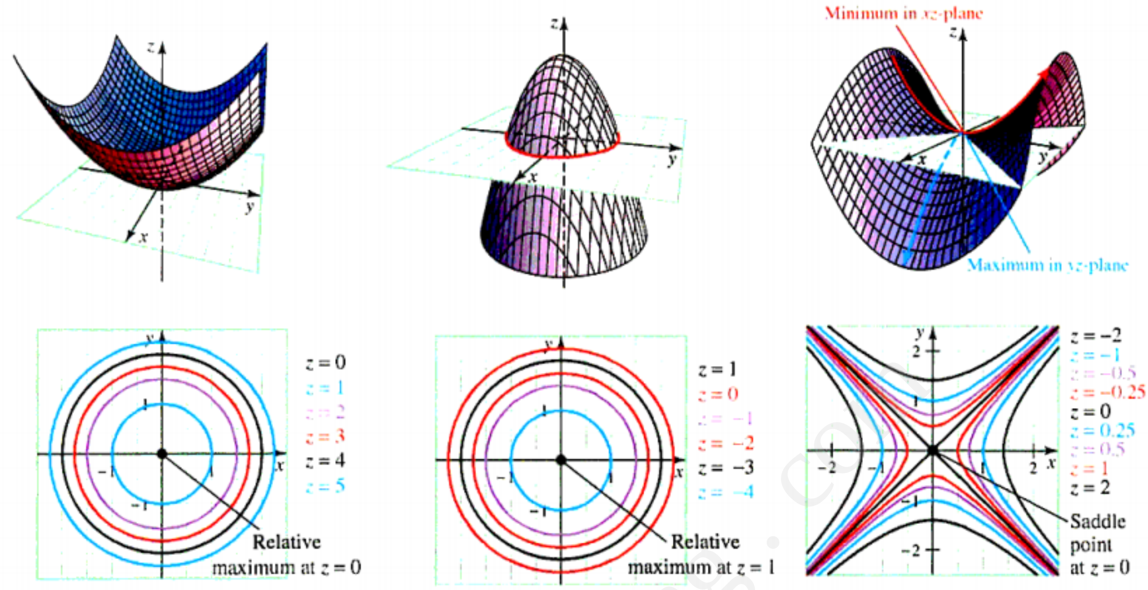
Định nghĩa 11.7.3. Một **điểm tới hạn** (critical point) của hàm f xác định trên một đĩa mở tại một điểm (x_0, y_0) trong D khi hoặc một trong các điều sau đây xảy ra:

a. $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$.

b. Ít nhất một trong các $f_x(x_0, y_0)$ hoặc $f_y(x_0, y_0)$ không tồn tại.

Ví dụ 11.7.1.(Phân biệt các điểm tới hạn)
Thảo luận về bản chất của điểm tới hạn $(0, 0)$ của các mặt bậc hai
a. $z = x^2 + y^2$ b. $z + x^2 + y^2 = 1$ c. $z = y^2 - x^2$

Giải. Đồ thị của những mặt bậc hai này được chỉ ra trong Hình 11.36.



a. $z = x^2 + y^2$
Relative minimum at (0,0)

b. $z + x^2 + y^2 = 1$
Relative maximum at (0,0)

c. $z = y^2 - x^2$
Saddle point at (0,0)

Figure 11.36 Interactive Classification of critical points

Đặt $f(x,y) = x^2 + y^2$, $g(x,y) = 1 - x^2 - y^2$, $h(x,y) = y^2 - x^2$. Chúng ta tìm được các điểm tới hạn:

a. $f_x(x,y) = 2x, f_y(x,y) = 2y$; điểm tới hạn $(0,0)$. Hàm f có cực tiểu tương đối tại $(0,0)$ vì x^2 và y^2 đều không âm, do đó $x^2 + y^2 > 0$ với mọi x và y khác không.

b. $g_x(x,y) = -2x, g_y(x,y) = -2y$, điểm tới hạn $(0,0)$. Từ $z = x^2 + y^2 - 1$, điều này dẫn tới $z \leq 1$ và giá trị cực tiểu tương đối xảy ra khi x^2 và y^2 đều bằng 0; nghĩa là tại $(0,0)$.

c. $h_x(x,y) = -2x, h_y(x,y) = 2y$; điểm tới hạn $(0,0)$. Hàm h không có cực đại lẫn cực tiểu tương đối tại điểm tới hạn $(0,0)$. Khi $z = 0$, h là cực tiểu trên trục y (với $x = 0$) và là cực đại trên trục x (với $y = 0$).

□

Một điểm $P_0(x_0, y_0)$ được gọi là **điểm yên ngựa** (saddle point) của $f(x,y)$ nếu với mọi đĩa mở có tâm tại P_0 có chứa những điểm trong tập xác định của f thỏa mãn $f(x,y) > f(x_0,y_0)$ cũng như các điểm trong tập xác định của f thỏa mãn $f(x,y) < f(x_0,y_0)$. Một ví dụ về điểm yên ngựa là điểm $(0,0)$ trên mặt parabloid hyperbloic (mặt yên ngựa) $z = y^2 - x^2$, như đã chỉ ra trong Hình 1.36c.

11.7.2 Tiêu chuẩn đạo hàm riêng cấp hai

Ví dụ trên chỉ rõ sự cần thiết phải có một tiêu chuẩn để xác định bản chất của một điểm tới hạn. Trong Chương 4, chúng ta đã phát triển tiêu chuẩn về đạo hàm cấp hai cho các hàm một biến với ý nghĩa xác định xem một điểm tới hạn c của f ứng với giá trị cực đại hay cực tiểu. Nếu $f'(x) = 0$, theo tiêu chuẩn này, $x = c$ là điểm cực đại nếu $f''(c) < 0$ và cực tiểu nếu. Nếu $f''(c) = 0$, tiêu chuẩn là không xác định được. Kết quả tương tự cho các hàm hai biến có thể phát biểu như sau.

Định lý 11.7.2 (Tiêu chuẩn đạo hàm riêng cấp hai)**.** *Cho $f(x, y)$ có điểm tới hạn $P(x_0, y_0)$ và giả sử rằng f có các đạo hàm riêng cấp hai liên tục trong một đĩa tròn có tâm tại (x_0, y_0). Biệt thức của f là biểu thức $D = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$. Khi đó,*

Hàm f đạt cực đại tương đối tại P_0 nếu $D(x_0, y_0) > 0$ và $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$ (hoặc tương đương $D(x_0, y_0) > 0$ và $f_{yy}(x_0, y_0) < 0$).

Hàm f đạt cực tiểu tương đối tại P_0 nếu $D(x_0, y_0) > 0$ và $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$ (hoặc tương đương $D(x_0, y_0) > 0$ và $f_{yy}(x_0, y_0) > 0$).

Điểm P_0 là điểm yên ngựa nếu $D(x_0, y_0) < 0$.

Nếu $D(x_0, y_0) = 0$, khi đó tiêu chuẩn là không xác định. Chúng ta không thể nói được gì về bản chất của mặt cong tại (x_0, y_0) mà không có thêm sự phân tích nào.

Biệt thức $D = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$ có thể nhớ được dễ dàng từ dạng định thức tương đương $D = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix}$. Chú ý rằng để $D > 0$ tại điểm tới hạn $P(x_0, y_0)$ thì f_{xx} và f_{yy} phải có cùng dấu. Đó là lý do vì sao khi $D > 0$ thì chỉ cần hoặc $f_{xx} > 0$ hoặc $f_{yy} > 0$ là đủ để đảm bảo có cực tiểu tương đối tại P_0 (hoặc cực đại tương đối nếu $f_{xx} < 0$ hoặc $f_{yy} < 0$).

Một cách hình học, nếu $D > 0$ và $f_{xx} > 0$ và $f_{yy} > 0$ tại P_0, khi đó mặt cong $z = f(x, y)$ uốn cong lên trên theo tất cả các hướng từ điểm $Q(x_0, y_0, z_0)$, do đó tồn tại cực tiểu tương đối tại Q. Cũng như vậy, nếu $D > 0$ và $f_{xx} < 0$ và $f_{yy} < 0$ tại P_0, khi đó mặt cong $z = f(x, y)$ uốn cong xuống phía dưới theo tất cả các hướng từ điểm $Q(x_0, y_0, z_0)$, bởi thế tại đó phải có cực đại tương đối. Tuy nhiên, nếu $D < 0$ tại P_0, mặt cong uốn lên từ Q theo một số hướng, và uốn xuống dưới theo những hướng khác, do đó Q phải là điểm yên ngựa.

Chú ý rằng tiêu chuẩn đạo hàm riêng cấp hai không nói gì về dạng hình dáng của mặt cong tại Q nếu $D = 0$ tại P_0. Ví dụ 4 và Bài tập 52 chỉ ra rằng một cực tiểu tương đối, một cực đại tương đối, mọi điểm yên ngựa hoặc một cái gì đó hoàn toàn khác có thể xảy ra nếu $D = 0$.

Ví dụ 11.7.2.(Sử dụng tiêu chuẩn đạo hàm riêng cấp hai để phân loại các điểm tới hạn) Tìm tất cả các cực trị tương đối và điểm yên ngựa của hàm $f(x, y) = 2x^2 + 2xy + y^2 - 2x - 2y + 5$.

Giải. Trước hết, tìm những điểm tới hạn: $f_x = 4x + 2y - 2$, $f_y = 2x + 2y - 2$. Cho $f_x = 0$ và $f_y = 0$, chúng ta nhận được hệ phương trình

$$\begin{cases} 4x + 2y - 2 = 0, \\ 2x + 2y - 2 = 0. \end{cases}$$

Giải ra ta nhận được $x - 0, y = 1$. Như vậy $(0, 1)$ là một điểm tới hạn duy nhất. Để áp dụng tiêu chuẩn đạo hàm riêng cấp hai ta tính được $f_{xx} = 4, f_{yy} = 2, f_{xy} = 2$ và

$D = f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 = (4)(2) - 2^2 = 4$. Với điểm tới hạn $(0, 1)$ ta có $D = 4 > 0$ và $f_{xx} = 4 > 0$ nên có cực tiểu tương đối tại $(0, 1)$. □

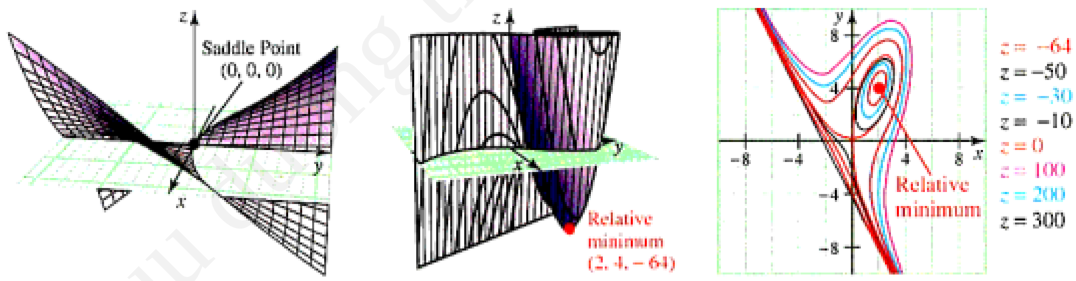
Ví dụ 11.7.3.(Tiêu chuẩn đạo hàm riêng cấp hai với cực trị tương đối và điểm yên ngựa)
Tìm tất cả các điểm tới hạn trên đồ thị của $f(x, y) = 8x^3 - 24xy + y^3$, và sử dụng tiêu chuẩn đạo hàm riêng cấp hai để phân loại các điểm là cực trị tương đối hay điểm yên ngựa.

Giải. $f_x = 24x^2 - 24y, f_y = -24x + 3y^2$. Để tìm các điểm tới hạn ta giải

$$\begin{cases} 24x^2 - 24y = 0 \\ -24x + 3y^2 = 0 \end{cases}.$$

Từ phương trình đầu ta được $y = x^2$, thay vào phương trình thứ hai ta được $-24x + 3(x^2)^2 = 0 \Leftrightarrow x(x^3 - 8) = 0 \Leftrightarrow x(x-2)(x^2 + 2x + 4) = 0 \Leftrightarrow x = 0, 2$ Nếu $x = 0$ thì $y = 0$ và nếu $x = 2$ thì $y = 4$, do đó các điểm tới hạn là $(0, 0)$ và $(2, 4)$. Để tính D trước hết chúng ta tính $f_{xx} = 48x, f_{yy} = 6y, f_{xy} = -24$, và do đó $D(x, y) = (48x)(6y) - (-24)^2 = 288xy - 576$.

Tại $(0, 0)$, $D = -576 < 0$, do đó có một điểm yên ngựa tại $(0, 0)$. Tại $(2, 4)$, $D = 288(2)(4) - 576 = 1728 > 0$ và $f_{xx}(2, 4) = 96 > 0$, do đó có cực tiểu tương đối tại $(2, 4)$. Để xem ở dạng đồ họa, chúng tôi tính các tọa độ của điểm yên ngựa $(0, 0, 0)$ và điểm cực tiểu tương đối $(2, 4, -64)$ như được chỉ ra trong Hình 11.37.



a. View near the origin (showing the saddle point)
b. View away from the origin (showing the relative minimum point)
c. Level curves

Figure 11.37 Interactive Graph of $f(x, y) = 8x^3 - 24xy + y^3$

□

Ví dụ 11.7.4.(Cực trị khi tiêu chuẩn đạo hàm riêng cấp hai không sử dụng được)
Tìm tất cả cực trị tương đối và điểm yên ngựa trên đồ thị của $f(x, y) = x^2 y^4$. Đồ thị của nó được chỉ ra trong Hình 11.38.

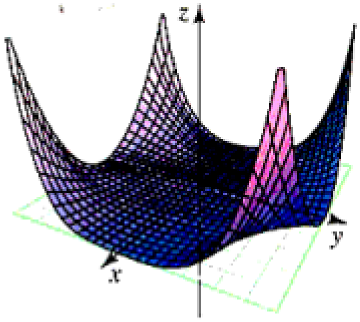


Figure 11.38 Interactive
Graph of $f(x, y) = x^2y^4$

Giải. Từ $f_x = 2xy^4, f_y = 4x^2y^3$, chúng ta thấy rằng các điểm tới hạn xuất hiện chỉ khi $x = 0$ hoặc $y = 0$; nghĩa là, mọi điểm nằm trên trục x và trục y đều là điểm tới hạn. Vì $f_{xx}(x, y) = 2y^4, f_{xy}(x, y) = 8xy^3, f_{yy}(x, y) = 12x^2y^2$. nên biệt thức là $D = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2y^4 & 8xy^3 \\ 8xy^3 & 12x^2y^2 \end{vmatrix} = 24x^2y^6 - 64x^2y^6 = -40x^2y^6$. Từ $D = 0$ với mọi điểm tới hạn $(x_0, 0)$ hoặc $(0, y_0)$, tiêu chuẩn đạo hàm riêng cấp hai không sử dụng được. Tuy nhiên, $f(x, y) = 0$ tại mọi điểm tới hạn và vì $f(x, y) = x^2y^4 > 0$ khi $x \neq 0$ và $y \neq 0$, điều này dẫn tới mỗi điểm tới hạn phải là cực tiểu tương đối. □

11.7.3 Cực trị tuyệt đối của hàm liên tục

Định lý giá trị cực trị (Định lý 4.1) nói rằng một hàm một biến f phải có cực đại tuyệt đối và cực tiểu tuyệt đối trên một đoạn đóng, bị chặn $[a, b]$ với điều kiện nó liên tục. Trong $\mathbb{R}^2$, một tập khác rỗng S là đóng nếu nó chứa biên của nó (xem giới thiệu trong Mục 11.2) và là bị chặn nếu nó được chứa trong một đĩa tròn. Một phát biểu tương tự có thể phát biểu cho $\mathbb{R}^3$. Định lý giá trị cực trị có thể được mở rộng cho các hàm hai biến dưới dạng sau.

Định lý 11.7.3 (Sự tồn tại cực trị tuyệt đối của hàm hai biến)**.** *Một hàm hai biến $f(x, y)$ nhận giá trị cực đại tuyệt đối và cực tiểu tuyệt đối trên bất kỳ một tập đóng và bị chặn nào khi nó liên tục.*

Cách tìm cự trị tuyệt đối của hàm hai biến

Để tìm cực trị tuyệt đối của một hàm liên tục f trên một tập đóng và bị chặn S chúng ta làm theo thủ tục sau:
Bước 1. Tìm tất cả các điểm tới hạn của f trên S.
Bước 2. Tìm tất cả các điểm trên biên của S mà cực trị tuyệt đối có thể xuất hiện (các điểm biên, các điểm tới hạn, điểm mút,...).

Bước 3. Tính giá trị $f(x_0, y_0)$ tại mỗi điểm (x_0, y_0) đã tìm thấy ở bước 1 và bước 2.
Bước 4. Giá trị cực đại tuyệt đối của f trên S là giá trị lớn nhất tính được ở Bước 3, giá trị cực tiểu tuyệt đối là giá trị nhỏ nhất trong các giá trị tính được.

Ví dụ 11.7.5.(Tìm cực trị tuyệt đối)
Tìm cực trị tuyệt đối của hàm $f(x, y) = e^{x^2 - y^2}$ trên đĩa $x^2 + y^2 \leq 1$.

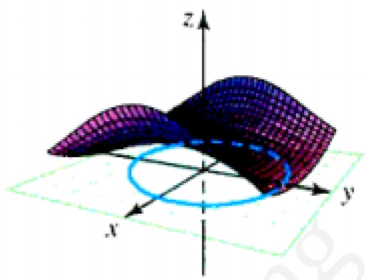


Figure 11.39 Graph of *f* over a disk

Giải. **Bước 1:** $f_x(x, y) = 2xe^{x^2-y^2}$ và $f_y(x, y) = -2ye^{x^2-y^2}$. Những đạo hàm riêng này xác định với mọi (x, y). Vì $f_x(x, y) = f_y(x, y) = 0$ chỉ khi $x = y = 0$ nên f chỉ có một điểm tới hạn $(0, 0)$ trên đĩa.
Bước 2: Xác định giá trị của f trên đường cong biên $x^2 + y^2 = 1$. Vì $y^2 = 1 - x^2$ trên biên của đĩa, ta tìm được $f(x, y) = e^{x^2-y^2} = e^{x^2-(1-x^2)} = e^{2x^2-1}$. Chúng ta cần tìm được giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $F(x) = e^{2x^2-1}$ với $-1 \leq x \leq 1$. Từ $F'(x) = 4xe^{2x^2-1}$, ta thấy rằng $F'(x) = 0$ chỉ khi $x = 0$ (do e^{2x^2-1} luôn luôn dương). Tại $x = 0$, ta có $y^2 = 1 - 0^2$, do đó $y = \pm 1$; vậy $(0, 1)$ và $(0, -1)$ là điểm tới hạn trên biên. Tại mút của đoạn $-1 \leq x \leq 1$, các điểm tương ứng là $(-1, 0)$ và $(1, 0)$.
Bước 3: Tính giá trị của f tại những điểm đã tìm được trong bước 1 và 2.

Điểm kiểm tra	$f(x_0, y_0)$	Kết luận
(0,0)	$e^0 = 1$	
(0,1)	e^{-1}	cực tiểu
(0,-1)	e^{-1}	cực tiểu
(1,0)	e	cực đại
(-1,0)	e	cực đại

Bước 4: Như đã được chỉ ra trong bảng trên, giá trị cực đại tuyệt đối của f trên đĩa là e, xuất hiện tại $(-1, 0)$ và $(1, 0)$, và giá trị nhỏ nhất là e^{-1}, xuất hiện tại $(0, -1)$ và $(0, 1)$. □

Ví dụ 11.7.6.(Khoảng cách nhỏ nhất từ một điểm trên một mặt phẳng)
Tìm điểm trên mặt phẳng $x + 2y + z = 5$ gần nhất với điểm $P(0, 3, 4)$.

Giải. Nếu $Q(x, y, z)$ là một điểm trên mặt phẳng $x+2y+z=5$, thì $z=5-x-2y$ và khoảng cách từ P đến Q là

$$d=\sqrt{(x-0)^2+(y-3)^2+(z-4)^2}=\sqrt{x^2+(y-3)^2+(5-x-2y-4)^2}.$$

Thay cho cực tiểu hóa d, ta có thể cực tiểu hóa

$$f(x, y)=d^2=x^2+(y-3)^3+(1-x-2y)^2,$$

do giá trị nhỏ nhất của d xuất hiện tại cùng những điểm mà d^2 đạt cực tiểu. Để cực tiểu hóa $f(x, y)$, trước hết chúng ta xác định những điểm tới hạn của f bằng cách giải hệ phương trình $\begin{cases} f_x=2x-2(1-x-2y)=4x+4y-2=0, \\ f_y=2(y-3)-4(1-x-2y)=4x+10y-10=0. \end{cases}$
Chúng ta nhận được $x=-\frac{5}{6}, y=\frac{4}{3}$ và từ $f_{xx}=4, f_{yy}=4, f_{xy}=4$, ta tìm được

$$D=f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2=4(10)-4^2>0, f_{xx}=4>0,$$

do đó cực tiểu tương đối đạt tại $\left(-\frac{5}{6}, \frac{4}{3}\right)$. Bằng trực giác, ta thấy rằng cực tiểu tương đối này cũng phải là cực tiểu tuyệt đối vì ắt phải có đúng một điểm trên mặt phẳng mà gần nhất với điểm đã cho. Giá trị cao độ tương ứng là $z=5-\left(-\frac{5}{6}\right)-2\left(\frac{4}{3}\right)=\frac{19}{6}$. Do đó điểm gần nhất trên mặt phẳng là $Q\left(-\frac{5}{6}, \frac{4}{3}, \frac{19}{6}\right)$, và khảng cách nhỏ nhất là

$$d=\sqrt{\left(\frac{5}{6}\right)^2+\left(\frac{4}{3}-3\right)^2+\left(\frac{19}{6}-4\right)^2}=\sqrt{\frac{25}{6}}=\frac{5}{\sqrt{6}}.$$

Kiểm tra: Có thể kiểm tra công việc của mình bằng cách sử dụng công thức tính khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng trong $\mathbb{R}^3$ (Định lý 9.9):

$$d=\left|\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right|=\left|\frac{0+2(3)+4-5}{\sqrt{1^2+2^2+1^2}}\right|=\frac{5}{\sqrt{6}}.$$

□

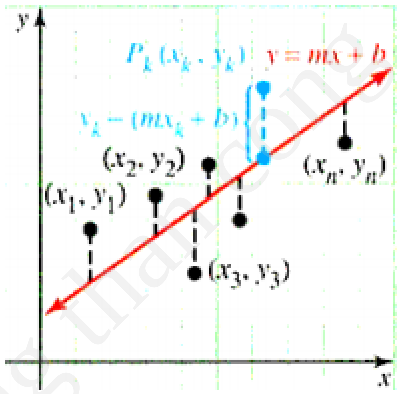
Xấp xỉ bình phương nhỏ nhất của dữ liệu

Trong ví dụ sau đây, các tính toán được áp dụng để giải thích một công thức được sử dụng trong thống kê và trong nhiều ứng dụng khoa học tự nhiên và xã hội.
Ví dụ 11.7.7.(Xấp xỉ bình phương nhỏ nhất của dữ liệu)
Giả sử dữ liệu bao gồm n điểm $P_1, ..., P_n$ được biết, và chúng ta muốn tìm một hàm $f(x)$ mà tương thích tốt với dữ liệu một cách hợp lý. Đặc biệt, giả sử rằng chúng ta muốn tìm một đường thẳng $y=mx+b$ mà "phù hợp nhất" với dữ liệu theo nghĩa là tổng các bình phương của các khoảng cách thẳng đứng từ mỗi điểm dữ liệu đến đường thẳng đó là nhỏ nhất.

Giải. Chúng ta muốn tìm các giá trị của m và b mà cực tiểu của tổng các bình phương chênh lệch giữa tung độ y và đường thẳng $y = mx + b$. Đường thẳng mà chúng ta tìm kiếm được gọi là đường hồi quy. Giả sử rằng điểm P_k có các thành phần (x_k, y_k). Bây giờ tại điểm này giá trị trên đường hồi quy là $y = mx_k + b$ và giá trị của điểm dữ liệu là y_k. "Sai số" gây ra do việc sử dụng điểm trên đường hồi quy so với sử dụng điểm dữ liệu thực tế có thể được đo bởi chênh lệch $y_k - (mx_k + b)$. Các điểm dữ liệu có thể ở phía trên đường hồi quy với một số giá trị k nào đó và nằm phía dưới với những giá trị k khác. Chúng ta thấy rằng chúng ta cần phải cực tiểu hóa hàm biểu diễn tổng của các bình phương của tất cả các chênh lệch này:

$$F(m, b) = \sum_{k=1}^{n} [y_k - (mx_k + b)]^2.$$

Tình huống này được mô phỏng trong Hình 11.40.



Vì F là hàm hai biến, chúng ta sử dụng tiêu chuẩn đạo hàm riêng cấp hai:

$$F_m(m, b) = \sum_{k=1}^{n} 2[y_k - (mx_k + b)](-x_k)$$

$$= 2m\sum_{k=1}^{n} x_k^2 + 2b\sum_{k=1}^{n} x_k - 2\sum_{k=1}^{n} x_k y_k$$

$$F_b(m, b) = \sum_{k=1}^{n} 2[y_k - (mx_k + b)](-1)$$

$$= 2m\sum_{k=1}^{n} x_k + 2b\sum_{k=1}^{n} 1 - 2\sum_{k=1}^{n} y_k$$

$$= 2m\sum_{k=1}^{n} x_k + 2bn - 2\sum_{k=1}^{n} y_k$$

Cho mỗi đạp hàm riêng này bằng 0 để tìm các giá trị tới hạn (xem Vấn đề 59).

$$m = \frac{n\sum_{k=1}^{n} x_k y_k - \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} y_k\right)}{n\sum_{k=1}^{n} x_k^2 - \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2}, b = \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \sum_{k=1}^{n} y_k - \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right)}{n\sum_{k=1}^{n} x_k^2 - \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2}.$$

Chúng tôi dành cho các bạn việc sử dụng tiêu chuẩn đạo hàm riêng cấp hai để chứng tỏ rằng những giá trị của m và b cho giá trị cực tiểu tương đối. □

Hầu hết các ứng dụng của công thức bình phương nhỏ nhất được phát biểu trong Ví dụ này liên quan đến việc sử dụng máy tính hoặc phần mềm máy tính. Nếu bạn sử dụng một máy tính, hãy kiểm tra các tính toán của mình chi tiết hơn.

11.8 Nhân tử Lagrange

Trong thế giới thực, chúng ta đối mặt với rất nhiều vấn đề liên quan đến tối ưu hóa. Trong Chương 4, chúng ta đã xét cực trị của hàm một biến, và trong mục này chúng ta mở rộng công việc của mình cho các hàm hai biến.

11.8.1 Phương pháp nhân tử Lagrange

Trong nhiều vấn đề ứng dụng, một hàm hai biến được tối ưu phụ thuộc vào một hạn chế hay một ràng buộc về các biến. Chẳng hạn, xét một cái thùng được đốt nóng theo cách là nhiệt tại điểm (x, y, z) của thùng được cho bởi hàm $T(x, y, z)$. Giả sử mặt cong $z = f(x, y)$ nằm trong thùng, và chúng ta muốn tìm điểm trên $z = f(x, y)$ sao cho có nhiệt độ lớn nhất. Nói cách khác, Giá trị lớn nhất của T phụ thuộc vào ràng buộc $z = f(x, y)$ là bao nhiêu, và giá trị lớn nhất đó đạt tại đâu?

Định lý 11.8.1. *Giả sử rằng f và g có các đạo hàm riêng cấp một liên tục và f đạt cực trị tại $P_0(x_0, y_0)$ khi hạn chế lên đường cong ràng buộc trơn $g(x, y) = c$. Nếu $\nabla g(x_0, y_0) \neq 0$, tồn tại một số λ sao cho*

$$\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0).$$

Vấn đề tối ưu có điều kiện

Thuật toán tổng quát sử dụng phương pháp nhân tử Lagrange có thể được mô tả như sau.

Giả sử f và g thỏa mãn các điều kiện của định lý Lagrange, và $f(x, y)$ có cực trị phụ thuộc vào ràng buộc $g(x, y) = c$. Khi đó để tìm giá trị cực trị, hãy bắt đầu như sau:

Bước 1: Giải đồng thời hệ ba phương trình sau đây với x, y và λ:

$$\begin{cases} f_x(x,y) = \lambda g_x(x,y) \\ f_y(x,y) = \lambda g_y(x,y) \\ g(x,y) = c \end{cases}.$$

Bước 2: Tính giá trị f tại tất cả các điểm tìm được ở bước 1 và tất cả các điểm trên biên của ràng buộc. Giá trị cực trị mà chúng ta cần tìm phải nằm trong các giá trị này.

Ví dụ 11.8.1.(Tối ưu hóa với nhân tử Lagrange)
Biết rằng giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $f(x,y) = 1 - x^2 - y^2$ phụ thuộc vào điều kiện $x + y = 1$ với $x \geq 0, y \geq 0$ tồn tại, sử dụng phương pháp nhân tử Lagrange để tìm những cực trị này.

Giải. Vì điều kiện là $x + y = 1$, đặt $g(x,y) = x + y$.

$$f_x(x,y) = -2x, f_y(x,y) = -2y, g_x(x,y) = 1, g_y(x,y) = 1.$$

Thiết lập hệ

$$\begin{cases} -2x = \lambda(1) & \leftarrow f_x(x,y) = \lambda g_x(x,y) \\ -2y = \lambda(1) & \leftarrow f_y(x,y) = \lambda g_y(x,y) \\ \quad x + y = 1 & \leftarrow g(x,y) = c \end{cases}$$

Hệ chỉ có nghiệm là $x = \frac{1}{2} = y$.

$$f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}.$$

Điểm mút của đoạn thẳng $x + y = 1$ với $x \geq 0, y \geq 0$ là $(1,0)$ và $(0,1)$ và $f(1,0) = 0 = f(0,1)$ Bởi vậy, giá trị cực đại là $\frac{1}{2}$ tại $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, và giá trị cực tiểu là 0 tại $(1,0)$ và$(0,1)$. Xem Hình 11.43 để hình dung về giá trị cực đại. □

Phương pháp nhân tử Lagrange mở rộng một cách tự nhiên cho các hàm ba hay nhiều biến hơn. Nếu một hàm $f(x,y,z)$ có một giá trị cực trị phụ thuộc vào điều kiện $g(x,y,z) = c$, thì giá trị cực trị xuất hiện tại điểm (x_0, y_0, z_0) sao cho $g(x_0, y_0, z_0) = c$ và $\nabla f(x_0, y_0, z_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0, z_0)$ với số λ nào đó. Sau đây là một ví dụ.

Ví dụ 11.8.2.(Điểm nóng nhất và lạnh nhất của một cái đĩa)
Một cái thùng trong $\mathbb{R}^3$ có hình dạng một khối lập phương cho bởi $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1$. Một bản phẳng kim loại được đặt trong thùng theo cách nó chiếm một phần của mặt phẳng $x + y + z = 1$ nằm trong thùng hình lập phương. Nếu cái thùng này được đốt nóng sao cho nhiệt độ tại mỗi điểm (x,y,z) cho bởi

$$T(x,y,z) = 4 - 2x^2 - y^2 - z^2.$$

theo phần trăm của nhiệt độ Celsius, điểm nóng nhất và lạnh nhất trên bản kim loại là bao nhiêu. Bạn có thể giả thiết những nhiệt độ cực trị này tồn tại.

Giải. Hình lập phương và bản kim loại được chỉ ra trong Hình 11.44.

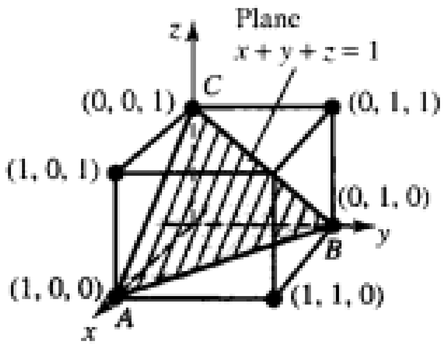


Figure 11.44 Cube and plate

Chúng ta sẽ sử dụng nhân tử Lagrange để tìm tất cả các điểm tới hạn trong phần trong của bản kim loại, và sau đó chúng ta sẽ xem xét trên biên. Để áp dụng phương pháp nhân tử Lagrange, chúng ta phải giải $\nabla T = \lambda \nabla g$, với $g(x, y, z) = x + y + z$. Ta tính được các đạo hàm riêng

$$T_x = -4x, T_y = -2y, T_z = -2z, g_x = g_y = g_z = 1.$$

Chúng ta phải giải hệ phương trình

$$\begin{cases} -4x = \lambda \leftarrow T_x = \lambda g_x \\ -2y = \lambda \leftarrow T_y = \lambda g_y \\ -2z = \lambda \leftarrow T_z = \lambda g_z \\ x + y + z = 1 \leftarrow g(x, y, z) = 1 \end{cases}$$

Nghiệm của hệ này là $\left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{2}{5}\right)$. Biên của bản phẳng là tam giác với các đỉnh là $A(1, 0, 0), B(0, 1, 0), C(0, 0, 1)$. Nhiệt độ dọc theo các cạnh của tam giác này có thể tìm được như sau:

$T_1(x) = 4 - 2x^2 - (0)^2 - (1 - x)^2 = 3 - 3x^2 + 2x, 0 \le x \le 1$ $(AC : x + z = 1, y = 0)$.
$T_2(x) = 4 - 2x^2 - (1 - x)^2 - (0)^2 = 3 - 3x^2 + 2x, 0 \le x \le 1$ $(AB : x + y = 1, z = 0)$.
$T_3(y) = 4 - 2(0)^2 - y^2 - (1 - y)^2 = 3 + 2y - 2y^2, 0 \le y \le 1$ $(BC : y + z = 1, x = 0)$.

Cạnh AC: Lấy vi phân, $T'_1(x) = T'_2(x) = -6x + 2$, chúng chỉ bằng 0 khi $x = \frac{1}{3}$. Nếu $x = \frac{1}{3}$ thì $z = \frac{2}{3}$ (vì $x + z = 1, y = 0$ trên AC), do đó ta có điểm tới hạn $\left(\frac{1}{3}, 0, \frac{2}{3}\right)$.
Cạnh AB: Vì $T_2 = T_1$, ta có $x = \frac{1}{3}$. Nếu $x = \frac{1}{3}$, thì $y = \frac{2}{3}$ $(x + y = 1, z = 0$ trên AB), vì thế chúng ta có một điểm tới hạn khác là $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0\right)$.

Cạnh BC: Lấy vi phân, $T'_3(y) = 2 - 4y$, bằng 0 khi $y = \frac{1}{2}$. Vì $y + z = 1$ và $x = 0$, ta có điểm tới hạn $\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Các điểm mút của các đoạn: $(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)$. Bước cuối là tính T tại các điểm tới hạn và các điểm mút:

$$T\left(\tfrac{1}{5}, \tfrac{2}{5}, \tfrac{2}{5}\right) = 3\tfrac{3}{5}; T\left(\tfrac{1}{3}, 0, \tfrac{2}{3}\right) = 3\tfrac{1}{3};$$
$$T\left(\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}, 0\right) = 3\tfrac{1}{3}; T\left(0, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right) = 3\tfrac{1}{2};$$
$$T(1,0,0) = 2; T(0,1,0) = 3; T(0,0,1) = 3.$$

So sánh những giá trị này (nhớ rằng nhiệt độ là phần trăm của độ Celsius), chúng ta thấy rằng nhiệt độ cao nhất là 360°C tại $\left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{2}{5}\right)$ và nhiệt độ thấp nhất là 200°C tại $(1,0,0)$. □

Chú ý rằng nhân tử chỉ được dùng như một công cụ trung gian để tìm các điểm tới hạn và không đóng vai trò gì trong kết luận cuối cùng về cực trị có điều kiện. Tuy nhiên, giá trị của λ quan trọng hơn trong các vấn đề cụ thể, nhờ sự thể hiện được đưa ra trong định lý sau đây.

Định lý 11.8.2 (Tốc độ thay đổi của giá trị cực trị). *Giả sử E là một cực trị (cực đại hoặc cực tiểu) của f phụ thuộc điều kiện $g(x,y) = c$. Khi đó nhân tử Lagrange λ là tốc độ thay đổi của E theo c, nghĩa là, $\lambda = dE/dc$.*

Định lý này có thể được hiểu rằng nhân tử Lagrange ước lượng sự thay đổi giá trị cực trị E mà sự thay đổi này có được khi c thay đổi 1 đơn vị. Sự thể hiện này được minh họa trong ví dụ sau.

Ví dụ 11.8.3.(Sản lượng tối đa cho hàm sản xuất Cobb-Douglas)
Nếu x nghìn đô la được sử dụng cho nhân công và y nghìn đô la được sử dụng cho trang thiết bị, người ta có thể ước lượng sản lượng của một nhà máy sẽ là $Q(x,y) = 50x^{2/5}y^{3/5}$ đơn vị. Nếu có 150,000\$, nên phân phối số vốn này như thế nào giữa lao động và thiết bị để sản lượng đầu ra là lớn nhất có thể? Trong kinh tế, một hàm sản xuất tổng quát có dạng $Q(x,y) = cx^{\alpha}y^{1-\alpha}$ được gọi là **hàm sản xuất Cobb-Douglas**.

Giải. Vì x và y có đơn vị nghìn đô la (1,000\$), phương trình ràng buộc là $x + y = 150$. Nếu chúng ta đặt $g(x,y) = x + y$, chúng ta muốn cực đại Q với điều kiện $g(x,y) = 150$. Để áp dụng phương pháp nhân tử Lagrange, trước hết chúng ta tính

$$Q_x = 20x^{-3/5}y^{3/5}, Q_y = 30x^{2/5}y^{-2/5}, g_x = 1, g_y = 1.$$

Tiếp theo, giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 20x^{-3/5}y^{3/5} = \lambda(1) \\ 30x^{2/5}y^{-2/5} = \lambda(1) \\ x + y = 150 \end{cases}.$$

Từ hai phương trình đầu chúng ta có

$$20x^{-3/5}y^{3/5} = 30x^{2/5}y^{-2/5}$$
$$20y = 30x$$
$$y = 1.5x$$

Thay $y = 1.5x$ vào phương trình $x + y = 150$ ta tìm được $x = 60$. Điều này dẫn tới nghiệm $y = 90$, do đó sản lượng đầu ra cực đại là

$$Q\left(60, 90\right) = 50(60)^{2/5}(90)^{3/5} \approx 3826273502 \text{ (đơn vị).}$$

Chúng ta cũng tìm được

$$\lambda = 20(60)^{-3/5}(90)^{3/5} \approx 2550849001.$$

Bởi vậy, sản lượng là vào khoảng 3,826 đơn vị và xảy ra khi 60,000\$ được sử dụng vào lao động và 90,000\$ vào thiết bị. Chúng ta cũng chú ý rằng sự tăng thêm 1,000\$ (1 đơn vị) vào nguồn vốn khả dụng sẽ làm tăng sản lượng cực đại xấp xỉ $\lambda \approx 25.51\$$ đơn vị (từ $3,826.27$ đến $3,851.78$ đơn vị). Chú ý rằng chúng ta không cần phải kiểm tra tại các đầu mút $x = 0$ và $y = 0$, vì chúng dẫn tới giá trị cực tiểu, không là cực đại. □

11.8.2 Nhân tử Lagrange với hai biến

Phương pháp nhân tử Lagrange cũng có thể áp dụng được cho tình huống nhiều hơn một phương trình điều kiện ràng buộc. Giả sử chúng ta muốn xác định cực trị của một hàm xác định bởi $f\left(x, y, z\right)$ với hai điều kiện ràng buộc $g\left(x, y, z\right) = c_1$ và $h\left(x, y, z\right) = c_2$, với g và h cùng khả vi và ∇g và ∇h không cùng phương. Bằng cách tổng quát hóa định lý Lagrange, có thể chỉ ra rằng nếu (x_0, y_0, z_0) là điểm cực trị cần tìm, thì tồn tại hai số λ và μ sao cho $g\left(x_0, y_0, z_0\right) = c_1$ và $h\left(x_0, y_0, z_0\right) = c_2$, và

$$\nabla f\left(x_0, y_0, z_0\right) = \lambda \nabla g\left(x_0, y_0, z_0\right) + \mu \nabla h\left(x_0, y_0, z_0\right)$$

Như trong trường hợp một điều kiện ràng buộc, trước hết chúng ta giải hệ các phương trình này một cách đồng thời để tìm $\lambda, \mu, x_0, y_0, z_0$ và sau đó tính $f\left(x, y, z\right)$ tại mỗi nghiệm và so sánh để tìm giá trị cực trị cần tìm. Cách tiếp cận này được minh họa trong ví dụ cuối cùng của mục này.

Ví dụ 11.8.4.(Tối ưu hóa với hai điều kiện ràng buộc)
Tìm điểm trên giao của mặt phẳng $x + 2y + z = 10$ và paraboloid $z = x^2 + y^2$ mà gần gốc tọa độ nhất (xem Hình 11.45) . Bạn có thể giả thiết điểm như thế tồn tại.

Giải. Khoảng cách từ một điểm (x, y, z) đến gốc tọa độ là $s = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, nhưng thay vì cực tiểu hóa đại lượng này, để dễ hơn chúng ta cực tiểu hóa bình phương của nó. Nghĩa là chúng ta sẽ cực tiểu hóa $f\left(x, y, z\right) = x^2 + y^2 + z^2$ với các điều kiện chung $g\left(x, y, z\right) = x + 2y + z = 10$ và $h\left(x, y, z\right) = x^2 + y^2 - z = 0$ Tính các đạo hàm riêng của f, g và h ta được

$$\begin{array}{c} f_x = 2x,\ f_y = 2y, f_z = 2z \\ g_x = 1,\ g_y = 2, g_z = 1 \\ h_x = 2x, h_y = 2y, h_z = -1 \end{array}.$$

Để áp dụng phương pháp nhân tử Lagrange, chúng ta sử dụng công thức

$$\nabla f\left(x_0, y_0, z_0\right) = \lambda \nabla g\left(x_0, y_0, z_0\right) + \mu \nabla h\left(x_0, y_0, z_0\right)$$

và dẫn tới việc giải một hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x = \lambda\left(1\right) + \mu\left(2x\right) \\ 2y = \lambda\left(2\right) + \mu\left(2y\right) \\ 2z = \lambda\left(1\right) + \mu\left(-1\right) \\ x + 2y + z = 10 \\ z = x^2 + y^2 \end{cases}.$$

Đây không phải là một hệ phương trình tuyến tính, vì thế việc giải nó yêu cầu sự khéo léo. Nhân phương trình đầu với 2 và trừ cho phương trình thứ hai để nhận được

$$\begin{array}{ccc} 4x - 2y & = & \left(4x - 2y\right)\mu \\ \left(4x - 2y\right) - \left(4x - 2y\right)\mu & = & 0 \\ \left(4x - 2y\right)\left(1 - \mu\right) & = & 0 \\ 4x - 2y = 0 & \vee & 1 - \mu = 0 \end{array}$$

Trường hợp 1: Nếu $4x - 2y = 0$ thì $y = 2x$. Thay kết quả này vào hai phương trình điều kiện:

$$\begin{array}{cc} x + 2y + z = 10 & x^2 + y^2 - z = 0 \\ x + 2\left(2x\right) + z = 10 & x^2 + \left(2x\right)^2 - z = 0 \\ z = 10 - 5x & z = 5x^2 \end{array}$$

Từ đó ta có $5x^2 = 10 - 5x$, nghiệm là $x = 1$ và $x = -2$. Điều này dẫn tới

$$\begin{array}{cc} x = 1 & x = -2 \\ y = 2x = 2\left(1\right) = 2 & y = 2x = 2\left(-2\right) = -4 \\ z = 5x^2 = 5\left(1\right)^2 = 5 & z = 5x^2 = 5\left(-2\right)^2 = 20 \end{array}$$

Do đó, các điểm $(1, 2, 5)$ và $(-2, -4, 20)$ là thành viên cho việc xét khoảng cách nhỏ nhất.

Trường hợp 2: Nếu $1 - \mu = 0$ thì $\mu = 1$, và chúng ta tìm hệ phương trình bao gồm x, y, z, λ, μ.

$$\begin{cases} 2x = \lambda\left(1\right) + \mu\left(2x\right) \\ 2y = \lambda\left(2\right) + \mu\left(2y\right) \\ 2z = \lambda\left(1\right) + \mu\left(-1\right) \\ x + 2y + z = 10 \\ z = x^2 + y^2 \end{cases}$$

Phương trình trên cùng trở thành $2x = \lambda + 2x$, do đó $\lambda = 0$. Bây giờ chúng ta tìm z từ phương trình thứ ba: $2z = -1$ hoặc $z = -\frac{1}{2}$ Tiếp theo, bắt đầu vào các phương trình điều kiện

$$\begin{array}{cc} x + 2y + z = 10 & x^2 + y^2 - z = 0 \\ x + 2y - \frac{1}{2} = 10 & x^2 + y^2 + \frac{1}{2} = 0 \\ x + 2y = 10 + \frac{1}{2} & x^2 + y^2 = \frac{-1}{2} \end{array}$$

Hệ vô nghiệm vì $x^2 + y^2$ không thể bằng một số âm. Chúng ta kiểm tra tại các điểm tìm được:

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= x^2+y^2+z^2 \\ f(1,2,5) &= 1^2+2^2+5^2=30 \\ f(-2,-4,20) &= (-2)^2+(-4)^2+20^2=420 \end{aligned}$$

Vì $f(x,y,z)$ là bình phương của khoảng cách, khoảng cách nhỏ nhất là $\sqrt{30}$ và điểm nằm trên giao của hai mặt cong gần gốc tọa độ nhất chính là $(1,2,5)$. Chú ý rằng chúng ta không cần phải kiểm tra các điểm biên, vì không có điểm biên nào trên mặt phẳng và parabol. $\square$

Cách giải thích hình học của định lý Lagrange

Định lý Lagrange có thể giải thích được theo cách nhìn hình học. Giả sử đường cong ràng buộc $g(x,y)=c$ và các đường mức $f(x,y)=k$ được vẽ trong mặt phẳng xy như trong Hình 11.46. Để cực đại hóa $f(x,y)$ theo điều kiện $g(x,y)=c$, chúng ta phải tìm đường mức "cao nhất" (đường bên phải nhất), mà giao với đường điều kiện. Như sự phác thảo trong Hình 11.46 chỉ ra, sự giao nhau tới hạn này xuất hiện tại điểm mà đường cong điều kiện là tiếp xúc với đường mức, nghĩa là, khi độ dốc của đường cong điều kiện $g(x,y)=c$ bằng với độ dốc của đường mức $f(x,y)=k$. Theo định lý hàm ẩn (Định lý 11.5, p. 863)

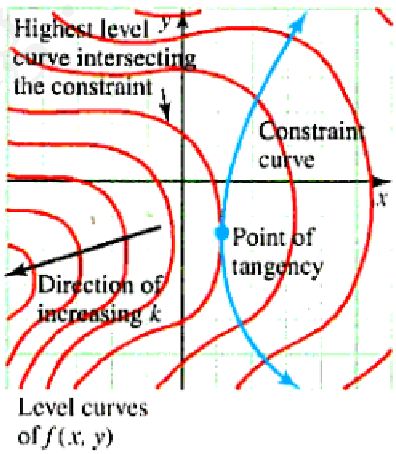


Figure 11.46 Increasing level curves and the constraint curve

Hệ số góc của đường cong điều kiện $g(x,y)=c$ là $-\frac{g_x}{g_y}$.

Hệ số góc của đường mức $f(x,y)=k$ là $-\frac{f_x}{f_y}$.

Điều kiện mà các độ dốc bằng nhau có thể biểu diễn bởi

$$-\frac{g_x}{g_y} = -\frac{f_x}{f_y} \text{ hoặc một cách tương đương } \frac{g_x}{g_y} = \frac{f_x}{f_y}.$$

Cho λ bằng tỷ số này,

$$\lambda = \frac{g_x}{g_y}, \lambda = \frac{f_x}{f_y}$$

ta có

$$f_x = \lambda f_y, g_x = \lambda g_y,$$

và

$$\nabla f = f_x \mathbf{i} + f_y \mathbf{j} = \lambda \left(g_x \mathbf{i} + g_y \mathbf{j} \right) = \lambda g.$$

Vì điểm trong câu hỏi phải nằm trên đường cong điều kiện,ta phải có $g\left(x, y\right) = c$. Nếu những phương trình này thỏa mãn tại điểm (a, b) thì f sẽ đạt tới cực đại có điều kiện tại (a, b) nếu đường mức cao nhất mà giao với đường điều kiện tại điểm này. Mặt khác, nếu đường mức *thấp nhất* mà giao với đường điều kiện tại (a, b), thì f nhận giá trị cực tiểu có điều kiện tại điểm đó.