Mục lục

BÀI TẬP CHƯƠNG 11

11.1 Hàm nhiều biến

Câu 1. Cho hàm hai biến $f(x, y) = x^2y + xy^2$. Tìm
a. $f(0, 0)$ b. $f(-1, 0)$ c. $f(0, -1)$ d. $f(1, 1)$
e. $f(2, 4)$ f. $f(t, t)$ g. $f(t, t^2)$ h. $f(1 - t, t)$

Câu 2. Cho hàm hai biến $f(x, y, z) = x^2ye^{2x} + (x + y - z)^2$. Tìm
a. $f(0, 0, 0)$ b. $f(1, -1, 1)$ c. $f(-1, 1, -1)$
d. $\dfrac{d}{dx}f(x, x, x)$ e. $\dfrac{d}{dy}f(1, y, 1)$ f. $\dfrac{d}{dz}f(1, 1, z^2)$

Câu 3. Hãy tìm tập xác định, tập giá trị của mỗi hàm số cho sau đây.
a. $f(x, y) = \sqrt{x - y}$ b. $f(x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{x - y}}$
c. $f(u, v) = \sqrt{uv}$ d. $f(x, y) = \sqrt{\dfrac{x}{y}}$
e. $f(x, y) = \ln y - x$ f. $f(u, v) = \sqrt{u \sin v}$
g. $f(x, y) = \sqrt{(x + 3)^2 + (y - 1)^2}$ h. $f(x, y) = e^{(x+1)/(y-2)}$
i. $f(x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - y^2}}$ k. $f(x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}}$

Câu 4. Vẽ một số đường mức $f(x, y) = C$, $C \geq 0$, với mỗi hàm hai biến cho sau đây, sau đó hãy vẽ phác họa đồ thị của chúng.
a. $f(x, y) = 2x - 3y$ b. $f(x, y) = x^2 + y^2$ c. $f(x, y) = x^2$
d. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ e. $f(x, y) = 2 - x^2 - y^2$ f. $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

Câu 5. Vẽ giao tuyến của mỗi mặt bậc hai sau đây với các mặt phẳng tọa độ, sau đó hãy vẽ phác họa mặt bậc hai sau đây:
a. $9x^2 + 4y^2 + z^2 = 1$ b. $\dfrac{x^2}{4} + y^2 + \dfrac{z^2}{9} = 1$
c. $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} - z^2 = 0$ d. $z = x^2 + \dfrac{y^2}{4}$

Câu 6. Nếu $E(x, y)$ là hiệu điện thế tại mỗi điểm (x, y) trong mặt phẳng thì đường mức của E được gọi là *đường đẳng thế*. Giả sử

$$E(x, y) = \frac{7}{\sqrt{3 + x^2 + 2y^2}}.$$

Hãy vẽ mô tả các đường đẳng thế ứng với $E = 1, E = 2$ và $E = 3$.

Câu 7. Giả sử rằng khi x máy và y giờ làm được sử dụng mỗi ngày thì một nhà máy sẽ sản xuất được $Q(x, y) = 10xy$ chiếc điện thoại di động. Hãy mô tả mối quan hệ giữa những "đầu vào" x và y để tạo ra "đầu ra" là 1,000 chiếc điện thoại mỗi ngày.

11.2 Giới hạn và liên tục

Câu 8. Hãy tính các giới hạn nếu chúng tồn tại. Trong trường hợp không tồn tại giới hạn, hãy giải thích lý do:

a. $\lim\limits_{(x,y)\to(-1,0)} (xy^2 + x^3y + 5)$ b. $\lim\limits_{(x,y)\to(1,3)} \dfrac{x+y}{x-y}$ c. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x+y}{x-y}$

d. $\lim\limits_{(x,y)\to(-1,0)} \dfrac{(x^2-1)(y^2-4)}{(x-1)(y-2)}$ e. $\lim\limits_{(x,y)\to(1,3)} \dfrac{e^x \tan^{-1} y}{y}$ f. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x-y}{\sqrt{x+y}}$

g. $\lim\limits_{(x,y)\to(1,3)} \left[1 - \dfrac{\cos(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\right]$ h. $\lim\limits_{(x,y)\to(-1,0)} (1 + x^2 + y^2)^{\frac{1}{x^2+y^2}}$ i. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^3}{x^2+y^6}$

Câu 9. Hãy chỉ ra giới hạn $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ không tồn tại đối với các hàm cho sau đây:

a. $f(x, y) = \dfrac{x^2y^2}{x^4+y^4}$ b. $f(x, y) = \dfrac{x^4y^4}{(x^2+y^4)^3}$

c. $f(x, y) = \dfrac{x-y^2}{x^2+y^2}$ d. $f(x, y) = \dfrac{x^2+y}{x^2+y^2}$

Câu 10. Kiểm tra tính liên tục của các hàm

a. $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2+y^6} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ b. $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2+2y^2}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

c. $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{3x^3-3y^3}{x^2-y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ A & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ d. $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{2x^2-x^2y^2+2y^2}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ B & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

e. $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ f. $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

11.3 Đạo hàm riêng

Câu 11. Tính các đạo hàm riêng cấp một và cấp hai của các hàm số sau:

a.$f(x,y) = x^3 + x^2y + xy^2 + y^3$ b. $f(x,y) = (x + xy + y)^3$

c.$f(x,y) = \dfrac{x}{y}$ d. $f(x,y) = xe^{xy}$

e.$f(x,y) = \ln(2x + 3y)$ f. $f(x,y) = \sin(x^2y)$

g.$f(x,y,z) = xy^2 + yz^3 + xyz$ h. $f(x,y) = xye^z$

i.$f(x,y) = \ln(x + y^2 + z^3)$ f. $f(x,y) = \sin(xy + z)$

Câu 12. Tính các đạo hàm riêng $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$ của hàm ẩn xác định bởi

a.$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{2} = 1$ b. $f(x,y) = 3x^2 + 4y^2 + 2z^2 = 5$

c.$f(x,y) = \sqrt{x} + y^2 + \sin xz = 2$ d. $f(x,y) = \ln(xy + yz + xz) = 5$

Câu 13. Tính hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị của hàm theo hướng song song với các mặt phẳng xz và yz (tốc độ thay đổi của hàm theo hướng Ox, Oy) của các hàm số đã cho tại điểm P_0:

a. $f(x,y) = xy^3 + x^3y; P_0 = (1,-1,-2)$ b. $f(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{xy}; P_0 = (1,-1,-2)$

c. $f(x,y) = x^2\sin(x+y); P_0 = (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, 0)$ d. $f(x,y) = x\ln(x+y^2); P_0 = (e, 0, e)$

Câu 14. Lưu lượng (cm^3/s) máu từ động mạch chảy vào mao mạch có thể được mô hình bởi công thức

$$F(x,y,z) = \frac{c\pi x^2}{4}\sqrt{y-z},$$

trong đó hằng số $c > 0$, x là đường kính của mao mạch, y là áp suất của động mạch và z là áp suất của mao mạch. Hãy tính tốc độ thay đổi của lưu lượng máu tương ứng với:

a. đường kính của mao mạch.

b. áp suất động mạch.

c. áp suất của mao mạch.

Câu 15. Sản lượng của một nhà máy được cho bởi hàm sản xuất $Q = K^{2/3}L^{2/5}$, trong đó K là vốn đầu tư (1,000 \$) và L đại lượng đo lực lượng lao động (giờ làm).

a. Hãy xác định $\dfrac{\partial Q}{\partial K}$ (gọi là *hiệu suất biên của vốn*), và $\dfrac{\partial Q}{\partial L}$ (gọi là *hiệu suất biên của nhân công*).

b. Hãy xác định dấu của đạo hàm riêng cấp hai $\dfrac{\partial^2 Q}{\partial L^2}$ và $\dfrac{\partial^2 Q}{\partial K^2}$, và hãy giải thích theo nghĩa kinh tế.

11.4 Mặt phẳng tiếp xúc, xấp xỉ và sự khả vi

Câu 16. Viết phương trình mặt phẳng tiếp xúc với mặt cong tại điểm P_0 cho trước:

a. $z = \sqrt{x^2 + y^2}; P_0 = (3, 1, \sqrt{10})$

b. $z = 10 - x^2 - y^2; P_0 = (2, 2, 2)$

c. $f(x, y) = x^2 + y^2 + \sin(xy); P_0 = (0, 2, 4)$

d. $f(x, y) = e^x \sin y; P_0 = (0, \frac{\pi}{2}, 1)$

e. $f(x, y) = \tan^{-1} \dfrac{y}{x}; P_0 = (2, 2, \frac{\pi}{4})$

f. $z = \ln |x + y^2|; P_0 = (-3, -2, 0)$

Câu 17. Hãy chứng tỏ rằng các hàm sau đây khả vi với mọi (x, y) và tìm vi phân toàn phần của chúng:

a. $f(x, y) = xy^3 + 3xy^2$

b. $f(x, y) = \dfrac{x}{y}$

c. $f(x, y) = e^{2x+y^2}$

d. $f(x, y) = \sin(xy)$

e. $f(x, y) = \cos(2x - 3y^2)$

Câu 18. Sử dụng công thức xấp xỉ số gia để xấp xỉ các hàm tại điểm được chỉ ra:

a. $f(1.01, 2.03)$, với $f(x, y) = 3x^4 + 2y^4$

b. $f(0.98, 1.03)$, với $f(x, y) = x^5 - 2y^3$

c. $f(\frac{\pi}{2} + 0.01, \frac{\pi}{2} - 0.01)$ với $f(x, y) = \sin(x + y)$

d. $f(\sqrt{\frac{\pi}{2}} + 0.01, \sqrt{\frac{\pi}{2}} - 0.01)$ với $f(x, y) = \sin(xy)$

e. $f(1.01, 0.98)$, với $f(x, y) = e^{xy}$

f. $f(1.01, 0.98)$, với $f(x, y) = e^{x^2 y^2}$

Câu 19. Khi hai điện trở có trở kháng lần lượt là P và Q Ohm được mắc song song thì trở kháng kết hợp R được xác định theo công thức

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{P} + \frac{1}{Q}.$$

Nếu P và Q đo được tương ứng là 6 và 10 Ohm với sai số không vượt quá 1% thì sai số phần trăm cực đại khi tính R là bao nhiêu?

Câu 20. Một chiếc hộp kín có chiều dài 2 ft, rộng 4 ft và cao 3 ft với sai số do đo đạc mỗi chiều là ± 0.02 ft. Mặt trên của chiếu hộp được làm từ vật liệu có giá 2\$/ft^2, trong khi đó các mặt bên và đáy hộp được làm từ vật liệu có giá là 1.50\$/ft^2. Hãy sử dụng số gia để xấp xỉ sai số cực đại trong tính toán giá của chiếc hộp.

Câu 21. Sản lượng của một nhà máy cho bởi $Q = 150K^{2/3}L^{1/3}$, trong đó K là K là vốn đầu tư (1,000\$) và L đại lượng đo lực lượng lao động (giờ làm). Vốn đầu tư hiện tại là 500,000\$ và 1,500 giờ lao động được sử dụng.

a. Hãy ước lượng sự thay đổi sản lượng nếu vốn đầu tư tăng thêm 700\$ và lao động tăng 6 giờ.

b. Cũng câu hỏi trên nhưng nếu vốn đầu tư tăng thêm 500\$ và lao động giảm 4 giờ.

11.5 Quy tắc dây chuyền

Câu 22. Tính đạo hàm df/dt biết:

a. $f(x, y) = 2xy + y^2$, với $x = -3t^2$ và $y = 1 + t^3$

b. $f(x, y) = (4 + y^2)x$, với $x = e^{2t}$ và $y = e^{3t}$

c. $f(x, y) = (1 + x^2 + y^2)^{1/2}$, với $x = \cos 5t$ và $y = \sin 5t$

d. $f(x, y, z) = \ln(x + 2y - z^2)$, với $x = 2t + 1$, $y = 1/t$ và $z = \sqrt{t}$

e. $f(x, y, z) = \sin xyz$, với $x = 1 - 3t$, $y = e^{1-t}$ và $z = 4t$

f. $f(x, y, z) = e^{x^3+yz}$, với $x = 2/t$, $y = \ln(2t - 3)$ và $z = t^2$

Câu 23. Cho hàm $F(x, y)$ phụ thuộc vào x và y, trong đó $x = x(u, v)$ và $y = y(u, v)$ là các hàm của u và v. Đặt $z = F[x(u, v), y(u, v)]$ và tìm các đạo hàm riêng $\partial z/\partial u$ và $\partial z/\partial v$ theo hai cách: biểu diễn tường minh z theo u và v rồi tính hoặc sử dụng công thức dây chuyền.

a. $F(x, y) = x + y^2$, với $x = u + v$ và $y = u - v$

b. $F(x, y) = x^2 + y^2$, với $x = u \sin v$ và $y = u - 2v$

c. $F(x, y) = e^{xy}$, với $x = u - v$ và $y = e^{uv}$

d. $F(x, y) = \ln xy$, với $x = e^{uv^2}$ và $y = e^{uv}$

Câu 24. Giả sử phương trình cho sau đây xác định một hàm khả vi y của x, hãy tính dy/dx bằng cách sử dụng quy tắc dây chuyền.

a. $x^y + \sqrt{xy} = 4$ b. $(x^2 - y)^{3/2} + x^2 y = 2$

c. $x^2 y + \ln(2x + y) = 5$ d. $x \cos y + y \tan^{-1} x = x$

e. $xe^{xy} + ye^{-xy} = 3$ f. $\tan^{-1}(\frac{x}{y}) = \tan^{-1}(\frac{y}{x})$

Câu 25. Các chiều của một cái hộp hình hộp chữ nhật (dài, rộng và cao) là các hàm tuyến tính theo thời gian, $d(t)$, $r(t)$ và $c(t)$. Nếu chiều dài và chiều rộng của chiếc hộp tăng 2 cm/giây và chiều cao giảm 3 cm/giây, hãy tìm tốc độ thay đổi của thể tích V và diện tích xung quanh S của chiếc hộp theo thời gian. Nếu $d(0) = 10$, $r(0) = 8$ và $h(0) = 20$ thì V sẽ tăng hay giảm khi $t = 5$ giây? S sẽ như thế nào khi $t = 5$?

Câu 26. Sự tập trung của một loại thuốc trong máu của một bệnh nhân sau khi thuốc được tiêm vào cơ của cơ thể t giờ được mô hình hóa bởi hàm Heinz

$$C = \frac{1}{b-a}\left(e^{-at} - e^{-bt}\right), a > 0, b > 0,$$

trong đó a và b là các tham số phụ thuộc vào sự chuyển hóa của bệnh nhân và loại thuốc được sử dụng.

a. Hãy tính các tốc độ $\dfrac{\partial C}{\partial a}, \dfrac{\partial C}{\partial b}$ và $\dfrac{\partial C}{\partial t}$.

b. Hãy khảo sát trường hợp $a = (\ln b)/t$, b là hằng số với $t > (\ln b)/b$. Đặc biệt nói riêng, $\dfrac{\partial C}{\partial t}$ là gì?

Câu 27. Tại một nhà máy, lượng không khí ô nhiễm sản sinh ra mỗi ngày được mô hình hóa bởi hàm $Q(E, T) = 127E^{2/3}T^{1/2}$, trong đó E là số công nhân và T (^{o}C) là nhiệt độ trung bình trong suốt ngày làm việc. Hiện tại, nhà máy có 142 công nhân và nhiệt độ trung bình là 18 ^{o}C. Nếu nhiệt độ trung bình hằng ngày giảm theo tốc độ 0.23^o/ngày và số công nhân giảm với tốc độ 3/tháng thì điều đó tác động như thế nào đến tốc độ ô nhiễm? Hãy biểu diễn câu trả lời theo đơn vị/ngày (đơn vị ô nhiễm). Giả thiết rằng theo mô hình này mỗi tháng có 24 ngày làm việc.

11.6 Đạo hàm theo hướng và Gradient

Câu 28. Tìm gradient của các hàm cho sau đây.

a. $f(x, y) = x^2 - 2xy$	b. $f(x, y) = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}$
c. $f(x, y) = xe^{3-y}$	d. $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$
e. $f(x, y) = \sin(x + 2y)$	f. $f(x, y, z) = xyz^2$
g. $f(x, y, z) = xe^{y+3z}$	h. $f(x, y, z) = \dfrac{xy - 1}{x + z}$

Câu 29. Tìm đạo hàm theo hướng của các hàm sau đây tại điểm đã cho P_0 và hướng **v** tương ứng.

Hàm	**Điểm P_0**	**Véc tơ v**
a. $f(x, y) = x^2 + xy$	$(1, -2)$	$\mathbf{i} + \mathbf{j}$
b. $f(x, y)\dfrac{e^{-x}}{y}$	$(2, -1)$	$-\mathbf{i} + \mathbf{j}$
c. $f(x, y) = \ln(x^2 + 3y)$	$(1, 1)$	$\mathbf{i} + \mathbf{j}$
d. $f(x, y) = \ln(3x + y^2)$	$(0, 1)$	$\mathbf{i} - \mathbf{j}$
c. $f(x, y) = \sec(xy - y^2)$	$(2, 0)$	$-\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$
c. $f(x, y) = \sin xy$	$(\sqrt{\pi}, \sqrt{\pi})$	$3\pi\mathbf{i} - \pi\mathbf{j}$

Câu 30. Tìm véc tơ đơn vị trực giao với mỗi mặt cong được cho sau đây tại điểm đã được chỉ ra. Tìm mặt phẳng tiếp xúc với mỗi mặt cong sau đây.

a. $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ tại $(1, -1, 1)$
b. $x^4 + y^4 + z^4 = 3$ tại $(1, -1, -1)$
c. $\cos z = \sin(x + y)$ tại $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
d. $\sin(x + y) + \tan(y + z) = 1$ tại $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4})$
e. $\ln(\dfrac{x}{y-z}) = 0$ tại $(2, 5, 3)$
f. $\ln(\dfrac{x-y}{y+z}) = x - z$ tại $(1, 0, 1)$

Câu 31. Tìm hướng tại điểm P_0 mà hàm f đã cho tăng nhanh nhất và tìm độ lớn của tốc độ tăng lớn nhất đó.
a.$f(x, y) = 3x + 2y - 1$; $P_0(1, -1)$
b.$f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$; $P_0(1, 2)$
c.$f(x, y) = x^3 + y^3$; $P_0(3, -3)$
d.$f(x, y) = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$; $P_0(1, 2)$
e.$f(x, y) = \sin xy$; $P_0(\frac{\sqrt{\pi}}{3}, \frac{\sqrt{\pi}}{2})$

Câu 32. Giả sử một cái hộp trong không gian xác định bởi $0 \le x \le 2, 0 \le y \le 2, 0 \le z \le 2$ được điều khiển nhiệt độ sao cho nhiệt độ tại điểm $P(x, y, z)$ trong chiếc hộp được mô hình bởi $T(x, y, z) = xy + yz + xz$. Một tên lửa tìm nhiệt đang ở tại vị trí $P(1, 1, 1)$. Theo hướng nào tên lửa sẽ di chuyển về phía nhiệt độ tăng nhanh nhất có thể? Tốc độ thay đổi của nhiệt độ lớn nhất là bao nhiêu?

Câu 33. Một người trượt tuyết đang tăng tốc để trượt xuống một ngọn núi. Nếu bề mặt của ngọn núi được mô hình bởi $z = 1 - 3x^2 - \frac{5}{2}y^2$ (trong đó x, y và z được đo bằng kilômet) và người trượt bắt đầu tại điểm $P_0(1/4, -1/2, 3/16)$, theo hướng nào người trượt có thể xuống núi nhanh nhất.

11.7 Cực trị của hàm hai biến

Câu 34. Tìm và phân loại các điểm tới hạn của các hàm số sau đây.
a. $f(x, y) = 3x^2 + 12x + 8y^3 - 12y^2 + 7$
b. $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$
c. $f(x, y) = 2x^2 - 4xy + y^3$
b. $f(x, y) = -x^3 + 9x - 4y^2$
e. $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$
f. $f(x, y) = (x^2 + 2y^2)e^{1-x^2-y^2}$
g. $f(x, y) = e^{xy}$
h. $f(x, y) = (x - 4)\ln(xy)$
i. $f(x, y) = x^3 + y^3 + 3x^2 - 18y^2 + 81y + 5$
k. $f(x, y) = x^2 + y^2 + \dfrac{32}{xy}$
l. $f(x, y) = x^2 + y^3 + \dfrac{768}{x+y}$
m. $f(x, y) = 3xy^2 - 2x^y + 36xy$
n. $f(x, y) = \dfrac{9x}{x^2 + y^2 + 1}$
b. $f(x, y) = e^{-x}\sin y$

Câu 35. Tìm cực trị tuyệt đối của hàm f trên tập đóng và bị chặn S trong mặt phẳng được mô tả trong các bài tập sau đây.

a. $f(x,y) = x^2 + xy + y^2$; S là đĩa đơn vị $x^2 + y^2 \leq 1$

b. $f(x,y) = 2x^2 - y^2$; S là đĩa đơn vị $x^2 + y^2 \leq 1$

c. $f(x,y) = xy - 2x - 5y$; S là miền tam giác với các đỉnh là $(0,0), (7,0)$, và $(7,7)$

d. $f(x,y) = x^2+3y^2-4x+2y-3$; S là hình vuông với các đỉnh là $(0,0), (3,0), (3,-3)$ và $(0,-3)$

e. $f(x,y) = 2\sin x + 5\cos y$; S là hình chữ nhật với các đỉnh là $(0,0), (3,0), (3,-3)$ và $(0,-3)$

f. $f(x,y) = e^{x^2+xy+y^2}$; S là đĩa $x^2 + 2x + y^2 \leq 0$

Câu 36. Tìm đường hồi quy bình phương tối thiểu cho các điểm dữ liệu được cho sau đây.
a. $(-2,-2), (-1,-1), (0,1), (1,3), (3,5)$
b. $(0,1), (1,1.6), (2.2,3), (3.1,3.9), (4,5)$
c. $(3,5.72), (4,5.31), (6.2,5.12), (7.52,5.32), (8.03,5.67)$
d. $(-4,2), (-3,1), (0,0), (1,-3), (2,-1), (3,-2)$

Câu 37. Hãy giải các bài toán tối ưu sau đây:

a. Hãy tìm tất cả các điểm trên mặt cong $y^2 = 4 + xz$ mà gần gốc tọa độ nhất.

b. Hãy tìm tất cả các điểm trên mặt phẳng $x + 2y + 3z = 4$ trong góc một phần tám thứ nhất mà giá trị hàm $f(x,y,z) = x^2yz^3$ đạt lớn nhất.

c. Một cái hộp hình hộp chữ nhật không có nắp có thể tích cố định. Các chiều của nó phải như thế nào để làm chiếc hộp với ít nguyên vật liệu nhất.

d. Một đoạn dây thép có độ dài L được cách thành ba đoạn rồi uốn thành một hình tròn, một hình vuông và một tam giác đều. Đoạn dây nên được cắt như thế nào để tổng diện tích các hình này là nhỏ nhất.

e. Tìm ba số dương có tổng là 54 sao cho tích của chúng là lớn nhất có thể.

Câu 38. Cho R là một miền tam giác có các đỉnh là $(-1,-2), (-1,2)$ và $(3,2)$. Một cái đĩa có hình dạng như R được đốt nóng sao cho nhiệt độ tại (x,y) là

$$T(x,y) = 2x^2 - xy + y^2 - 2y + 1$$

(đơn vị là ^{o}C). Tại điểm nào trên R hoặc trên biên của nó thì T đạt cực đại? T sẽ đạt cực tiểu ở đâu?

Câu 39. Giả sử chúng ta cần làm một chiếc hộp hình hộp chữ nhật có nắp và có thể tích là 32 dm^3 từ ba loại vật liệu khác nhau. Vật liệu dùng để làm các mặt bên có giá 1\$, mặt đáy là 3\$ và nắp đậy là 5\$. Các chiều của chiếc hộp là bao nhiêu để giá làm chiếc hộp ít nhất có thể.

11.8 Nhân tử Lagrange

Câu 40. Hãy sử dụng phương pháp Lagrange để tìm cực trị có điều kiện trong các bài tập sau:

a. Tìm cực đại của hàm $f(x, y) = xy$ với điều kiện là $2x + 2y = 5$.

b. Tìm cực đại của hàm $f(x, y) = x^2 + y^2$ với điều kiện là $x + y = 24$.

c. Tìm cực đại của hàm $f(x, y) = 16 - x^2 - y^2$ với điều kiện là $x + 2y = 6$.

d. Tìm cực đại của hàm $f(x, y) = x^2 + y^2$ với điều kiện là $xy = 1$.

e. Tìm cực đại của hàm $f(x, y) = x^2 - 2y - y^2$ với điều kiện là $x^2 + y^2 = 1$.

f. Tìm cực đại của hàm $f(x, y) = \cos x + \cos y$ với điều kiện là $y = x + \pi/4$.

g. Tìm cực đại của hàm $f(x, y) = e^{xy}$ với điều kiện là $x^2 + y^2 = 3$.

h. Tìm cực đại của hàm $f(x, y) = \ln(xy^2)$ với điều kiện là $2x^2 + 3y^2 = 8$ với $x > 0, y > 0$.

i. Tìm cực đại của hàm $f(x, y, z) = xyz$ với điều kiện là $3x + 2y + z = 6$.

j. Tìm cực đại của hàm $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ với điều kiện là $x - 2y + 3z = 4$.

k. Tìm cực đại của hàm $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ với điều kiện là $4x^2 + 2y^2 + z^2 = 4$.

Câu 41. Một chiếc hộp không có nắp được làm từ 96 ft^2 một loại vật liệu. Các chiều của chiếc hộp là bao nhiêu để nó có thể tích lớn nhất.

Câu 42. Nhiệt độ T tại điểm (x, y, z) trong một miền không gian được cho bởi công thức $T(x, y, z) = 100 - xy - xz - yz$. Hãy tìm nhiệt độ thấp nhất trên mặt phẳng $x + y + z = 10$.

Câu 43. Một người nông dân muốn rào một cánh đồng cỏ sát bờ một con sông. Diện tích vùng đồng cỏ cần khoảng 3200 m^2 và không cần rào dọc theo bờ sông. Tìm các chiều của đồng cỏ sao cho hàng rào được dùng là ít nhất.

Câu 44. Có 320 m hàng rào được dùng để bao một mảnh vườn hình chữ nhật. Cách dùng hàng rào như thế nào để có thể bao được vùng có diện tích lớn nhất.

Câu 45. Nếu x nghìn đô la được dùng cho nhân công và y nghìn đô la được dùng cho trang thiết bị thì sản lượng của một nhà máy được mô hình bởi

$$Q(x, y) = 60x^{1/3}y^{2/3}$$

đơn vị. Giả sử hiện tại có 120,000 đô la.

a. Tiền nên được phân bổ giữa nhân công và trang thiết bị như thế nào để sản lượng đạt lớn nhất có thể.

b. Sử dụng nhân tử Lagrange λ để ước lượng sự thay đổi của sản lượng cực đại của nhà máy nếu tiền hiện có cho nhân công và trang thiết bị được tăng lên 1000$.