Tích phân bội ba được định nghĩa và phát triển về cơ bản tương tự như tích phân bội hai. Chúng ta tính các tích phân bội ba bằng tích phân lặp

Định nghĩa tích phân bội ba

Giả sử $f(x,y,z)$ xác định trên khối đặc đóng và bị chặn V chứa trong một "hình hộp" B trong không gian.

Chia V thành một số hữu hạn các hình hộp nhỏ bằng các mặt phẳng song song với các mặt phẳng tọa độ, như hình vẽ 12.32.

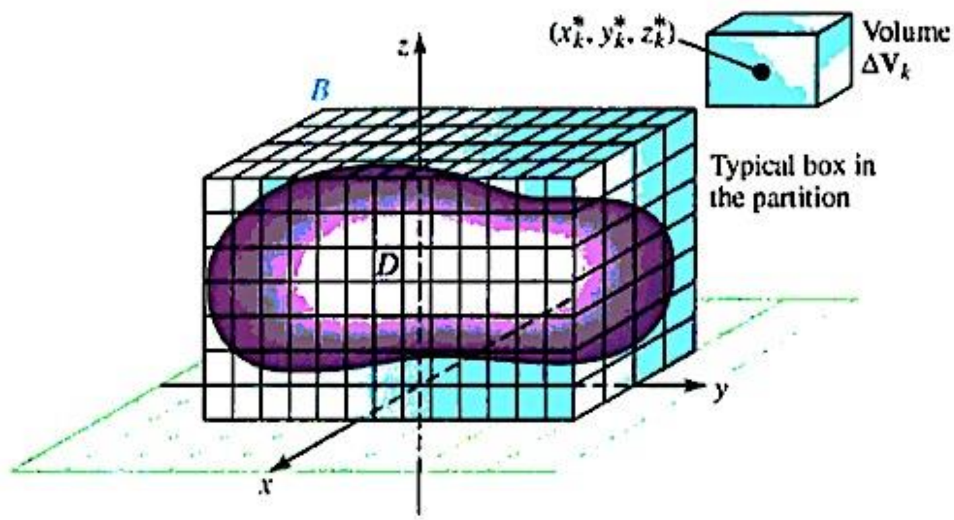


Figure 12.32 The box B contains D and is subdivided into smaller boxes

Chúng ta không xét đến các hình hộp chứa các điểm bên ngoài V. Gọi $\Delta V_1, \Delta V_2, ..., \Delta V_n$ và ký hiệu cho thể tích của các hình hộp còn lại, và định nghĩa chuẩn $\|P\|$ của việc chia V là đường kính dài nhất của hình hộp bất kỳ có trong sự phân chia đó. Tiếp theo, ta chọn một điểm tùy ý $\left(x_k^*, y_k^*, z_k^*\right)$ trong mỗi hình hộp ΔV_k

Và lập tổng Riemann $\sum_{k=1}^{n} f\left(x_k^*, y_k^*, z_k^*\right)\Delta V_k$

Nếu chúng ta lặp lại quá trình này với nhiều phép chia hơn, sao cho $\|P\|$ chuẩn tiến tới 0, chúng ta có thể dẫn đến định nghĩa sau

TÍCH PHÂN BỘI BA Nếu *f* là một hàm xác định trên miền đóng và bị chặn *V*, thì *tích phân bội ba của f trên V* được định nghĩa bởi giới hạn

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dV = \lim_{\|P\|\to 0}\sum_{k=1}^{n} f\left(x_k^*, y_k^*, z_k^*\right)\Delta V_k$$

nếu giới hạn này tồn tại.

Một mặt cong được gọi là **trơn từng mảnh** nếu nó được tạo thành bởi một số hữu hạn các mặt trơn.

Có thể chỉ ra rằng tích phân bội ba tồn tại nếu hàm $f(x,y,z)$ liên tục trên *V* và mặt biên của *V* là trơn từng mảnh.

Tích phân bội ba cũng có các tính chất sau, tương tự như các tính chất của tích phân bội hai đã liệt kê trong định lý 12.1. Trong mỗi tính chất, giả thiết rằng các tích phân đều tồn tại.

Quy luật tuyến tính

$$\iiint\limits_V \left[af(x,y,z)+bg(x,y,z)\right]dV = a\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dV + b\iiint\limits_V g(x,y,z)\,dV$$

với a, b là hằng số.

Quy luật lớn nhỏ

Nếu $f(x,y,z)\ge g(x,y,z)$ trên *V*,

thì $\iiint\limits_D f(x,y,z)\,dV \ge \iiint\limits_D g(x,y,z)\,dV$

Quy luật phân chia

Nếu miền lấy tích phân *D* chia thành hai miền D_1 và D_2 (xem hình 12.33) thì

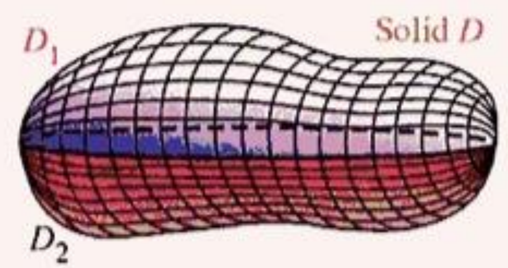


Figure 12.33 Dividing a solid *D* into two solid subregions

$$\iiint\limits_D f(x,y,z)\,dV = \iiint\limits_{D_1} f(x,y,z)\,dV + \iiint\limits_{D_2} f(x,y,z)\,dV$$

Tích phân lặp

Tương tự như tích phân bội hai, chúng ta tính tích phân bội ba bằng tích phân lặp. Tuy nhiên việc thiết lập các cận lấy tích phân trong tích phân bội ba lặp thường khó khăn, đặt biệt nếu miền lấy tích phân D là khó hình dung. Trường hợp tương đối đơn giản khi B là hình hộp chữ nhật đặc, ta có thể tính dựa vào định lý sau.

Định lý 12.5 Định lý Fubini dùng cho khối hộp chữ nhất trong không gian

Nếu hàm $f(x, y, z)$ liên tục trong hình hộp chữ nhật B: $a \le x \le b$, $c \le y \le d$, $r \le z \le s$, thì tích phân bội ba có thể tính bởi tích phân lặp sau

$$\iiint\limits_B f(x, y, z)\,dV = \int_r^s \int_c^d \int_a^b f(x, y, z)\,dxdydz$$

Tích phân lặp này có thể tính theo thứ tự bất kỳ, với sự điều chỉnh thích hợp với các cận lấy tích phân

$dx\,dy\,dz \quad dx\,dz\,dy \quad dz\,dx\,dy$

$dy\,dx\,dz \quad dy\,dz\,dx \quad dz\,dy\,dx$

Chứng minh: Chứng minh tương tự trong trường hợp hai chiều, có thể tìm thấy trong phần toán cao cấp.

Các nhận xét về định lý Fubini cho tích phân bội hai có thể dùng cho định lý Fubini đối với tích phân bội ba.

Chú ý:

Cũng giống trường hợp của tích phân bội hai trong phần trước, nếu hàm $f(x, y, z) = f_1(x).\ f_2(y).\ f_3(z)$ thì tích phân có thể được viết

$$\iiint\limits_B f(x, y, z)\,dV = \int_a^b f_1(x)dx \int_c^d f_2(y)dy \int_r^s f_3(z)dz\,.$$

Xem bài tập 55. Chúng ta sẽ không sử dụng cách làm tắt này trong ví dụ dưới đây, nhờ đó chúng ta chỉ ra các làm tổng quát hơn, nhưng để lại cho người đọc xác nhận rằng cách làm tắt này thích hợp trong trường hợp này.

Ví dụ 1 Tính tích phân bội ba sử dụng định lý Fubini

Tính $\iiint\limits_B z^2 y e^x\,dV$, trong đó B là hình hộp xác định bởi $0 \le x \le 1,\ 1 \le y \le 2,\ -1 \le z \le 1.$

Xem hình hộp B trong hình 12.34

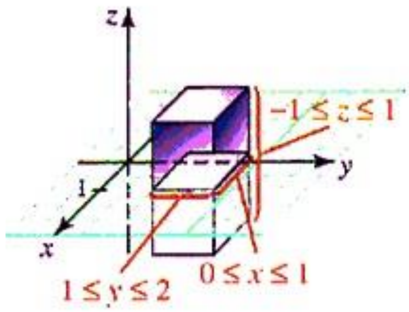


Figure 12.34 Region *B*

Giải Chúng ta sẽ tính tích phân này theo thứ tự $dx\,dy\,dz$

$$\iiint_B z^2 ye^x dV = \int_{-1}^{1}\int_{1}^{2}\int_{0}^{1} z^2 ye^x dxdydz$$

$$= \int_{-1}^{1}\int_{1}^{2} z^2 y\left(e^x\Big|_0^1\right)dydz$$

$$= (e-1)\int_{-1}^{1} z^2\left(\frac{y^2}{2}\Bigg|_1^2\right)dz$$

$$= \frac{3}{2}(e-1)\left(\frac{y^3}{3}\Bigg|_{-1}^{1}\right) = e-1$$

Làm lại ví dụ này và chỉ ra rằng ta thu được cùng một kết quả với cách sử dụng thứ tự lấy tích phân khác, thí dụ $dz\,dy\,dx$.

Tiếp theo chúng sẽ xem cách tính tích phân bội ba trên miền không phải là hình hộp chữ nhật. Chúng ta giả sử rằng miền lấy tích phân *D* là miền *z-đơn* có mặt dưới giới hạn bởi $z = u(x, y)$ và mặt trên giới hạn bởi $z = v(x, y)$, và hình chiếu A lên mặt phẳng 0*xy* là loại I hay loại II. Như vật thể trong hình 12.35.

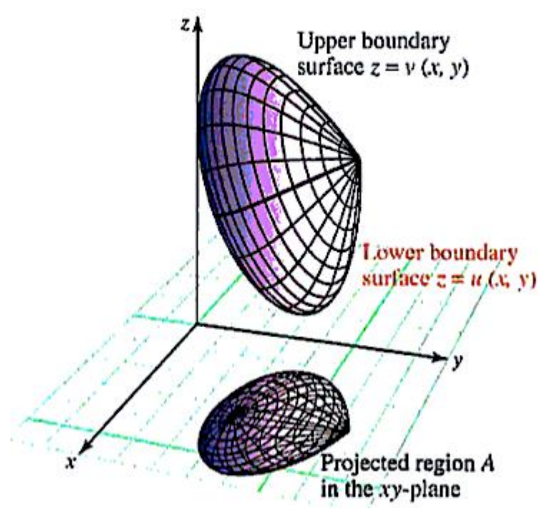


Figure 12.35 A *z*-simple solid *D*

Miền *D* là tập hợp tất cả các điểm (x, y, z) thỏa $u(x, y) \le z \le v(x, y)$ với mọi (x, y) thuộc *A*. Khi đó tích phân bội ba của hàm $f(x, y, z)$ trên miền *D* có thể biểu diễn như là tích phân lặp với các cận trong lấy tích phân (lấy theo z) là $u(x,y)$ và $v(x,y)$ Chúng ta tổng hợp lại trong định lý sau.

Định lý 12.6 Tích phân bội ba trên miền *z*-đơn

Giả sử D là miền giới hạn dưới bởi mặt $z = u(x,y)$ và giới hạn trên bởi $z = v(x,y)$ có hình chiếu A lên mặt phẳng $0xy$. Nếu A là loại I hay loại II, thì tích phân của hàm liên tục $f(x,y,z)$ trên miền D là

$$\iiint_D f(x,y,z)dV = \iint_A \left(\int_{u(x,y)}^{v(x,y)} f(x,y,z)dz \right) dA$$

Chứng minh: Mặc dù bằng chứng là ngoài phạm vi của phần này, chúng ta lưu ý rằng nếu A là miền đơn theo chiều dọc (loại I), thì với mỗi giá trị cố định x trên một khoảng $[a,b]$, y thay đổi từ $g_1(x)$ đến $g_2(x)$, và tích phân bội ba của $f(x,y,z)$ trên D có thể tính như sau

$$\iiint_D f(x,y,z)dV = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \int_{u(x,y)}^{v(x,y)} f(x,y,z)dzdydx$$

Tương tự, nếu A là miền đơn theo chiều ngang (loại II), thì với mỗi giá trị cố định y trên một khoảng $[c,d]$, x thay đổi từ $h_1(y)$ đến $h_2(y)$, và tích phân bội ba của $f(x,y,z)$ trên D có thể tính như sau

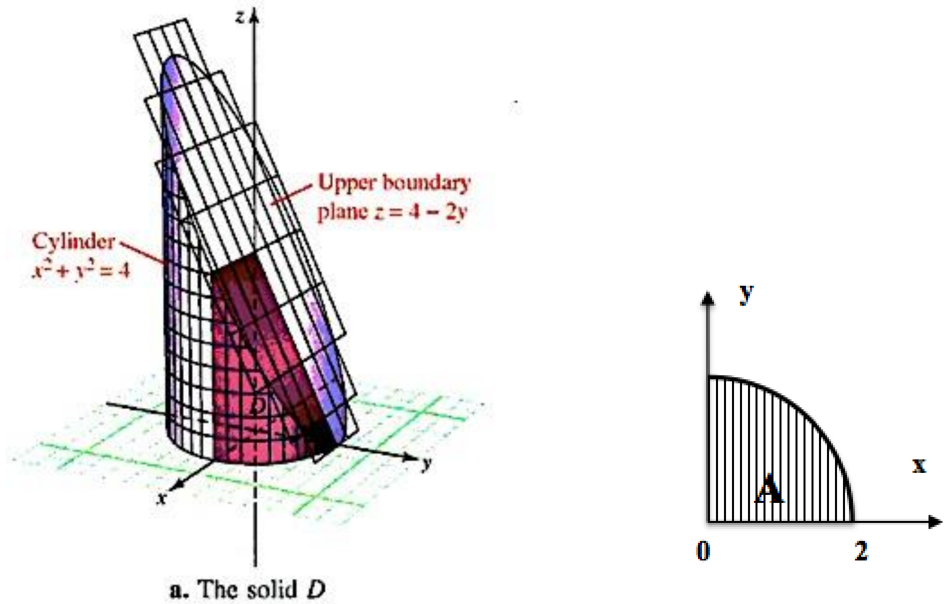
$$\iiint_D f(x,y,z)dV = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} \int_{u(x,y)}^{v(x,y)} f(x,y,z)dzdxdy$$

Chúng ta sẽ minh họa cho phương pháp này trong ví dụ sau.

Ví dụ 2 Tính tích phân bội ba trên một miền tổng quát

Tính $\iiint_D xdV$, trong đó D là khối trong góc phần tám thứ nhất giới hạn bởi mặt trụ $x^2 + y^2 = 4$ và mặt phẳng $2y + z = 4$.

Giải Hình khối được biểu diễn trong hình 12.36



Hình 12.36 Khối D và hình chiếu A lên mặt phẳng $0xy$

Mặt giới hạn trên của D là mặt phẳng $z = 4 - 2y$, và mặt giới hạn dưới là mặt phẳng $0xy$, $z = 0$. Hình chiếu A của hình khối D lên mặt phẳng $0xy$ là một phần tư hình tròn $x^2 + y^2 \le 4$ với $x \ge 0, y \ge 0$ (vì D nằm ở góc phần tám thứ nhất). Hình chiếu này có thể mô tả trong loại I dạng tập hợp các điểm (x, y) thỏa với mỗi giá trị cố định x giữa 0 và 2, y thay đổi từ 0 đến $\sqrt{4 - x^2}$.

Do vậy, chúng ta được

$$\iiint_D x\,dV = \iint_A \int_0^{4-2y} x\,dz\,dA$$

$$= \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \int_0^{4-2y} x\;dzdydx$$

$$= \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} x(4-2y)\,dydx$$

$$= \int_0^2 \left(4xy - xy^2\right)\Big|_0^{\sqrt{4-x^2}} dx$$

$$= \int_0^2 \left(4x\sqrt{4-x^2} - x\left(4-x^2\right)\right)dx$$

$$= \frac{20}{3}$$

Thể tích nhờ các tích phân bội ba

Cũng như tích phân bội hai có thể tính diện tích của miền lấy tích phân, tích phân bội ba có thể tính **thể tích** của khối. Đó là, nếu *V* là thể tích của khối *D*, thì

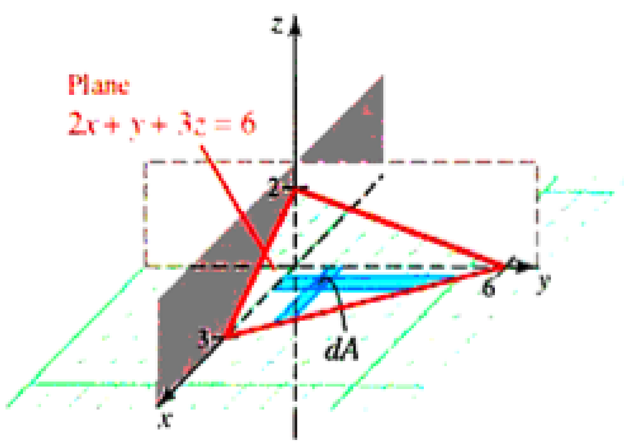
$$V = \iiint\limits_D dV$$

Ví dụ 3   Thể tích của một tứ diện

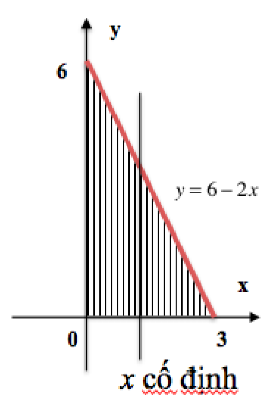
Tính thể tích của tứ diện *T* giới hạn bởi mặt phẳng $2x + y + 3z = 6$ và các mặt phẳng tọa độ $x = 0$, $y = 0$ và $z = 0$.

Giải   Tứ diện *T* được biểu diễn trong hình 12.37a

Mặt trên của *T* là mặt phẳng $z = \frac{1}{3}(6 - 2x - y)$, và mặt dưới là mặt phẳng $z = 0$. Lưu ý rằng hình chiếu của *T* lên mặt phẳng $0xy$ là một tam giác, *A*, như trong hình 12.37b. Hình chiếu này có thể mô tả trong loại I, tam giác *A* là tập hợp các điểm (x, y) thỏa với mỗi giá trị cố định *x* giữa 0 và 3, *y* thay đổi từ 0 đến $6 - 2x$.



a. Tetrahedron in the first octant



b. Hình chiếu lên mặt phẳng *xy*

Hình 12.37   Thể tích của một tứ diện

Thể tích của vật thể cần tìm

$$V = \iiint\limits_T dV$$

$$= \iint\limits_A \int_0^{\frac{1}{3}(6-2x-y)} dz\,dA$$

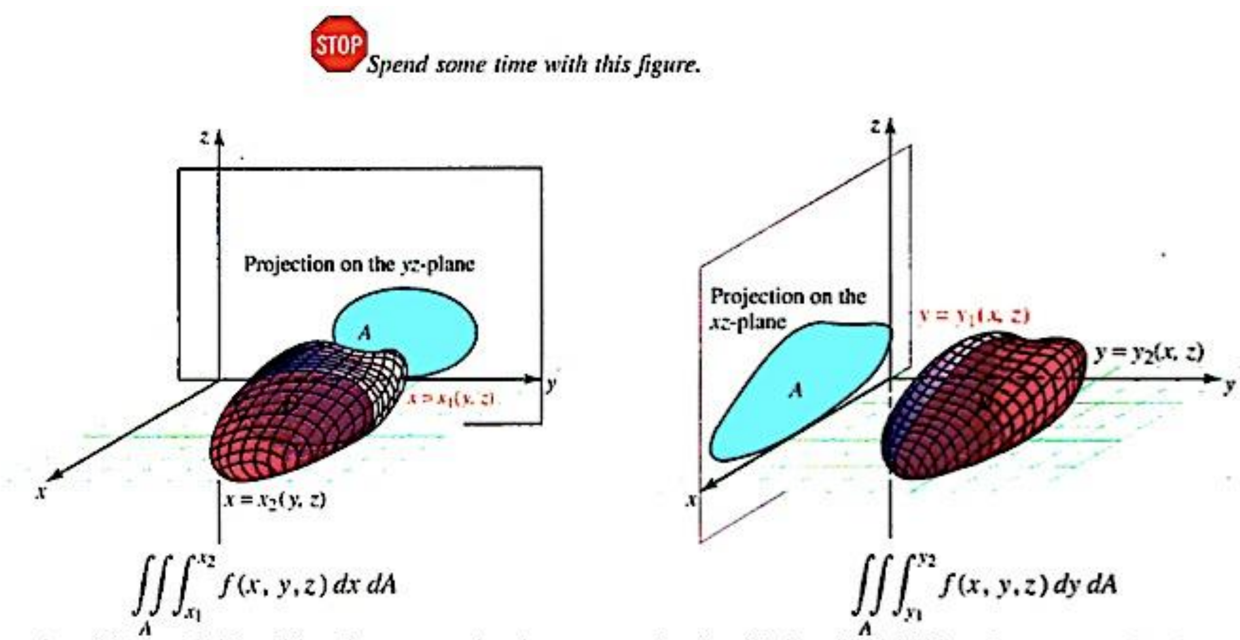
$$V=\int_0^3\int_0^{6-2x}\int_0^{\frac{1}{3}(6-2x-y)}dzdydx$$

$$=\int_0^3\int_0^{6-2x}\frac{1}{3}(6-2x-y)\,dydx$$

$$=\frac{1}{3}\int_0^3\left(6y-2xy-\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^{6-2x}dx=6$$

Đôi khi việc tính tích phân bội ba sẽ dễ hơn khi việc lấy tích phân đầu tiên theo biến x hoặc y thay vì z. Ví dụ, nếu miền lấy tích phân D được giới hạn bởi $x=x_1(y,z)$ và $x=x_2(y,z)$, và các bề mặt giới hạn có hình chiếu là miền A lên mặt phẳng 0yz, như trong hình 12.38a, thì

$$\iiint\limits_D f(x,y,z)dV=\iint\limits_A\int\limits_{x_1}^{x_2}f(x,y,z)dxdA$$



a. A solid D with "front" surface $x = x_2(y,z)$ and "back" surface $x = x_1(y,z)$

b. A solid D with "side" surfaces $y = y_2(x,z)$ and $y = y_1(x,z)$

Figure 12.38 Iterated integration with respect to x or y first

Mặt khác, nếu miền lấy tích phân D được giới hạn bởi $y=y_1(x,z)$ và $y=y_2(x,z)$ và các bề mặt giới hạn có hình chiếu là miền A lên mặt phẳng xz, như trong hình 12.38b, thì

$$\iiint\limits_D f(x,y,z)dV=\iint\limits_A\int\limits_{y_1}^{y_2}f(x,y,z)dydA$$

Để minh họa, chúng ta sẽ làm lại ví dụ 3 bằng cách chiếu tứ diện T lên mặt phẳng $0yz$.

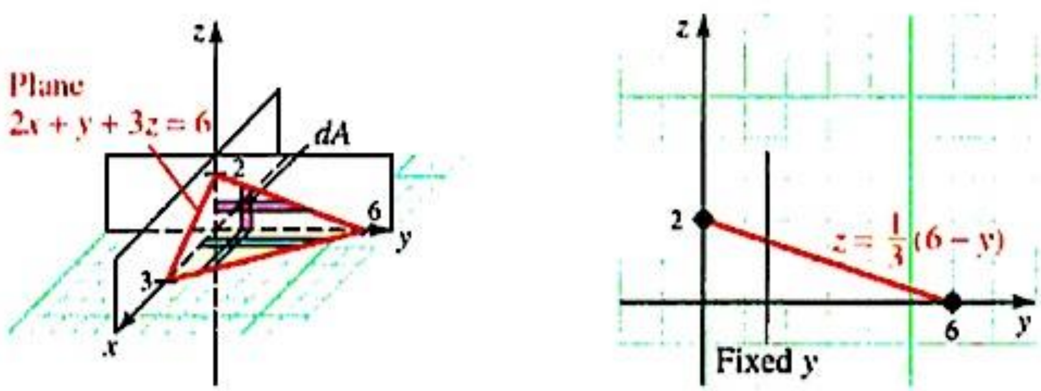
Ví dụ 4: Thể tích của một tứ diện bằng cách đổi thứ tự lấy tích phân

Tính thể tích của tứ diện T giới hạn bởi và các mặt phẳng tọa độ và mặt phẳng $2x+y+3z=6$ trong góc phần tám thứ nhất bằng cách chiếu lên mặt phẳng $0yz$.

Giải Lưu ý rằng T giới hạn bởi mặt phẳng $0yz$ và mặt phẳng $2x+y+3z=6$, được chúng ta biểu diễn là $x=\frac{1}{2}(6-y-3z)$ (xem hình 12.39a). Thể tích được xác định như sau

$$V=\iiint_T dV=\iint_B \int_0^{\frac{1}{2}(6-y-3z)} dxdA$$

trong đó B là hình chiếu lên mặt phẳng $0yz$. Hình chiếu này là tam giác giới hạn bởi các đường $z=0,\ y=0$ and $z=\frac{1}{3}(6-y)$, như trong hình 12.39b.



a. The tetrahedron bounded by the plane $2x + y + 3z = 6$ and the positive coordinate axes

b. The region projected onto the yz-plane is a triangle

Figure 12.39 Volume of a tetrahedron; alternative projection

Như vậy, với mỗi giá trị cố định y từ 0 đến 6, z thay đổi từ 0 đến $\frac{1}{3}(6-y)$, và ta có

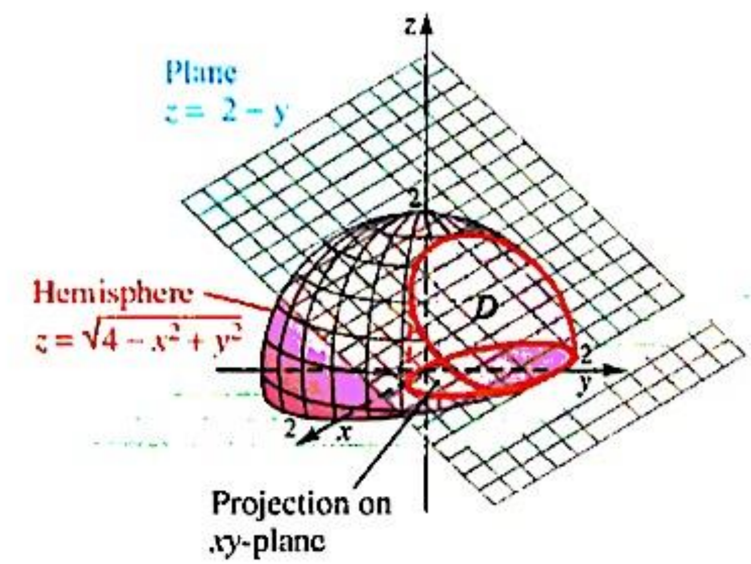
$$V=\int_0^6\int_0^{\frac{1}{3}(6-y)}\int_0^{\frac{1}{2}(6-y-3z)} dxdzdy=\int_0^6\int_0^{\frac{1}{3}(6-y)}(6-y-3z)\,dzdy$$

$$V = \int_0^6 \left(3z - \frac{1}{2} yz - \frac{3}{4} z^2 \right) \Bigg|_0^{\frac{1}{3}(6-y)} dy$$

$$= \int_0^6 \left(3(6-y) - \frac{1}{6} y(6-y) - \frac{1}{12}(6-y)^2 \right) \Bigg|_0^{\frac{1}{3}(6-y)} dy = 6$$

Ví dụ 5 Thiết lập một tích phân bội ba để tính thể tích

Thiết lập (không tính) một tích phân bội ba để tính thể tích của khối D giới hạn trên bởi mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ và dưới bởi mặt phẳng $y + z = 2$.



Hình chiếu lên mặt phẳng $0xy$ được biểu diễn như trong hình 12.40.

Hình 12.40

Giải Vì phần giới hạn bởi mặt cầu và mặt phẳng nằm phía trên mặt phẳng $0xy$, nghĩa là $z \geq 0$. Từ phương trình mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ ta có nửa mặt cầu phía trên có phương trình $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$.

Giao tuyến của nửa mặt cầu $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ và mặt phẳng $y+z=2$ là

$\sqrt{4-x^2-y^2}=2-y \Leftrightarrow x^2+2\left(y-1\right)^2=2$

Do vậy hình chiếu của khối D lên mặt phẳng $0xy$ $\left(z=0\right)$ là hình elip có phương trình $x^2+2(y-1)^2=2$ (như hình 12.41)

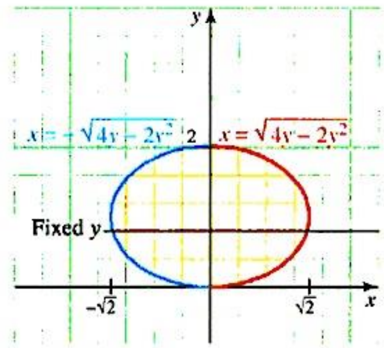


Figure 12.41 The projection of *D* onto the *xy*-plane

Từ phương trình $x^2+2(y-1)^2=2 \Rightarrow x=\pm\sqrt{2-2(y-1)^2}=\pm\sqrt{4y-2y^2}$

Do vậy miền D xác định bởi

$0\le y\le 2,\quad -\sqrt{4y-2y^2}\le x\le\sqrt{4y-2y^2},\quad 2-y\le z\le\sqrt{4-x^2-y^2}$

Do đó ta có công thức tính thể tích của khối D là

$V=\int_0^2\int_{-\sqrt{4y-2y^2}}^{\sqrt{4y-2y^2}}\int_{2-y}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} dzdxdy$ hoặc $V=2\int_0^2\int_0^{\sqrt{4y-2y^2}}\int_{2-y}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} dzdxdy$

Ví dụ 6 Chọn thứ tự lấy tích phân để tính thể tích

Tính thể tích của vật thể D giới hạn bên dưới bởi mặt paraboloid $z=x^2+y^2$ và giới hạn trên bởi mặt phẳng $2x+z=3$.

Giải Hình vẽ của vật thể D như trong hình 12.42a. Hình chiếu của vật thể lên mặt phẳng $0xy$ có biên là hình tròn (xem hình 12.42b) có phương trình

$x^2+y^2=3-2x \Leftrightarrow \left(x+1\right)^2+y^2=4$

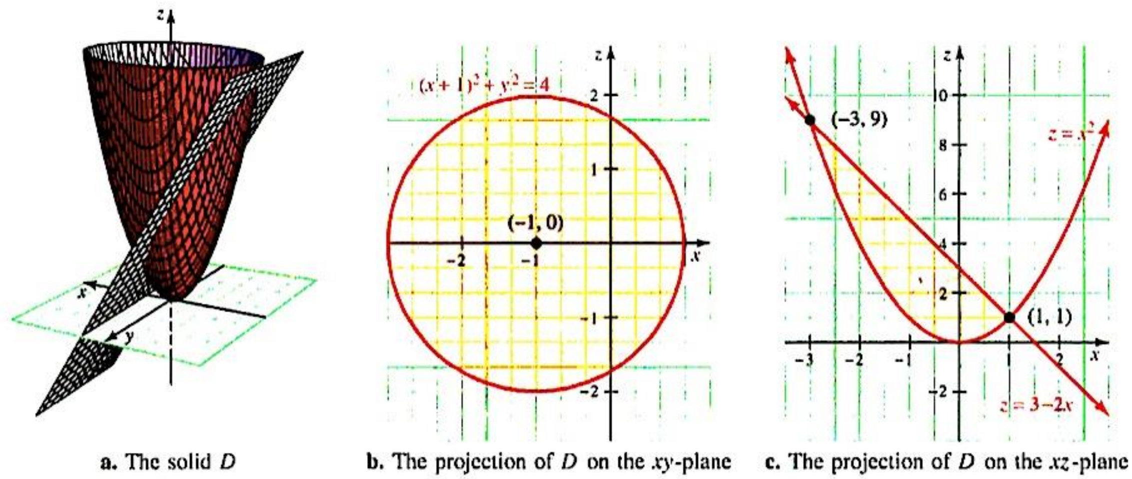


Figure 12.42 The solid D showing projections on two coordinate planes

Với hình chiếu lên mặt phẳng $0xy$ như vậy ta có công thức tính thể tích được thiết lập là

$$V=2\int_{-3}^{1}\int_{0}^{\sqrt{3-2x-x^2}}\int_{x^2+y^2}^{3-2x} dz\,dy\,dx$$

việc tính tích phân này không đơn giản.

Do vậy ta thử chiếu vật thể D lên mặt phẳng $0xz$ $(y=0)$ ta được miền giới hạn bởi đường parabol $z=x^2$ và đường thẳng $2x+z=3$ (xem hình 12.42c)

Ta có thể tích của vật thể D cần tìm là

$$V=2\int_{-3}^{1}\int_{x^2}^{3-2x}\int_{0}^{\sqrt{z-x^2}} dydzdx$$

$$=2\int_{-3}^{1}\int_{x^2}^{3-2x}\sqrt{z-x^2}\,dzdx$$

$$=2\int_{-3}^{1}\frac{2}{3}\left(z-x^2\right)^{3/2}\Big|_{x^2}^{3-2x} dx$$

$$=\frac{4}{3}\int_{-3}^{1}\left(3-2x-x^2\right)^{3/2}dx$$

$$=\frac{4}{3}\int_{-3}^{1}\left(4-(x+1)^2\right)^{3/2}dx$$

$$=\frac{4}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}8\cos^3\theta\left(2\cos\theta d\theta\right)$$

$$=8\pi$$

12.6 KHỐI LƯỢNG, CÁC MÔ MEN VÀ CÁC HÀM MẬT ĐỘ XÁC SUẤT

Trong mục này: *Khối lượng và khối tâm, mô men quán tính, các hàm mật độ xác suất.* Chúng ta xét các ứng dụng của tích phân bội hai và tích phân bội ba để giải quyết các vấn đề liên quan đến khối tâm của các bản mỏng đồng chất và không đồng chất. Chúng ta cũng xem xét các mô men quán tính và các hàm mật độ xác suất.

Khối lượng và khối tâm

Một bản mỏng (lamina) là một đĩa phẳng xác định một miền R trong mặt phẳng và rất mỏng có thể xem như hai chiều. Nếu m là khối lượng của bản mỏng và A là diện tích của miền R, thì $\rho = \dfrac{m}{A}$ là khối lượng riêng của bản mỏng. Bản mỏng là đồng chất nếu khối lượng riêng của nó $\rho(x, y)$ là hằng số trên miền R và không đồng chất nếu $\rho(x, y)$ thay đổi tại từng điểm. Chúng ta xem lại các bản mỏng đồng chất trong mục 6.5, và trong phần này chúng ta xét các bản mỏng không đồng chất.

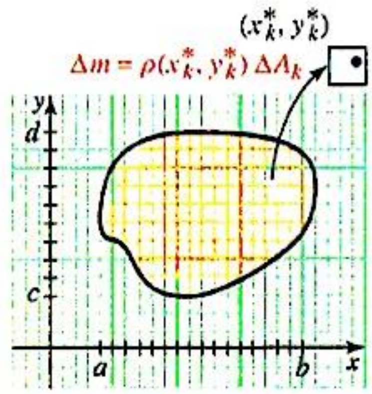


Figure 12.44 Partition of a lamina in the plane

Hình 12.4 chỉ ra một bản mỏng chiếm miền R được chia nhỏ thành hữu hạn các hình chữ nhật. Trong mỗi hình chữ nhật đó chọn một điểm tùy ý $\left(x_k^*, y_k^*\right)$, khi đó khối lượng của bản mỏng trong mảnh hình chữ nhật thứ k được tính gần đúng bởi

$$\Delta m_k \approx \rho\left(x_k^*, y_k^*\right)\Delta A_k$$

Chúng ta tính gần đúng tổng khối lượng m bởi tổng Riemann

$$m \approx \sum_{k=1}^{n} \rho\left(x_k^*, y_k^*\right)\Delta A_k$$

Do đó $m = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} \rho\left(x_k^*, y_k^*\right)\Delta A_k = \iint_R \rho(x, y)\,dA$

Chúng ta sử dụng các nhận định trên để làm cơ sở cho các định nghĩa sau.

KHỐI LƯỢNG CỦA BẢN PHẲNG CÓ KHỐI LƯỢNG RIÊNG THAY ĐỔI
Nếu ρ là hàm khối lượng riêng liên tục trên bản phẳng ứng với miền phẳng R, thì khối lượng m của bản phẳng được xác định bởi

$$m = \iint_R \rho(x, y)dA$$

Ví dụ 1 Khối lượng của bản phẳng

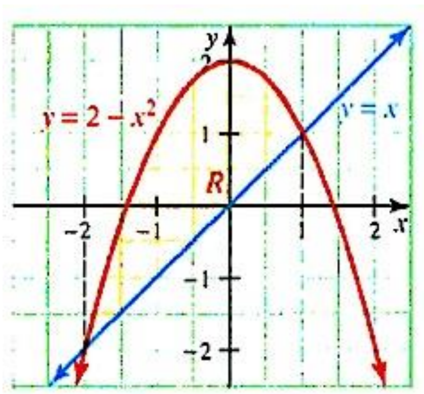


Figure 12.45 A lamina

Tìm khối lượng của bản mỏng có khối lượng riêng $\rho(x, y) = x^2$ tương ứng với miền R giới hạn bởi parabol $y = 2 - x^2$ và đường thẳng $y = x$.

Giải Bắt đầu bằng việc vẽ parabol và đường thẳng, tìm giao điểm của chúng như trong hình 12.45

Phương trình hoành độ giao điểm
$x = 2 - x^2 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1, -2$

Chúng ta thấy rằng miền R là tập hợp tất cả các điểm (x, y) thỏa $\begin{cases} -2 \le x \le 1 \\ x \le y \le 2 - x^2 \end{cases}$.

Do vậy, ta có

$$m = \iint_R x^2 dA$$
$$= \int_{-2}^{1} \int_{x}^{2-x^2} x^2 dy dx$$
$$= \int_{-2}^{1} x^2 \left(2 - x^2 - x\right) dx$$
$$= \frac{63}{20}$$

Mô men của một vật quanh một trục thể hiện tác động gây ra sự quay của vật quanh trục đó. Nó được định nghĩa là tích khối lượng của vật với khoảng cách từ giá của lực đến trục quay (cánh tay đòn) (xem hình 12.46)

Vì việc chia nhỏ miền R như trước (với khối lượng), ta thấy rằng các mô men M_x và M_y của bản mỏng quanh trục $0x$ và $0y$ được tính gần đúng bởi các tổng Riemann

$$M_x = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{y_k^*}_{\text{Khoảng cách đến trục } 0x} \rho\left(x_k^*, y_k^*\right) \Delta A_k \qquad M_y = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{x_k^*}_{\text{Khoảng cách đến trục } 0y} \rho\left(x_k^*, y_k^*\right) \Delta A_k$$

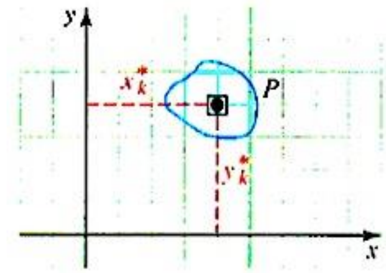


Figure 12.46 The distance from P to the x-axis is y_k^* and the distance to the y-axis is x_k^*

Bằng cách lấy giới hạn khi chuẩn của các phần chia nhỏ tiến đến 0, ta thu được

$$M_x = \iint_R y\rho(x,y)dA \quad \text{và} \quad M_y = \iint_R x\rho(x,y)dA$$

Khối tâm của bản mỏng ứng với miền R là điểm $\left(\bar{x}, \bar{y}\right)$ tại đó khối lượng có thể được tập trung lại mà không ảnh hưởng đến các mô men M_x và M_y, đó là $m\bar{x} = M_y$ và $m\bar{y} = M_x$

Khối tâm $\left(\bar{x}, \bar{y}\right)$ có thể được tưởng tượng là điểm mà tại đó bản mỏng được treo mà không chuyển động. Để tham khảo thêm, các nhận định trên có thể được tổng hợp trong bảng dưới đây

MÔ MEN CỦA KHỐI LƯỢNG

BẢN PHẲNG Nếu $\rho(x,y)$ là hàm khối lượng riêng liên tục trên bản phẳng ứng với miền phẳng R, thì **mô men khối lượng** của hàm khối lượng riêng quanh các trục $0x$ và $0y$, lần lượt là

$$M_x = \iint_R y\rho(x,y)dA \quad \text{và} \quad M_y = \iint_R x\rho(x,y)dA$$

KHỐI TÂM Hơn nữa, nếu m là khối lượng của bản mỏng, khối tâm là $\left(\bar{x}, \bar{y}\right)$, trong đó

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} \quad \text{và} \quad \bar{y} = \frac{M_x}{m}$$

TRỌNG TÂM Nếu trọng lượng riêng ρ là hằng số, điểm được gọi $\left(\bar{x}, \bar{y}\right)$là trọng tâm của miền.

Ví dụ 2 Tìm khối tâm

Xác định khối tâm của bản phẳng có khối lượng riêng là $\rho(x,y)=x^2$ ứng với miền R giới hạn bởi parabol $y=2-x^2$ và đường thẳng $y=x$. Bản phẳng này được xác định như trong ví dụ 1.

Giải Trong ví dụ 1, ta đã xác định được $\begin{cases}-2\le x\le 1\\ x\le y\le 2-x^2\end{cases}$ (xem hình 12.47).

Do vậy, ta có

$$M_x=\iint_R yx^2dA$$

$$=\int_{-2}^{1}\int_{x}^{2-x^2}yx^2dydx$$

$$=\int_{-2}^{1}\left(\frac{1}{2}x^2y^2\right)\Big|_x^{2-x^2}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-2}^{1}x^2\left(x^4-5x^2+4\right)dx=\frac{-9}{5}$$

$$M_y=\iint_R x.x^2dA$$

$$=\int_{-2}^{1}\int_{x}^{2-x^2}x^3dydx$$

$$=\int_{-2}^{1}\left(x^3y\right)\Big|_x^{2-x^2}dx$$

$$=\int_{-2}^{1}\left(2x^3-x^5-x^4\right)dx=\frac{-18}{5}$$

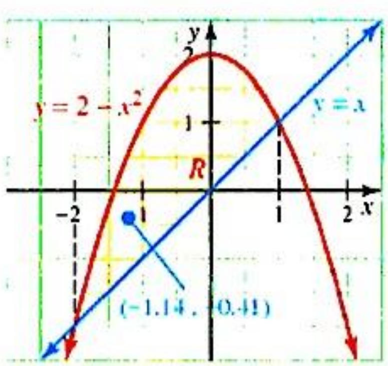


Figure 12.47 Center of mass for a given variable density lamina

Từ ví dụ 1, ta có $m=\frac{63}{20}$, do vậy khối tâm là $\left(\overline{x},\overline{y}\right)$, trong đó

$$\overline{x}=\frac{M_y}{m}=\frac{-\frac{18}{5}}{\frac{63}{20}}=-\frac{8}{7}$$

$$\overline{y}=\frac{M_x}{m}=\frac{-\frac{9}{7}}{\frac{63}{20}}=-\frac{20}{49}$$

Khối tâm trong ví dụ 2 là điểm màu xanh dương trong hình 12.47.

Hoàn toàn tương tự, chúng ta có thể sử dụng tích phân bội ba để tìm khối lượng và khối tâm của vật trong R^3 với khối lượng riêng là $\rho(x,y,z)$. Khối lượng m, các mô men Myz, Mxz, Mxy theo thứ tự quanh các mặt phẳng $0yz$, $0xz$, $0xy$ và các tọa độ $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{z}$ của khối tâm (xem hình 12.48) được xác định bởi

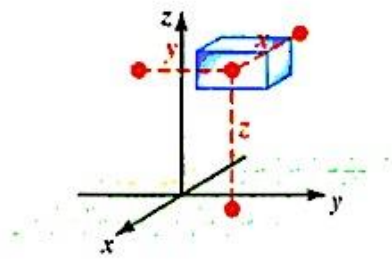


Figure 12.48 Note the distances to the coordinate axes

Khối lượng $m = \iiint\limits_R \rho(x,y,z)dV$

Các mô men $M_{yz} = \iiint\limits_R x\rho(x,y,z)dV$

Khoảng cách đến mặt phẳng $0yz$

$$M_{xz} = \iiint\limits_R y\rho(x,y,z)dV$$

Khoảng cách đến mặt phẳng $0xz$

$$M_{xy} = \iiint\limits_R z\rho(x,y,z)dV$$

Khoảng cách đến mặt phẳng $0xy$

Khối tâm $\left(\bar{x},\bar{y},\bar{z}\right) = \left(\dfrac{M_{yz}}{m},\dfrac{M_{xz}}{m},\dfrac{M_{xy}}{m}\right)$

Tương tự, nếu trọng lượng riêng là hằng số, khối tâm là **trọng tâm**.

Ví dụ 3 sẽ minh họa cách tìm khối tâm bằng tích phân bội.

Ví dụ 3 Trọng tâm của một tứ diện

Một khối tứ diện có các đỉnh $(0,0,0),(1,0,0),(0,1,0)$, và $(0,0,1)$, hằng số khối lượng riêng $\rho = 6$. Tìm trọng tâm của khối tứ diện.

Giải Tứ diện có thể được biểu diễn là miền trong góc phần tám thứ nhất, nằm dưới mặt phẳng $x+y+z=1$, như trong hình 12.49a.

Biên của hình chiếu của mặt trên của tứ diện trong mặt phẳng $0xy$ được tìm bằng cách giải hệ các phương trình $x+y+z=1$ và mặt $z=0$. Chúng ta tìm được hình chiếu của tứ diện là miền giới hạn bởi các trục tọa độ và đường thẳng $x+y=1$ (như trong hình 12.49b).

Nghĩa là với mỗi giá trị cố định x từ 0 đến 1, y thay đổi từ 0 đến $1-x$.

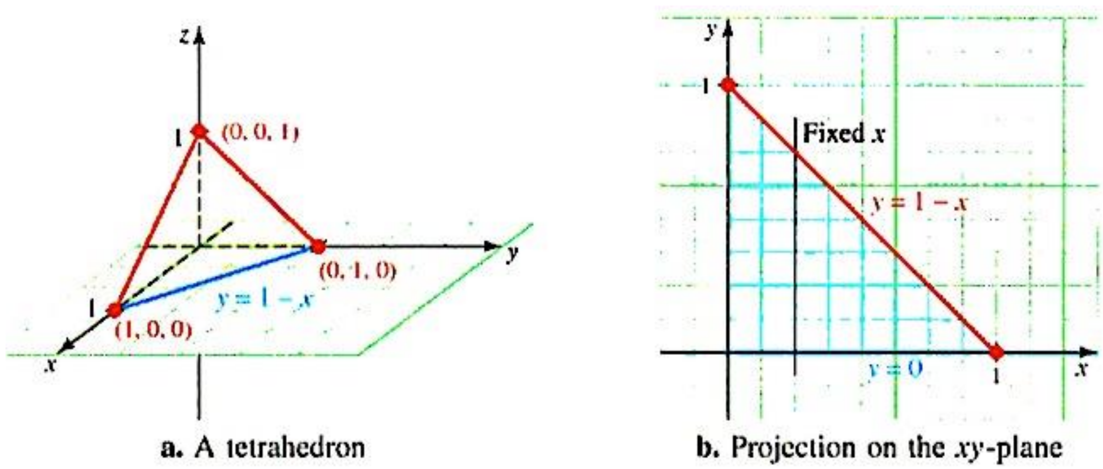


Figure 12.49 The centroid of a tetrahedron

Khối lượng của khối tứ diện là

$$m = \iiint_R \rho dV$$
$$= \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} 6dzdydx$$
$$= \int_0^1 \int_0^{1-x} 6(1-x-y)dydx$$
$$= 6\int_0^1 \left(y - xy - \frac{y^2}{2} \right)\Bigg|_0^{1-x} dx$$
$$= \int_0^1 3(x-1)^2\, dx = 1$$

$$M_{yz} = \iiint_R 6xdV = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} 6xdzdydx = \frac{1}{4}$$
$$M_{xz} = \iiint_R 6ydV = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} 6ydzdydx = \frac{1}{4}$$
$$M_{xy} = \iiint_R 6zdV = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} 6zdzdydx = \frac{1}{4}$$

Khi đó trọng tâm của khối tứ diện là

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{m} = \frac{\frac{1}{4}}{1} = \frac{1}{4}$$
$$\bar{y} = \frac{M_{xz}}{m} = \frac{\frac{1}{4}}{1} = \frac{1}{4}$$
$$\bar{z} = \frac{M_{xy}}{m} = \frac{\frac{1}{4}}{1} = \frac{1}{4}$$

Trọng tâm của khối tứ diện là $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$

Mô men quán tính

Nói chung, một bản mỏng có khối lượng riêng $\rho(x, y)$ ứng với miền R trong góc phần tư thứ nhất của mặt phẳng có mô men (thứ nhất) xác định bởi tích phân

$$M_L = \iint_R s\,dm$$

trong đó $dm = \rho(x, y)dA$ và $s = s(x, y)$ là khoảng cách từ điểm đặt $P(x, y)$ trong R đến L. Tương tự, mô men thứ hai, hay *mô men quán tính*, của R quanh L được định nghĩa là

$$I_L = \iint_R s^2\,dm$$

Trong vật lý, mô men quán tính đặc trưng cho mức quán tính của bản phẳng trong chuyển động quay quanh trục L. Các mô men quán tính quanh các trục tọa độ được xác định bởi các công thức dưới đây.

MÔ MEN QUÁN TÍNH Các **mô men quán tính** của bản phẳng có khối lượng riêng $\rho(x, y)$ ứng với miền phẳng R, quanh các trục $0x$, $0y$ và $0z$, lần lượt là

$$I_x = \iint_R y^2 \rho(x, y)\,dA$$

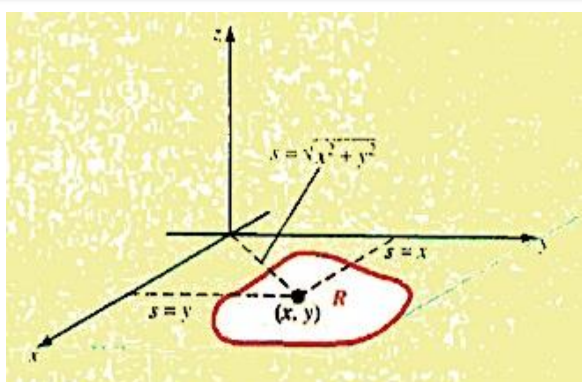
$$I_y = \iint_R x^2 \rho(x, y)\,dA$$

$$I_z = \iint_R \left(x^2 + y^2\right) \rho(x, y)\,dA$$

$$= I_x + I_y$$

Ví dụ 4 Tìm các mô men quán tính

Một bản phẳng ứng với miền R trong mặt phẳng được giới hạn bởi đường parabol $y = x^2$ và các đường thẳng $x = 2$ và $y = 1$. Khối lượng riêng của bản phẳng tại mỗi điểm (x, y) là $\rho(x, y) = x^2 y$. Tìm các mô men quán tính (làm tròn đến hàng phần trăm) của bản phẳng quanh các trục $0x$ và $0y$.



Hình 12.50

Giải Đồ thị của miền R như trong hình 12.50.
Chúng ta thấy rằng với mỗi giá trị cố định x từ 1 đến 2, y thay đổi từ 1 đến x^2.

$$I_x = \iint_D y^2 dm = \iint_R y^2 \rho(x,y) dA = \iint_R y^2 \left(x^2 y\right) dA$$

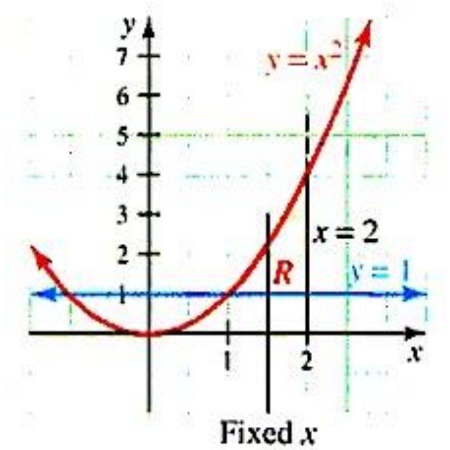


Figure 12.50 Moments of inertia of a lamina

$$I_x = \int_1^2 \int_1^{x^2} x^2 y^3 dy dx = \frac{1}{4}\int_1^2 x^2 \left(x^8 - 1\right) dx = \frac{1516}{33}$$

$$I_y = \iint_D x^2 dm = \iint_R x^2 \rho(x,y) dA = \iint_R x^2 \left(x^2 y\right) dA$$

$$= \int_1^2 \int_1^{x^2} x^4 y\, dy dx = \frac{1}{2}\int_1^2 x^4 \left(x^4 - 1\right) dx = \frac{1138}{45}$$

Một cách khái quát đơn giản cho phép chúng ta tính mô men quán tính của một vật thể quanh trục L tùy ý. Đặc trưng, giả sử vật ứng với miền R (xem hình 12.51) và khối lượng riêng tại mỗi điểm (x, y, z) trên R được cho bởi $\rho(x, y, z)$.

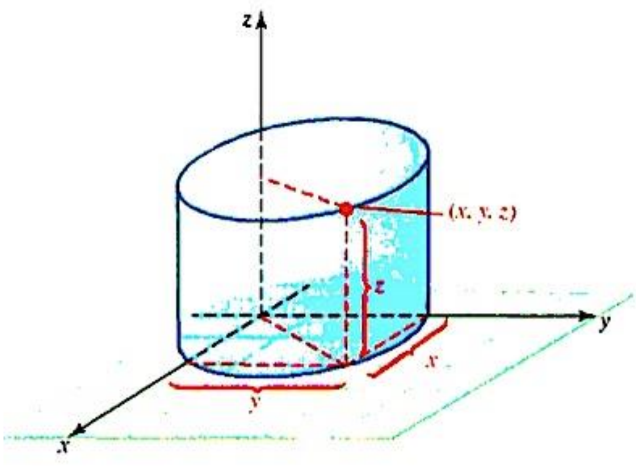


Figure 12.51 A typical solid R

Vì bình phương khoảng cách của một vật nhỏ điển hình trong R đến trục $0x$ là $y^2 + z^2$, mô men quán tính quanh trục $0x$ là

$$I_x = \iiint_R \underbrace{\left(y^2 + z^2\right)}_{\substack{\uparrow \\ \text{Square of distance to the } x-\text{axis}}} \underbrace{\rho(x,y,z) dV}_{\text{Increment of mass}}$$

Tương tự, các mô men quán tính của vật quanh trục $0y$ và $0z$ lần lượt là

$$I_y = \iiint_R \underbrace{\left(x^2+z^2\right)}_{\substack{\uparrow \\ \text{Square of distance to the } y-\text{axis}}} \underbrace{\rho\left(x,y,z\right)dV}_{\text{Increment of mass}} \qquad I_z = \iiint_R \underbrace{\left(x^2+y^2\right)}_{\substack{\uparrow \\ \text{Square of distance to the } z-\text{axis}}} \underbrace{\rho\left(x,y,z\right)dV}_{\text{Increment of mass}}$$

Ví dụ 5 Mô men quán tính của vật

Xác định mô men quán tính quanh trục $0z$ của khối tứ diện S với các đỉnh $\left(0,0,0\right),\left(0,1,0\right),\left(1,0,0\right),\left(0,0,1\right)$, và khối lượng riêng $\rho\left(x,y,z\right)=x$.

Giải Trong ví dụ 3, chúng ta nhận thấy rằng khối S có thể được biểu diễn là tập hợp các điểm (x, y, z) thỏa với mỗi giá trị cố định x từ 0 đến 1, y nằm giữa 0 và $1-x$ và $0 \le z \le 1-x-y$.

Do vậy

$$\begin{aligned} I_z &= \iiint_S \left(x^2+y^2\right)\rho(x,y,z)dV \\ &= \int_0^1\int_0^{1-x}\int_0^{1-x-y} x\left(x^2+y^2\right)dzdydx \\ &= \int_0^1\int_0^{1-x} x\left(x^2+y^2\right)\left(1-x-y\right)dydx = \frac{1}{90} \end{aligned}$$

Các mô men quán tính có một cách diễn giải hữu ích trong vật lý. Động năng của một vật có khối lượng m chuyển động với vận tốc v dọc theo một đường thẳng được định nghĩa trong vật lý là $K=\frac{1}{2}mv^2$. Giả sử một bản phẳng ứng với đĩa tròn R có tâm là gốc tọa độ (xem hình 12.52) quay quanh trục $0z$ với vận tốc góc là ω radians/giây.

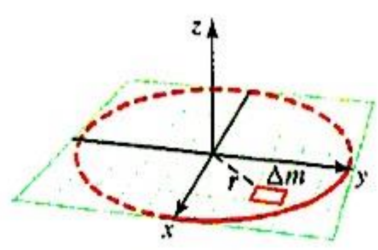


Figure 12.52 Kinetic energy of a rotating disk

Một vật nhỏ có khối lượng Δm nằm cách gốc tọa độ r đơn vị có vận tốc chuyển động tịnh tiến $v = r\omega$ và động năng tịnh tiến $K_{lin}=\frac{1}{2}\left(\Delta m\right)v^2$, và bằng cách lấy tích phân ta tìm được toàn bộ đĩa tròn R có động năng quay là

$$K_{rot}=\iint_R \frac{1}{2}\omega^2r^2dm = \frac{1}{2}\omega^2\iint_R r^2dm$$

Từ biểu thức $r^2 = x^2 + y^2$, ta thấy rằng tích phân trong công thức này chỉ là mô men quán tính của R quanh trục 0z, do vậy động năng quay có thể biểu diễn là

$$K_{rot} = \frac{1}{2} I_z \omega^2$$

So sánh công thức này với công thức động năng $K_{lin} = \frac{1}{2} m v^2$, ta thấy rằng mô men quán tính có thể xem tương tự chuyển động quay của khối lượng hay là quán tính quay.

Các hàm mật độ xác suất

Giả sử chúng ta xét số năm thực dùng của một chiếc xe hơi được chọn ngẫu nhiên của một loại cụ thể, cân nặng của một đứa trẻ được chọn ngẫu nhiên từ một bệnh viện nào đó, hoặc lượng khí CO_2 trong không khí của một thành phố được lựa chọn một cách ngẫu nhiên từ một vùng ở Ấn Độ. Các đại lượng này được gọi là **các biến ngẫu nhiên liên tục** vì giá trị của chúng dao động trên một khoảng trên trục số thực. Vấn đề này thường quan trọng để biết xác suất mà một biến ngẫu nhiên nhận tập các giá trị. Ví dụ, nếu X đại diện cho số năm thực dùng của một chiếc Honda Accord, thì xác suất của một lựa chọn ngẫu nhiên chiếc Accord với số năm thực dùng không quá 10 năm được ký hiệu bởi $P(0 \le X \le 10)$.

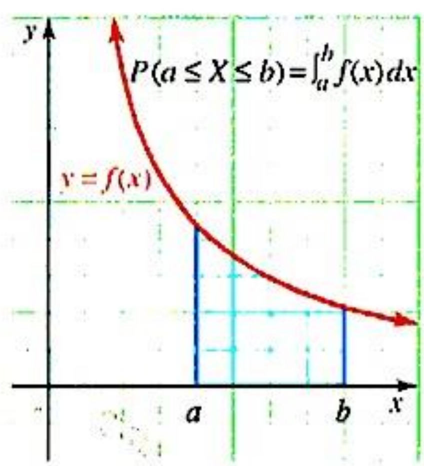


Figure 12.53 Probability as the area under the graph of the probability density function

Mỗi biến ngẫu nhiên liên tục X có hàm mật độ xác suất f có tính chất là xác suất của X nằm giữa số a và b được xác định bởi tích phân

$$P(a \le X \le b) = \int_a^b f(x)dx$$

Nói chung, $f(x) \ge 0$ với mọi x, và từ giá trị của x luôn luôn là một số thực dẫn đến $P(-\infty \le X \le \infty) = 1$, do vậy

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

Trong biểu diễn hình học, xác xuất $P(a \le X \le b)$ là diện tích bên dưới đồ thị hàm f trên đoạn $a \le x \le b$ (xem hình 12.53)

Lưu ý ký hiệu giữa biến ngẫu nhiên X và số thực x. Để lấy tích phân ta có thể lấy một trong hai ký hiệu.

Nếu X và Y là các biến ngẫu nhiên liên tục, thì hàm xác suất mật độ với hai biến ngẫu nhiên X và Y là hàm hai biến $f(x,y)$ thỏa $f(x,y)\geq 0$ với mọi $f(x,y)$ và

$$P\left[(X,Y)\text{trong } D\right]=\iint_D f(x,y)dA$$

trong đó $P\left[(X,Y)\text{trong } D\right]$ ký hiệu cho xác suất (X,Y) ở trong miền D.

Lưu ý rằng $P[(X,Y)$ trên mặt phẳng $XY] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy = 1$

Trong biểu diễn hình học, $P\left[(X,Y)\text{trong } D\right]$ được xem là thể tích bên dưới mặt $z=f(x,y)$ trên miền D.

Kỹ thuật xây dựng hàm mật độ xác xuất từ dữ liệu thực tế không được đề cập trong mục này, việc này được đề cập cụ thể trong phần xác suất và thống kê. Việc sử dụng tích phân bội hai để tính xác suất với hàm mật độ cho trước được minh họa trong ví dụ sau.

Ví dụ 6 Tính xác suất

Giả sử X đo thời gian (đơn vị là phút) mà khách hàng tại một cửa hàng cụ thể dành cho việc mua sắm và Y đo thời gian khách hàng xếp hàng thanh toán tiền. Một nghiên cứu cho rằng hàm mật độ xác suất với X và Y có thể được mô hình hóa là

$$f(X,Y)=\begin{cases}\dfrac{1}{200}e^{-x/10}e^{-y/20} & \text{với } x\geq 0 \text{ và } y\geq 0\\ 0 & \text{trong các trường hợp còn lại}\end{cases}$$

Tìm xác suất (phần trăm) mà tổng thời gian khách hàng ở cửa hàng không quá 30 phút.

Giải Mục tiêu là tìm xác suất mà $X+Y\leq 30$. Trước hết về mặt hình học, chúng ta muốn tìm xác suất mà một điểm lựa chọn ngẫu nhiên (x, y) nằm trên miền R trong góc phần tư thứ nhất, giới hạn bởi các trục tọa độ và đường thẳng $x+y=30$ (xem hình 12.54)

Xác suất này được tính bởi tích phân bội hai

$$P\left[(X,Y)\text{is in } R\right]=\iint_R f(x,y)dA$$

$$=\int_0^{30}\int_0^{30-x}\frac{1}{200}e^{-x/10}e^{-y/20}dydx$$

$$=\frac{-20}{200}\int_0^{30}e^{-x/10}.\left[e^{\frac{x-30}{20}}-1\right]dx$$

$$=e^{-3}-2e^{-3/2}+1$$

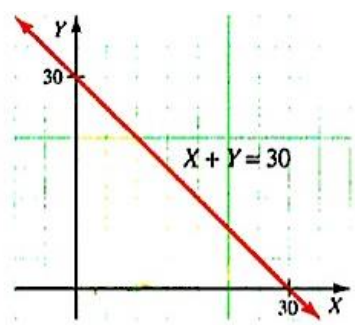


Figure 12.54 Triangle comprised of all points (X, Y) such that $X+Y\leq 30,\ X\geq 0,\ Y\geq 0$

Do vậy, xác suất khoảng 60% có thể một khách hàng phải dành không quá 30 phút ở cửa hàng.

Một tính chất hữu ích của xác suất là

$$P(E)+P(\overline{E})=1$$

trong đó E và $\overline{E}$ cùng nhau tạo thành tập tất cả các kết quả có thể (nghĩa là, chúng là các biến cố bổ sung). Trong ví dụ 6, vì biến cố E là tập hợp các khách hàng phải dành không quá 30 phút ở cửa hàng và $\overline{E}$ là tập hợp các khách hàng dành nhiều hơn 30 phút ở cửa hàng là bổ sung cho nhau, chúng ta có thể tìm xác suất mà khách hàng dành nhiều hơn 30 phút ở cửa hàng bằng cách sử dụng tính chất bổ sung: 1-60% = 40%.

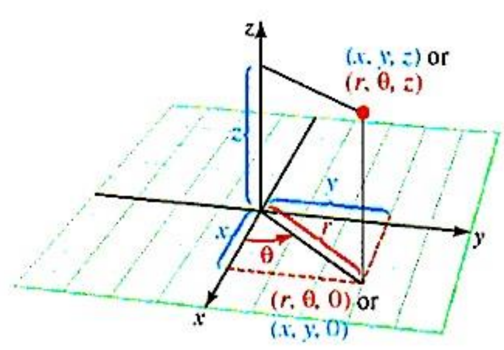
12.7 TỌA ĐỘ TRỤ VÀ TỌA ĐỘ CẦU

TRONG MỤC NÀY *Tọa độ trụ, tích phân với hệ tọa độ trụ, tọa độ cầu, tích phân với hệ tọa độ cầu.*

Chúng ta biết rằng một số đường cong được biểu diễn trong hệ tọa độ cực dễ dàng hơn trong hệ tọa độ vuông góc. Trong phần này chúng ta giới thiệu về hệ tọa độ trụ và hệ tọa độ cầu, các hệ tọa độ này không kém phần hữu ích để mô tả một số mặt và vật thể trong không gian.

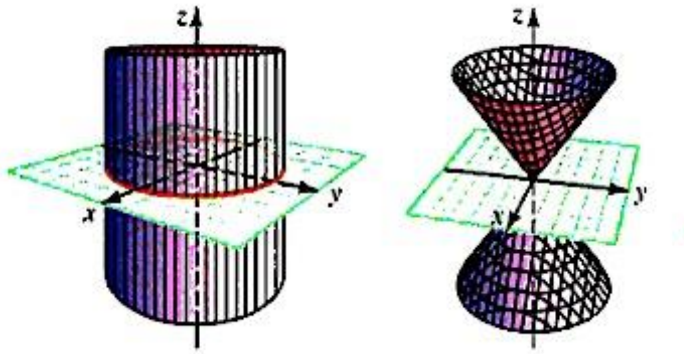
Tọa độ trụ

Tọa độ trụ là sự tổng quát của tọa độ cực của các mặt trong R^3. Nhắc lại, một điểm P có tọa độ vuông góc (x, y, z) nằm trên điểm Q $(x, y, 0)$ trong mặt phẳng $0xy$ là z đơn vị (nằm dưới nếu $z < 0$). Trong tọa độ trụ, chúng ta xác định điểm trong mặt phẳng $0xy$ trong tọa độ cực, với cùng tọa độ z như trong hệ tọa độ vuông góc. Mối liên hệ này được mô tả trong hình 12.58



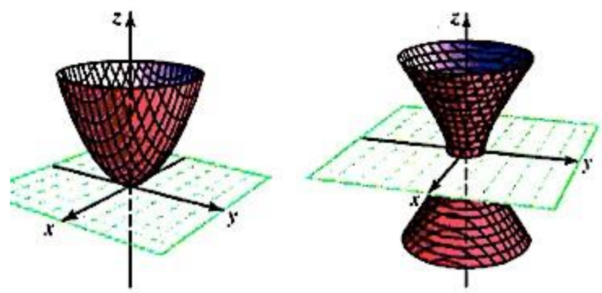
Hình 12.58 Hệ tọa độ trụ

Tọa độ trụ thuận tiện cho việc mô tả các mặt trụ, các mặt quay quanh trục đối xứng là trục 0z. Một vài ví dụ trong hình 12.59



a. Mặt trụ b. Mặt nón

	a. Mặt trụ	b. Mặt nón
Phương trình trong hệ tọa độ Đề-các	$x^2 + y^2 = a^2$	$x^2 + y^2 = z^2$
Phương trình trong hệ tọa độ trụ	$r = a$	$r = z$



c. Paraboloid **d.** Hyperboloid

	c. Paraboloid	d. Hyperboloid
Phương trình trong hệ tọa độ Đề-các	$x^2 + y^2 = az$	$x^2 + y^2 - z^2 = 1$
Phương trình trong hệ tọa độ trụ	$r^2 = az$	$r^2 = z^2 + 1$

Hình 12.59 Các mặt sử dụng tọa độ trụ thuận tiện

Chúng ta có các công thức đổi biến

CÔNG THỨC ĐỔI BIẾN TỌA ĐỘ ĐỀ-CÁC/ TỌA ĐỘ TRỤ

Tọa độ trụ sang tọa độ Đề các **Tọa độ Đề-các sang tọa độ trụ**

(r, θ, z) to (x, y, z) $\quad x = r\cos\theta$ $\quad (r, \theta, z)$ to (x, y, z)

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$y = r\sin\theta$

$\tan\theta = \dfrac{y}{x}$

Ví dụ 1 Biến đổi phương trình từ tọa độ Đề-các sang tọa độ trụ

Tìm phương trình trong tọa độ trụ của elliptic paraboloid $z = x^2 + 3y^2$.

Giải

Chúng ta sử dụng công thức $x = r\cos\theta, \ \ y = r\sin\theta$

Thay vào $z = x^2 + 3y^2 = (r\cos\theta)^2 + 3(r\sin\theta)^2 = r^2\left(1 + 2\sin^2\theta\right)$.

Vậy phương trình của elliptic paraboloid trong tọa độ trụ là $z = r^2\left(1 + 2\sin^2\theta\right)$

Phép tính tích phân với tọa độ trụ

Một tích phân bội ba $\iiint\limits_D f(x,y,z)\,dV$ có thể tính bằng cách đổi biến sang tọa độ trụ nếu miền lấy tích phân D là miền z-đơn và hình chiếu của D lên mặt phẳng $0xy$ là miền A có thể biểu diễn bằng tọa độ cực dễ hơn bằng tọa độ Đề-các.

Giả sử $f(x, y, z)$ liên tục trên miền lấy tích phân D, với $D = \{(x,y,z) : u(x,y) \le z \le v(x,y), \forall (x,y) \in A\}$

Do vậy, với cách đổi biến trong tọa độ cực $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ và $dA = rdrd\theta$, ta có

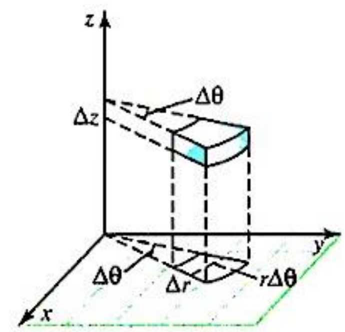
$$\iiint\limits_D f(x,y,z)\,dA = \iint\limits_A \left[\int_{u(x,y)}^{v(x,y)} f(x,y,z)\,dz\right] dA$$

$$= \iint\limits_A \int_{u(x,y)}^{v(x,y)} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\, r\,dz\,dr\,d\theta.$$

(xem lại định lý 12.4 và xem hình 12.60).

Do vậy trong tọa độ trụ $dV = rdrd\theta dz$.

Cuối cùng, hình chiếu là miền A, với $A = \{(r,\theta) : g_1(\theta) \le r \le g_2(\theta), \alpha \le \theta \le \beta\}$.



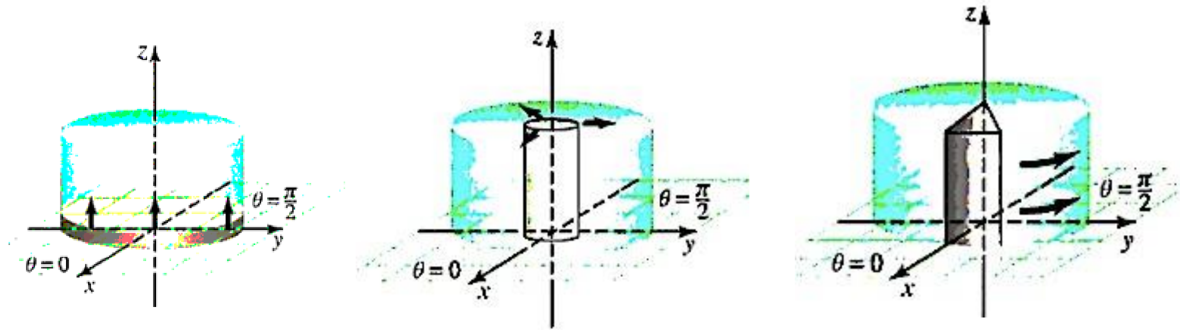
Hình 12.60 Thành phần thể tích trong tọa độ trụ

Ta có công thức đổi biến lấy tích phân sang hệ tọa độ trụ như sau.

TÍCH PHÂN BỘI BA TRONG TỌA ĐỘ TRỤ

Giả sử miền D là khối với mặt trên $z = v(r,\theta)$ và mặt dưới $z = u(r,\theta)$, và A là hình chiếu của khối lên mặt phẳng $0xy$ biểu diễn trong tọa độ cực. Khi đó, nếu $f(x, y, z)$ là liên tục trên D, thì tích phân bội ba của f trên D là

$$\iiint\limits_D f(x,y,z)\,dV = \int_\alpha^\beta \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \int_{u(r,\theta)}^{v(r,\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\, r\,dz\,dr\,d\theta$$



a. Lấy tích phân theo z b. Lấy tích phân theo r c. Lấy tích phân theo θ

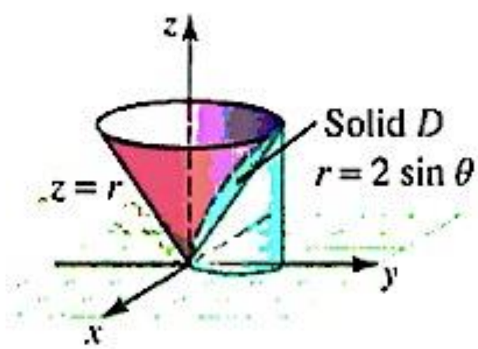
Hình 12.61 Cách xác định miền lấy tích phân D trong tọa độ trụ.

Ví dụ 2 Tính thể tích trong tọa độ trụ

Tính thể tích của vật thể trong góc phần tám thứ nhất giới hạn bởi mặt trụ $x^2 + y^2 = 2y$, mặt nón $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ và mặt phẳng $0xy$.

Giải

Giả sử miền lấy tích phân D được biểu diễn bởi vật thể như trong hình 12.62.



Hình 12.62

Các mặt dễ dàng biểu diễn sang tọa độ trụ như sau

Cylinder:	Cone:
$x^2 + y^2 = 2y$	$z = \sqrt{x^2 + y^2}$
$r^2 = 2r\sin\theta$	$z = r$
$r = 2\sin\theta$	

Vì miền D nằm trong góc phần tám thứ nhất, ta có $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$, do vậy miền D được biểu diễn là $0 \le z \le r \qquad 0 \le r \le 2\sin\theta \qquad 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$.

Vậy thể tích của vật thể cần tìm là

$$
\begin{aligned}
V &= \iiint_D dV \\
&= \iint_A \int_0^r r\, dzdrd\theta \\
&= \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\sin\theta} \int_0^r r\, dzdrd\theta \\
&= \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\sin\theta} r^2\, drd\theta \\
&= \int_0^{\pi/2} \left(\frac{r^3}{3} \right)\Bigg|_0^{2\sin\theta} d\theta \\
&= \frac{8}{3}\int_0^{\pi/2} \left(1-\cos^2\theta\right)\sin\theta d\theta \\
&= \frac{16}{9}
\end{aligned}
$$

Ví dụ 3 Trọng tâm trong tọa độ trụ

Một khối đồng chất D với khối lượng riêng là hằng số ρ giới hạn dưới bởi mặt phẳng $0xy$, xung quanh bởi mặt trụ $x^2+y^2=a^2\ (a>0)$, và giới hạn trên bởi mặt paraboloid $z=x^2+y^2$. Tìm trọng tâm của khối.

Giải Khối D được biểu diễn như hình 12.63

Vì khối giới hạn bởi mặt trụ nên chúng ta sẽ tính tích phân trong tọa độ trụ

Cylinder:	Paraboloid:
$x^2+y^2=a^2$	$z=x^2+y^2$
$r^2=a^2$	$z=r^2$
$r=a \quad (a>0)$	

Gọi $\left(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}\right)$ là trọng tâm. Sử dụng tính chất đối xứng và giả thiết hàm khối lượng riêng là hàm hằng, ta có $\overline{x}=\overline{y}=0$.

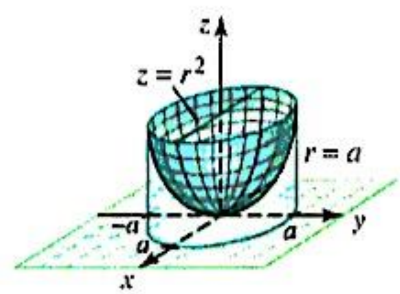


Figure 12.63 The solid D

Gọi m là khối lượng của khối D. Vì hình chiếu là $r=a$ với $0\le\theta\le 2\pi$, ta tìm được

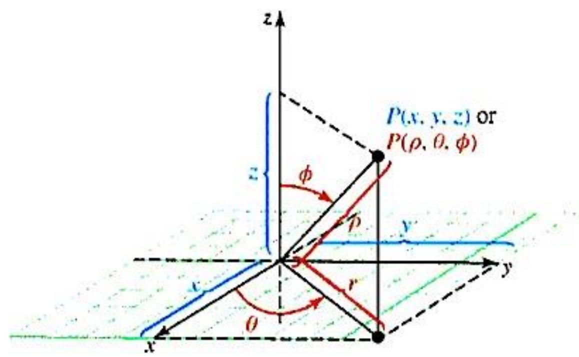
$$
\overline{z} = \frac{M_{xy}}{m} = \frac{\iiint_D zr\rho\, dzdrd\theta}{\iiint_D r\rho\, dzdrd\theta}
$$

$$
= \frac{\int_0^{2\pi}\int_0^a\int_0^{r^2} zr\, dzdrd\theta}{\int_0^{2\pi}\int_0^a\int_0^{r^2} r\, dzdrd\theta} = \frac{\frac{\pi}{6}a^6}{\frac{\pi}{2}a^4} = \frac{a^2}{3}
$$

Trọng tâm là $\left(0,0,\frac{a^2}{3}\right)$.

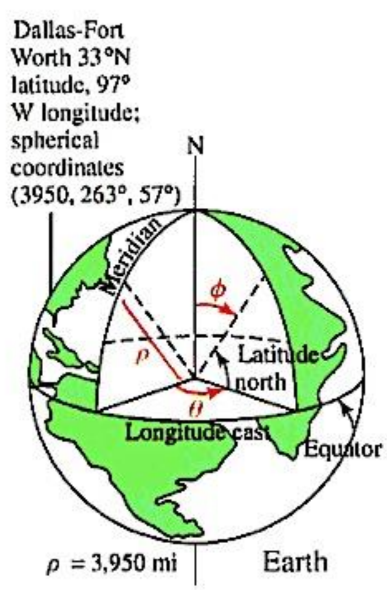
Tọa độ cầu

Trong tọa độ cầu, tọa độ điểm P là một bộ ba (ρ,θ,ϕ), trong đó ρ,θ và f là các số được xác định như sau (tương ứng với hình 12.64).



Hình 12.64 Hệ tọa độ cầu

ρ là khoảng cách từ gốc tọa độ đến P, $\rho \geq 0$.
θ là góc cực (như trong tọa độ cực), $0 \leq \theta \leq 2\pi$.
ϕ là góc từ chiều dương của trục $0z$ đến tia từ gốc tọa độ đến P, $0 \leq \phi \leq \pi$

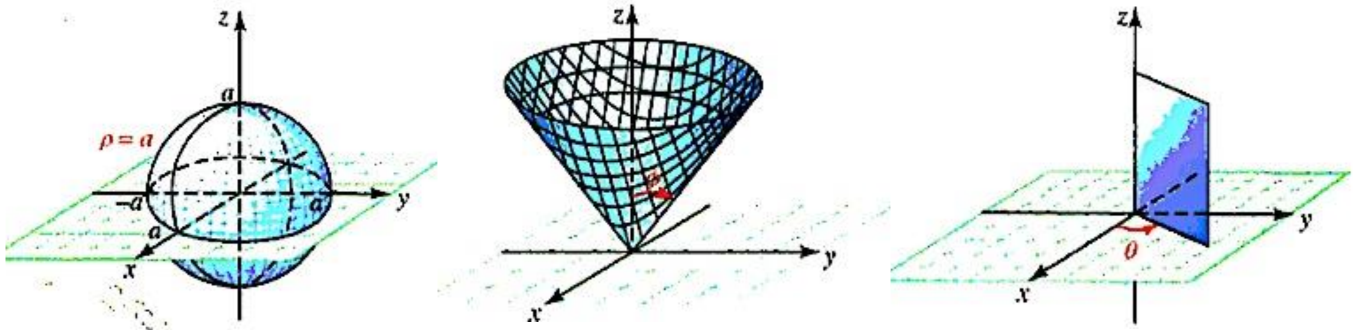


Bạn có thể thấy rằng tọa độ cầu có liên quan đến kinh độ và vĩ độ và được sử dụng trong định vị. Cụ thể hơn, xét hệ tọa độ vuông góc với gốc tọa độ là tâm của trái đất, với chiều dương của trục $0z$ đi qua cực bắc và mặt phẳng $0xz$ đi qua kinh tuyến gốc. Khi đó một vị trí cụ thể trên bề mặt được ký hiệu là (ρ,θ,ϕ), trong đó ρ là khoảng cách từ tâm của trái đất, θ là kinh độ, và $\frac{\pi}{2}-\phi$ là vĩ độ (vì vĩ độ là góc tính từ đường xích đạo).

Hình 12.65 Tọa độ cầu trên bề mặt trái đất

Ví dụ, Dallas-Forth Worth có tọa độ $(\rho,\theta,\phi)=\left(3{,}950, 263^0, 57^0\right)$ như trong hình 12.65.

Tọa độ cầu thích hợp cho mặt cầu, mặt nón hoặc một vài mặt phẳng. Một vài ví dụ trong hình 12.66



a. Mặt cầu $\rho = a$

$a > 0$

b. Mặt nón $\phi = a$

$0 < a < \dfrac{\pi}{2}$

c. Nửa mặt phẳng thẳng đứng $\theta = a$

$0 \le \theta \le 2\pi$

Hình 12.66 Các mặt thuận tiện với tọa độ cầu

Chúng ta sử dụng mối liên hệ trong hình 12.64 để có các công thức đổi biến còn lại. Tất cả các công thức này có thể rút ra từ mối liên hệ giữa các biến.

CÁC CÔNG THỨC ĐỔI BIẾN SANG TỌA ĐỘ CẦU

Tọa độ cầu sang tọa độ Đề-các (ρ, θ, ϕ) sang (x, y, z)

$$x = \rho \sin\phi \cos\theta$$
$$y = \rho \sin\phi \sin\theta$$
$$z = \rho \cos\phi$$

Tọa độ cầu sang tọa độ trụ (ρ, θ, ϕ) sang (r, θ, z)

$$r = \rho \sin\phi$$
$$\theta = \theta$$
$$z = \rho \cos\phi$$

Tọa độ Đề-các sang tọa độ cầu (x, y, z) sang (ρ, θ, ϕ)

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$
$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$
$$\phi = \cos^{-1}\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right)$$

Tọa độ trụ sang tọa độ cầu (r, θ, z) sang (ρ, θ, ϕ)

$$\rho = \sqrt{r^2 + z^2}$$
$$\theta = \theta$$
$$\phi = \cos^{-1}\left(\frac{z}{\sqrt{r^2 + z^2}}\right)$$

Ví dụ 4 Biến đổi các phương trình từ tọa độ Đề-các sang tọa độ cầu

Viết các phương trình sau sang tọa độ cầu

a. Mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \qquad (a > 0)$

b. Mặt paraboloid $z = x^2 + y^2$

Giải

a. Vì $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Do vậy phương trình $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ trở thành $\rho^2 = a^2 \Rightarrow \rho = a$

b. Mặt paraboloid

$$z = x^2 + y^2$$

$$\rho \cos\phi = \rho^2 \sin^2\phi$$

$$\Rightarrow \rho = \cot\phi \csc\phi$$

Phép tính tích phân trong tọa độ cầu

Với khối D trong tọa độ cầu, thành phần cơ bản của thể tích là một cái "nêm" cầu giới hạn bởi $\rho_1 \le \rho \le \rho_1 + \Delta\rho \qquad \phi_1 \le \phi \le \phi_1 + \Delta\phi \qquad \theta_1 \le \theta \le \theta_1 + \Delta\theta$.

Cái " nêm" này được biểu diễn trong hình 12.67

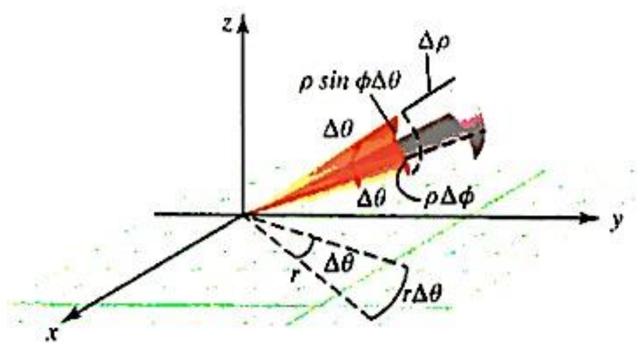


Figure 12.67 A spherical wedge

Trong mục 12.8 chúng ta sẽ thấy rằng thể tích của nêm là xấp xỉ với $dV = \rho^2 \sin\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$.

Sử dụng công thức này, chúng ta có thể phân chia nhỏ và lấy giới hạn của tổng Riemann nếu tồn tại ta sẽ có công thức tích phân như sau.

TÍCH PHÂN BỘI BA TRONG TỌA ĐỘ CẦU

Nếu *f* là liên tục trong miền bị chặn *D*, thì tích phân bội ba của *f* trên miền *D* được xác định bởi

$$\iiint_D f(x, y, z)\, dV = \iiint_{\overline{D}} f(\rho\sin\phi\cos\theta, \rho\sin\phi\sin\theta, \rho\cos\phi)\rho^2 \sin\phi \, d\rho \, d\theta \, d\phi$$

trong đó $\overline{D}$ là miền *D* được biểu diễn sang tọa độ cầu

Ví dụ 5 Thể tích của khối cầu

Trong hình học, hình cầu bán kính R có thể tích là $V = \frac{4}{3}\pi R^3$. Hãy sử dụng tích phân chứng minh công thức này.

Giải Chúng ta sẽ làm việc trong tọa độ cầu với gốc tọa độ là tâm của hình cầu, vì phương trình của mặt cầu là $\rho = R$ với $0 \le \theta \le 2\pi$ và $0 \le \phi \le \pi$.

Thể tích của hình cầu bán kính R là

$$\begin{aligned} V &= \iiint_D dV \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R} \rho^2 \sin\phi \, d\rho d\phi d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \sin\phi \left(\frac{\rho^3}{3}\right)\Bigg|_0^R d\phi d\theta \\ &= \frac{R^3}{3}\int_0^{2\pi}\left(-\cos\theta\big|_0^{\pi}\right) d\phi \\ &= \frac{2R^3}{3}\int_0^{2\pi} d\phi = \frac{4\pi R^3}{3} \end{aligned}$$

Ví dụ 6 Mômen quán tính sử dụng tọa độ cầu

Chóp của một món đồ chơi với khối lượng riêng là hằng số ρ_0, có nắp là chỏm cầu, đáy là hình nón, như hình 12.68.

Tâm của nắp hình chỏm cầu đặt ở điểm mà tại đó nắp quay, và chiều cao của đáy hình nón bằng với bán kính của nó. Tìm mô men quán tính của chóp quanh trục đối xứng của nó.

Giải

Ta có trục 0z là trục đối xứng của chóp.

Giả sử nắp của chóp là một phần của nửa mặt cầu $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$.

Từ giả thiết chiều cao của nón bằng bán kính đáy ta có $\phi = \frac{\pi}{4}$. Gọi chóp D là miền lấy tích phân, ta có mô men quán tính I_z quanh trục 0z là

$$I_z = \iiint_D \left(x^2 + y^2\right) dm = \iiint_D \left(x^2 + y^2\right)\rho_0 \, dV$$

Chóp D trong tọa độ cầu xác định bởi

$$0 \le \theta \le 2\pi,\ 0 \le \phi \le \frac{\pi}{4},\ \text{và } 0 \le \rho \le R$$

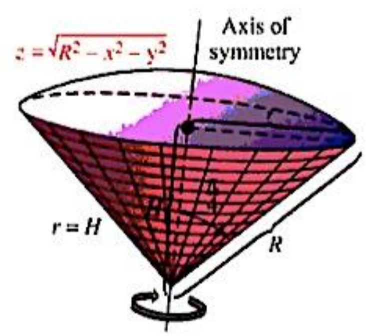


Figure 12.68 Moment of inertia for a spinning top

Ta có tích phân trong tọa độ cầu

$$I_z = \iiint_D \left(x^2+y^2\right)\rho_0 \, dV$$

$$= \rho_0 \int_0^{\pi/4} \int_0^{2\pi} \int_0^R \underbrace{\rho^2 \sin^2\phi}_{x^2+y^2} \, \rho^2 \sin\phi \, d\rho d\theta d\phi$$

$$= \rho_0 \int_0^{\pi/4} \int_0^{2\pi} \left(\left.\frac{\rho^5}{5}\right|_0^R \right) \sin^3\phi \, d\theta d\phi$$

$$= \frac{R^5 \rho_0 \pi}{30}\left(8-5\sqrt{2}\right)$$

Ví dụ 7 Chọn hệ tọa độ vào việc lấy tích phân

Tính tích phân $I = \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{x^2+y^2}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} zdzdydx$ sử dụng tọa độ Đề-các hoặc tọa độ trụ hoặc tọa độ cầu.

Giải

Miền lấy tích phân

$$D = \left\{ \left(x,y,z\right) : x^2+y^2 \le z \le \sqrt{2-x^2+y^2}, -\sqrt{1-x^2} \le y \le \sqrt{1-x^2}, -1 \le x \le 1 \right\}$$

Miền lấy tích phân D giới hạn dưới bởi mặt paraboloid $z = x^2+y^2$ và trên là nửa mặt cầu $z=\sqrt{2-x^2-y^2}$.

Hai mặt giao nhau khi $z+z^2=2$

$z=1$ (nhận) hoặc $z=-2$ (loại) (vì $z \ge 0$)

Hình chiếu lên mặt phẳng $0xy$ là hình tròn $x^2+y^2 \le 1$ (xem hình 12.69)

Tích phân trong tọa độ cầu là

$$I = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \int_0^{\sqrt{2}} \left(\rho\cos\phi\right)\rho^2 \sin\theta \, d\rho \, d\phi \, d\theta + \int_0^{2\pi} \int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_0^{\cot\phi\csc\phi} \left(\rho\cos\phi\right)\rho^2 \sin\theta \, d\rho \, d\phi \, d\theta$$

Tuy nhiên, nếu sử dụng tọa độ trụ, tích phân sẽ tương đối đơn giản hơn

$$I = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{r^2}^{\sqrt{2-r^2}} zr \, dzdrd\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^1 r \left[\frac{z^2}{2}\right]_{r^2}^{\sqrt{2-r^2}} drd\theta$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^1 r \left[2-r^2-r^4\right] drd\theta$$

$$= \frac{7\pi}{12}$$

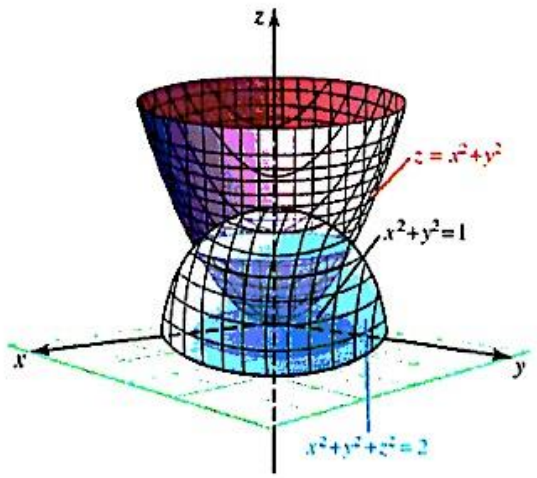


Figure 12.69 The solid *D* and the projected region in the *xy*-plane

12.8 JACOBIANS: ĐỔI BIẾN

TRONG PHẦN NÀY: *Đổi biến trong tích phân bội hai và tích phân bội ba.* Chúng ta đã thấy cách đổi biến sang tọa độ cực thường đơn giản khi tính một số tích phân bội hai, và tương tự tọa độ trụ và tọa độ cầu có thể dùng để tính tích phân bội ba. Đây không phải là cách duy nhất nhưng có thể sử dụng thuận tiện, và mục tiêu của mục này là xem xét công thức đổi biến tổng quát trong tích phân bội.

Đổi biến trong tích phân bội hai

Khi đổi biến $x = g(u)$ trong tích phân hàm một biến, ta biết

$$\int_a^b f(x)dx = \int_c^d f(g(u)).\, g'(u)du$$

trong đó cận lấy tích phân c và d thỏa $a = g(c)$ và $b = g(d)$. Bằng cách đổi biến trong tích phân bội hai, chúng ta muốn biến đổi hàm lấy tích phân $f(x, y)$ và miền lấy tích phân để việc tính tích phân dễ dàng hơn. Nói chung, quá trình này liên quan đến việc dẫn nhập " một phần tử ánh xạ" tương tự như phần tử $g'(u)$ trong tích phân hàm một biến. Phần tử này được gọi là Jacobian và được lấy theo tên nhà toán học người Đức Karl Gustav Jacobi (1804 -1851; xem trong phần đọc thêm *Historical Quest* bài 59), ông là người thực hiện có hệ thống đầu tiên nghiên cứu về việc đổi biến trong tích phân bội vào giữa thế kỷ 19.

Giả sử chúng ta cần tính tích phân bội hai $\iint_D f(x,y)dydx$ bằng cách biến đổi sang một tích phân tương đương theo các biến *u* và *v*. Việc đổi biến này được xác định bởi một phép biến đổi (hàm số) T từ mặt phẳng $0uv$ sang mặt phẳng $0xy$. Nếu $T(u,v)=(x,y)$, thì (x,y) là ảnh của (u,v) bởi *T*, và nếu không có hai điểm (u,v) trong mặt phẳng $0uv$ tương ứng với cùng một điểm (x,y) trong mặt phẳng $0xy$, thì T là hàm 1-1 (song ánh). Trong trường hợp này có thể có thể giải các phương trình $x=x(u,v)$ và $y=y(u,v)$ để tìm u và v theo x và y để có được $u=u(x,y)$ và $v=v(x,y)$, các hàm này xác định một phép biến đổi ngược lại từ mặt phẳng $0xy$ sang mặt phẳng $0uv$, được gọi là phép biến đổi ngược của *T*, và ký hiệu là T^{-1}. Thuật ngữ này được mô tả trong hình 12.72.

Kết quả cơ bản này chúng ta sẽ sử dụng để đổi biến trong tích phân bội hai như trong định lý sau

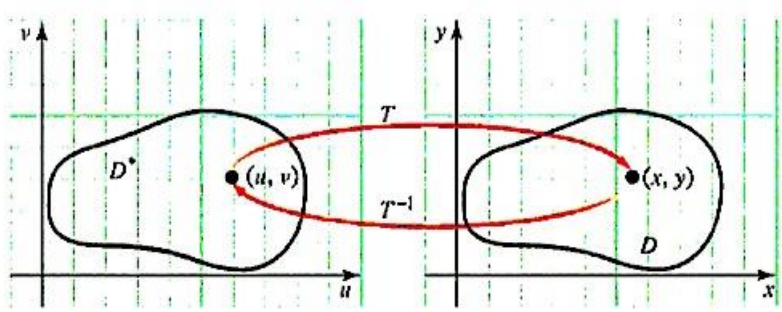


Figure 12.72 A one-to-one transformation T and its inverse T^{-1}

Định lý 12.7 Đổi biến trong tích phân bội hai

Giả sử *f* là một hàm liên tục bên trong miền *D* trong mặt phẳng $0xy$ và bị chặn trên miền đó, và giả sử *T* là hàm 1-1 ngoại trừ các điểm trên biên tương ứng miền *D** trong mặt phẳng $0uv$ sang miền *D* bởi cách đổi biến $x=g(u,v)$, $y=h(u,v)$, trong đó *g* và *h* là các hàm khả vi liên tục trên *D**. Khi đó

$$\iint_D f(x,y)dydx=\iint_{D^*} f\left[g(u,v),h(u,v)\right]\left|J(u,v)\right|dudv$$

trong đó $J(u,v)=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v}\\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}=\dfrac{\partial x}{\partial u}\dfrac{\partial y}{\partial v}-\dfrac{\partial y}{\partial u}\dfrac{\partial x}{\partial v}$

với $J\neq 0$ và không phụ thuộc vào miền *D**.

Phần tử $J(u,v)$ được gọi là **Jacobian** và còn được ký hiệu là $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$.

Chứng minh: Phần chứng minh chi tiết là vấn đề của toán cao cấp, nhưng phần lập luận về mặt hình học cho định lý này được trình bày trong phần phụ lục B.

Định lý này một lần nữa đại diện cho trường hợp đơn giản, và điều kiện hàm *f* là một hàm liên tục bên trong miền *D* trong mặt phẳng 0*xy* và bị chặn trên miền là đủ, chứ không là điều kiện cần. Định lý này có thể được trình bày trong phần toán cao cấp với nhiều giả thiết hơn cho phép lấy tích phân của hàm $f(x,y)$ theo các biến khác. Các điều kiện với $x=g(u,v)$, $y=h(u,v)$, tuy nhiên chúng rất quan trọng như đã nêu. Điều kiện phải là hàm 1-1 qua thông qua các hàm *g* và *h* với các đạo hàm riêng tồn tại và liên tục, và Jacobian không bao giờ biến mất bên trong miền (ngoại trừ có thể trên tập không thì định lý vẫn sử dụng).

Ví dụ 1 Tìm Jacobian

Tìm Jacobian trong phép đổi biến từ tọa độ vuông góc sang tọa độ cực, đặt $x=r\cos\theta$ và $y=r\sin\theta$.

Giải Jacobian của phép đổi biến là

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial\theta}\\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial\theta}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{vmatrix}=r\cos^2\theta+r\sin^2\theta=r$$

Kết quả trên đúng với công thức đã sử dụng trước đó

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy=\iint_{D^*} f(r\cos\theta,r\sin\theta)\,r\,drd\theta$$

trong đó *D** là miền trong mặt phẳng (r,θ) cho tương ứng miền *D* trong mặt phẳng 0*xy* nhờ công thức đổi biến $x=r\cos\theta$ và $y=r\sin\theta$, được mô tả trong hình 12.73.

Đôi khi dễ dàng biểu diễn *u* và *v* theo *x* và *y* hơn, và tính Jacobian $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$. Jacobian $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ khi đổi biến trong tích phân $\iint_D f(x,y)\,dxdy$ có thể tính bởi công thức

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}.\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=1$$

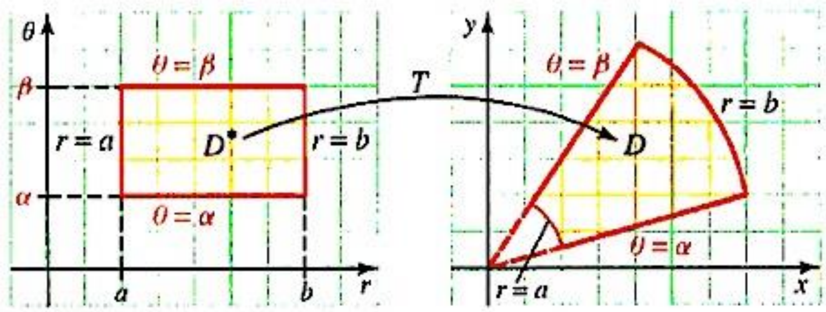


Figure 12.73 Transformation of a region D^* by $T: x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$

Ví dụ 2 Tìm Jacobian nếu biết $u = u\,(x, y)$ và $v = v\,(x, y)$

Nếu $u = xy$ và $v = x^2 - y^2$, hãy biểu diễn Jacobian $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$ theo u và v.

Giải

Ta có $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & x \\ 2x & -2y \end{vmatrix} = -2y^2 - 2x^2$

Mặt khác $\left(x^2 - y^2\right)^2 + 4x^2y^2 = \left(x^2 + y^2\right)^2 \Leftrightarrow v^2 + 4u^2 = \left(x^2 + y^2\right)^2$

Do vậy

$\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = -2y^2 - 2x^2 = -2\sqrt{4u^2 + v^2}$

Ví dụ 3 Tính tích phân bội hai bằng cách đổi biến

Tính tích phân $\iint\limits_D \left(\dfrac{x-y}{x+y}\right)^4 dydx$, với D là hình tam giác giới hạn bởi đường thẳng $x + y = 1$ và các trục tọa độ.

Giải Đổi biến $u = x - y, \quad v = x + y$

Ta có $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2$

Mà $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} \cdot \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = 1$. Nên $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \dfrac{1}{2}$

Hoặc ta có thể biến đổi $x = \dfrac{1}{2}(u+v), \quad y = \dfrac{1}{2}(v-u)$.

Khi đó Jacobian $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2} \end{vmatrix} = \dfrac{1}{2}$

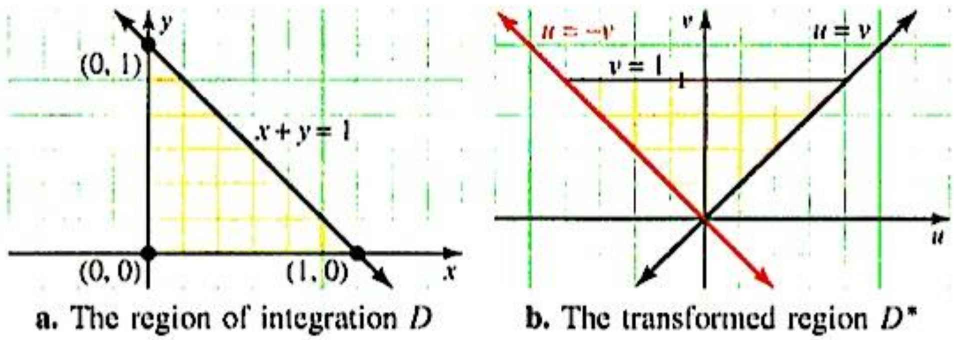


Figure 12.74 Transformation of D to D*

Để tìm ảnh D* của D trên mặt phẳng 0*uv*, lưu ý rằng các đường thẳng $x=0$ và $y=0$ trên D tương ứng với $u=-v$ và $u=v$, tương tự $x+y=1$ ứng với $v=1$. Do vậy với cách đổi biến này miền lấy tích phân D* là hình tam giác có các đỉnh là $(0,0),(1,1)$và $(-1,1)$ như hình 12.47b.

Tính tích phân ta được

$$\iint_D \left(\frac{x-y}{x+y}\right)^4 dydx = \iint_{D^*} \left(\frac{u}{v}\right)^4 dudv = \frac{1}{2}\int_0^1\int_{-v}^{v} u^4v^{-4}dudv = \frac{1}{10}$$

Trong ví dụ 3, cách đổi biến được lựa chọn để hàm lấy tích phân đơn giản, nhưng trong một số trường hợp cách đổi biến được lựa chọn sao cho miền lấy tích phân đơn giản hơn.

Ví dụ 4 Đổi biến để đơn giản hóa miền lấy tích phân

Tìm diện tích của miền *E* giới hạn bởi elip $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

Giải Công thức tính diện tích $A = \iint_E dydx$, trong đó E là miền như trong hình 12.75a

Vì miền E là hình elip có phương trình $\left(\dfrac{x}{a}\right)^2 + \left(\dfrac{y}{b}\right)^2 \le 1$

Chúng ta có thể đặt $u = \dfrac{x}{a}$ và $v = \dfrac{y}{b}$ khi đó hình elip *E* biến thành hình tròn $C: u^2 + v^2 \le 1$ như trong hình 12.75b.

Khi đó $x = au$ và $y = bv$, và Jacobian là

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{vmatrix} = ab$$

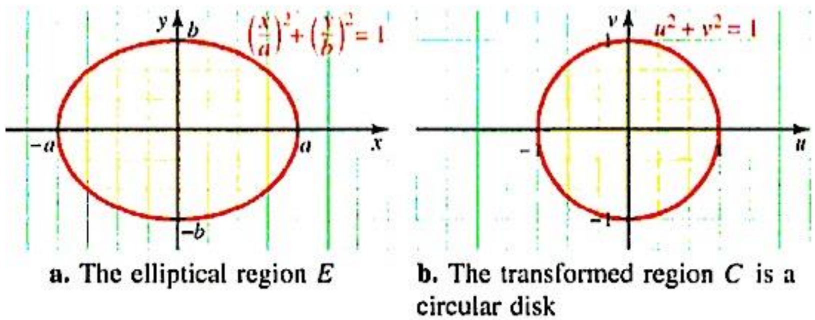


Figure 12.75 Transformation of the ellipse *E* to the circle *C*

Vì $ab > 0$ do vậy $|ab| = ab$, khi đó diện tích miền *E* được xác định bởi

$$\iint_E dydx = \iint_C ab\, dudv = ab\iint_C dudv = ab.S(\mathrm{C}) = ab.\left(\pi.1^2\right) = ab\pi$$

Ví dụ 5 Dùng phép đổi biến để tìm trọng tâm

Tìm trọng tâm (làm tròn đến hàng phần chục) của miền *D** trong mặt phẳng 0*xy* giới hạn bởi các đường thẳng $y = \frac{1}{4}x$ và $y = \frac{5}{2}x$ và các đường thẳng $xy = 1$ và $xy = 5$.

Giải Nếu *A* là diện tích của miền *D**, trọng tâm là $\left(\overline{x}, \overline{y}\right)$, trong đó

$$\overline{x} = \frac{1}{A}\iint_{D^*} xdA \text{ và } \overline{y} = \frac{1}{A}\iint_{D^*} ydA$$

Đổi biến để cho các đường cong giới hạn miền lấy tích phân trở nên đơn giản bằng cách đặt $u = \frac{y}{x}$ và $v = xy$, khi đó các biên của miền lấy tích phân *D* là

$$u = \frac{1}{4},\quad u = \frac{5}{2},\quad v = 1,\quad v = 5$$

Miền *D** và *D* được biểu diễn như trong hình 12.76

Khi đó Jacobian $\frac{1}{J} = \frac{\partial\left(u,v\right)}{\partial\left(x,y\right)} = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{-y}{x^2} & \frac{1}{x} \\ y & x \end{vmatrix} = \frac{-2y}{x} = -2u$

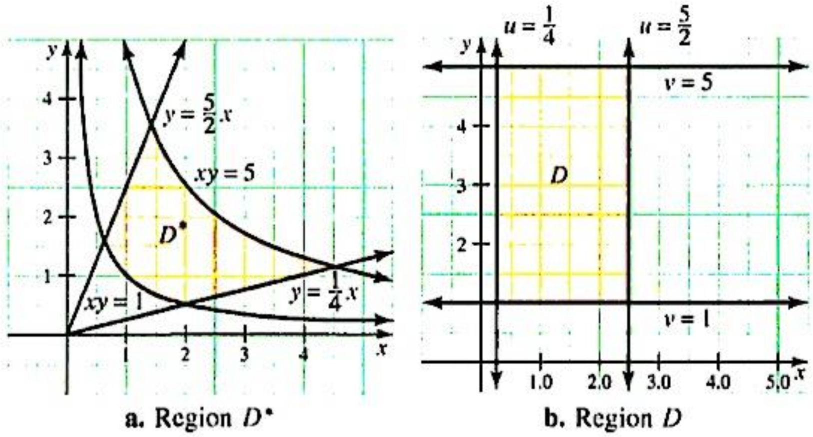


Figure 12.76 Change of variables

Khi đó diện tích của miền D^* là

$$A = \iint_{D^*} dydx$$

$$= \int_1^5 \int_{1/4}^{5/2} \left[\frac{-1}{2u} \right] dudv$$

$$= \frac{1}{2} \int_1^5 [\ln u]_{1/4}^{5/2} dv$$

$$= \frac{1}{2} \int_1^5 \left[\ln \frac{5}{2} - \ln \frac{1}{4} \right] dv$$

$$= 2\ln 10$$

Để tìm trọng tâm $(\bar{x}, \bar{y})$, ta tính

$$\bar{x} = \frac{1}{A} \iint_{D^*} xdA = \frac{1}{2\ln 10} \int_1^5 \int_{1/4}^{5/2} \sqrt{\frac{v}{u}} \left| \frac{-1}{2u} \right| dudv \approx 2.0$$

$$\bar{x} = \frac{1}{A} \iint_{D^*} ydA = \frac{1}{2\ln 10} \int_1^5 \int_{1/4}^{5/2} \sqrt{uv} \left| \frac{-1}{2u} \right| dudv \approx 1.6$$

Trọng tâm xấp xỉ điểm $(2.0, 1.6)$ trong mặt phẳng $0xy$.

Đổi biến trong tích phân bội ba

Công thức đổi biến trong tích phân bội ba cũng tương tự công thức đổi biến cho tích phân bội hai. Giả sử T là một cách đổi biến biến cho tương ứng miền R^* trong không gian $0uvw$ sang miền R trong không gian $0xyz$, trong đó

$$T: \quad x = x(u,v,w) \quad y = y(u,v,w), \quad z = z(u,v,w).$$

Khi đó Jacobian của T là định thức

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

và công thức đổi biến

$$\iiint_R f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint_{R^*} f\left[x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)\right]\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| dudvdw$$

Ví dụ 6 Công thức lấy tích phân trong tọa độ cầu

Ta có công thức biến đổi tích phân bội ba từ tọa độ vuông góc (tọa độ Đề-các) sang tọa độ cầu.

Giải

Công thức đổi biến từ tọa độ vuông góc sang tọa độ cầu là

$x = \rho\sin\phi\cos\theta \qquad y = \rho\sin\phi\sin\theta \qquad z = \rho\cos\phi$

Jacobian của phép đổi biến này là

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\phi)} = \begin{vmatrix} x_\rho & x_\theta & x_\phi \\ y_\rho & y_\theta & y_\phi \\ z_\rho & z_\theta & z_\phi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin\phi\cos\theta & -\rho\sin\phi\sin\theta & \rho\cos\phi\cos\theta \\ \sin\phi\sin\theta & \rho\sin\phi\cos\theta & \rho\cos\phi\sin\theta \\ \cos\phi & 0 & -\rho\sin\phi \end{vmatrix} = -\rho^2\sin\phi$$

Vì $0 \le \phi \le \pi$, ta có $\sin\phi \ge 0$, ta có $\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\phi)}\right| = \left|-\rho^2\sin\phi\right| = \rho^2\sin\phi$

Ta có công thức biến đổi tích phân bội ba từ tọa độ vuông góc (tọa độ Đề-các) sang tọa độ cầu là

$$\iiint_R f(x,y,z)\,dzdxdy = \iiint_{R^*} f(\rho\sin\phi\cos\theta, \rho\sin\phi\sin\theta, \rho\cos\phi)\rho^2\sin\phi\, d\rho\, d\theta\, d\phi$$