KARL J.SMITH - MONTY J.STRAUSS - MAGDALENA D.TODA

Tài liệu môn học

CALCULUS

GIẢI TÍCH

Người dịch:

Bộ môn Toán - ĐH SPKT, Tp. Hồ Chí Minh - Năm 2019

Mục lục

Chương 12

TÍCH PHÂN BỘI

Dựa vào cách định nghĩa của tích phân xác định $\int\limits_a^b f(x)dx$ được giới thiệu trong chương 5, trong chương này chúng ta sẽ tổng quát hóa tích phân xác định để định nghĩa tích phân bội, tích phân mà trong đó hàm dưới dấu tích phân là hàm nhiều biến.

12.1 TÍCH PHÂN BỘI HAI TRÊN MIỀN HÌNH CHỮ NHẬT

12.1.1 Xem lại định nghĩa tích phân xác định

Trong chương 5, ta đã định nghĩa tích phân xác định của hàm một biến $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ như một giới hạn của tổng Riemann.

Cho hàm bị chặn f xác định trên đoạn $[a,b]$.

Bước 1: Phân hoạch đoạn $[a,b]$ thành n khoảng con $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ với $k=\overline{1,n}$ trong đó $a = x_0 < x_1 < x_2 ... < x_n = b$. Gọi phân hoạch này là P.

Bước 2: Với $k=\overline{1,n}$, chọn một điểm x_k^* tùy ý là một điểm đại diện của khoảng con $[x_{k-1}, x_k]$ trong phân hoạch P. Lập tổng

$$R_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\,\Delta x_k$$

là **tổng Riemann** của f tương ứng với phân hoạch P và đại diện khoảng con $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*$.

Bước 3: Tính giới hạn

$$I = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} f\left(x_k^*\right) \Delta x_k$$

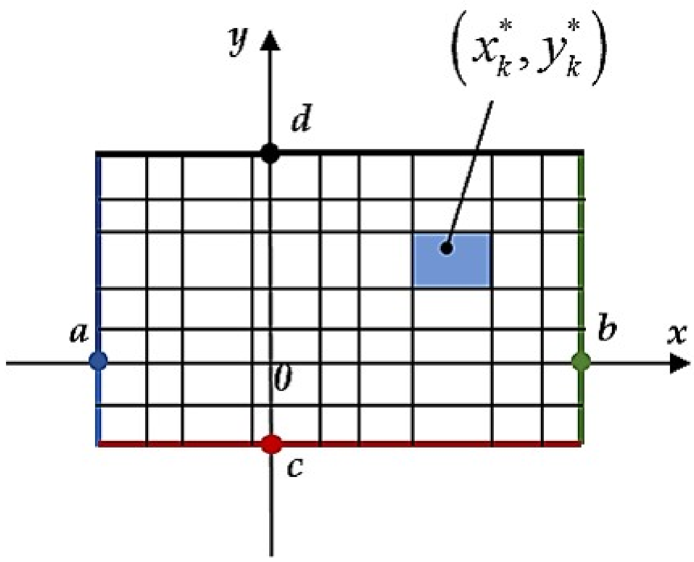
Nếu giới hạn này tồn tại thì giá trị của giới hạn này được gọi là tích phân xác định của f trên đoạn $[a, b]$ và được ký hiệu

$$I = \int_a^b f(x)\, dx = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} f\left(x_k^*\right) \Delta x_k$$

12.1.2 Định nghĩa tích phân bội hai trên miền hình chữ nhật

Tương tự cách định nghĩa của tích phân xác định ta sẽ định nghĩa tích phân bội hai theo hai biến $\iint\limits_R f(x, y)\, dA$ trên miền chữ nhật $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \le x \le b,\ c \le y \le d\}$.

Bước 1:: Phân hoạch đoạn $a \le x \le b$ thành m đoạn con và đoạn $c \le y \le d$ thành n đoạn con. Sử dụng những đoạn con này, phân hoạch hình chữ nhật R thành $N = mn$ hình chữ nhật con như hình 12.1. Gọi phân hoạch này là P.



Hình 12.1: Một phân hoạch hình chữ nhật R thành mn hình chữ nhật con và phần tử đại diện của hình chữ nhật con thứ k

Bước 2: Chọn một điểm đại diện (x_k^*, y_k^*) từ mỗi hình chữ nhật con thứ k với $k = \overline{1, n}$ trong phân hoạch của hình chữ nhật. Lập tổng

$$S_n = \sum_{k=1}^{N} f\left(x_k^*, y_k^*\right) \Delta A_k$$

trong đó ΔA_k là diện tích của hình chữ nhật con thứ k. Tổng này được gọi là **tổng Riemann** của $f(x, y)$ ứng với phân hoạch P và các đại diện của hình chữ nhật con (x_k^*, y_k^*).

Bước 3: Để đo kích cỡ của các hình chữ nhật trong phân hoạch P, ta định nghĩa chuẩn $\|P\|$ của phân hoạch là độ dài của đường chéo dài nhất trong các đường chéo của các hình chữ nhật con trong phân hoạch. Ta tinh chỉnh phân hoạch bởi việc chia nhỏ các hình chữ nhật con sao cho chuẩn giảm.

Tính giới hạn

$$\lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{N} f\left(x_k^*, y_k^*\right) \Delta A_k$$

Nếu giới hạn này tồn tại, giá trị của nó được gọi là **tích phân bội hai** của f trên miền chữ nhật R.

Định nghĩa 12.1.1. Cho hàm hai biến $f(x, y)$ xác định trên một miền chữ nhật đóng, bị chặn R trong mặt phẳng $0xy$ thì **tích phân bội hai** của hàm f trên miền R được định nghĩa và ký hiệu bởi

$$I = \iint\limits_R f(x, y)\, dA = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{N} f\left(x_k^*, y_k^*\right) \Delta A_k$$

nếu giới hạn này tồn tại.

Trong trường hợp tích phân bội hai tồn tại, f được gọi là **khả tích** trên R.

Chú ý 12.1.2. Ta có thể chỉ ra rằng nếu $f(x, y)$ liên tục trên miền chữ nhật R thì nó khả tích trên R.

12.1.3 Các tính chất của tích phân bội hai

Tích phân bội hai có nhiều tính chất tương tự như tích phân xác định.

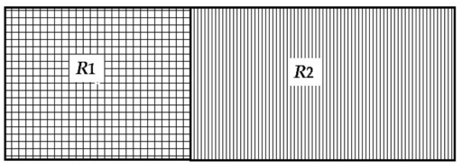
Giả sử rằng tất cả các tích phân trong các tính chất được nêu ra đều tồn tại trên miền chữ nhật R.

1)
$$\iint\limits_R [a\,f(x,y) + bg(x,y)]\,dA = a\iint\limits_R f(x,y)\,dA + b\iint\limits_R g(x,y)\,dA$$

với a và b là hằng số.

2) Nếu $f(x,y) \geq g(x,y)$ trên một miền chữ nhật R thì
$$\iint\limits_R f(x,y)\,dA \geq \iint\limits_R g(x,y)\,dA$$
.

3) Nếu miền lấy tích phân là miền chữ nhật R được chia làm hai hình chữ nhật con R_1 và R_2 thì
$$\iint\limits_R f(x,y)\,dA = \iint\limits_{R_1} f(x,y)\,dA + \iint\limits_{R_2} f(x,y)\,dA$$
.

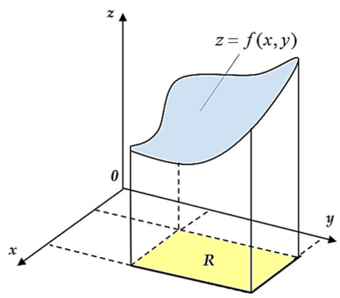


Hình 12.2: Miền chữ nhật R được chia thành R_1 và R_2

12.1.4 Ý nghĩa thể tích

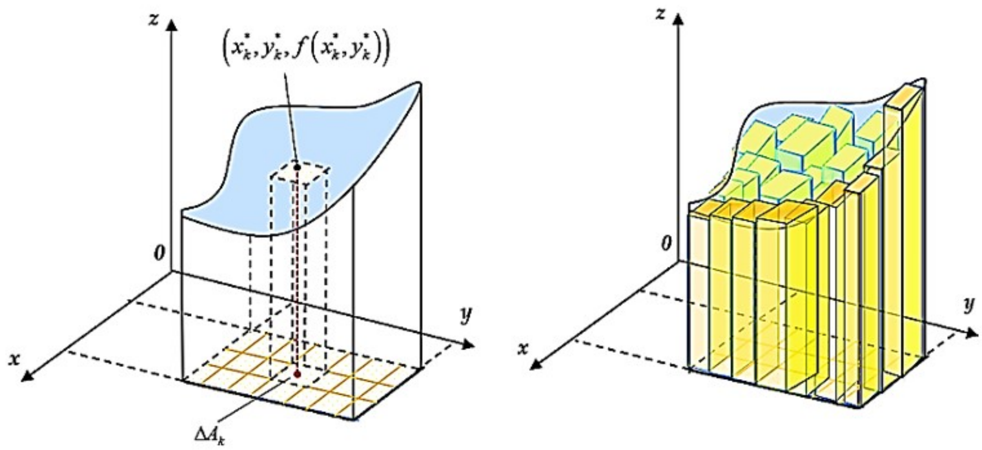
Nếu $g(x) \geq 0$ trên đoạn $[a,b]$, tích phân xác định $\int\limits_a^b g(x)\,dx$ được hiểu là diện tích hình thang cong bên dưới đường cong $y = g(x)$ trên đoạn $[a,b]$.

Tích phân bội hai $\iint\limits_R f(x,y)\,dA$ có thể được hiểu là thể tích hình trụ cong bên dưới mặt $z = f(x,y) \geq 0$ trên miền hình chữ nhật R (như hình 12.3)



Hình 12.3: Hình trụ cong bên dưới mặt $z = f(x,y)$ trên miền hình chữ nhật R

Để thấy điều này, chú ý rằng nếu $f(x,y) \geq 0$
trên miền chữ nhật R và ta phân hoạch R thì
tích $f(x_k^*, y_k^*)\,\Delta A_k$ là thể tích của một hình hộp chữ nhật $f(x_k^*, y_k^*)$ và diện tích đáy ΔA_k, như biểu diễn trong hình 12.4.



Hình 12.4: Thể tích hình trụ cong được xấp xỉ bởi các hình hộp chữ nhật

Như vậy, tổng Riemann
$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*, y_k^*)\,\Delta A_k$$
là tổng của các hình hộp chữ nhật giới hạn trên bởi mặt cong $z = f(x,y)$ trên miền R.
Nếu f liên tục, ta mong đợi sự xấp xỉ được cải thiện bởi việc sử dụng các phân hoạch tốt hơn (nghĩa là, miền chữ nhật được chia thành nhiều hình chữ nhật con hơn sao cho chuẩn nhỏ hơn). Khi đó thể tích của hình trụ cong cần xấp xỉ tổng thể tích của các hình chữ nhật được tạo thành.

Thể tích của hình trụ cong bên dưới mặt $z = f(x,y)$ trên miền R được cho bởi
$$V = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{N} f(x_k^*, y_k^*)\,\Delta A_k = \iint_R f(x,y)\,dA$$
Sự xấp xỉ bởi tổng Riemann được minh họa trong Hình 12.4.

Ví dụ 12.1.1. Tính một tích phân bội hai bằng cách liên hệ với thể tích khối đặc

Tính tích phân bội hai $\iint_R (4-2y)\,dA$, trong đó R là một hình chữ nhật trong mặt phẳng Oxy với các đỉnh $O(0,0), A(3,0), B(3,2)$ và $C(0,2)$.

Giải. Vì $z = 4 - 2y$ thỏa mãn $z \geq 0$ với mọi điểm trong R, giá trị của tích phân bội hai bằng với thể tích của khối đặc bị chặn trên bởi mặt phẳng $z = 4 - 2y$ và bị chặn dưới bởi hình chữ nhật R.

Khối đặc là một lăng trụ có đáy là ΔOCP và đường cao là OA. Khối đặc được biểu diễn trong hình 12.5.

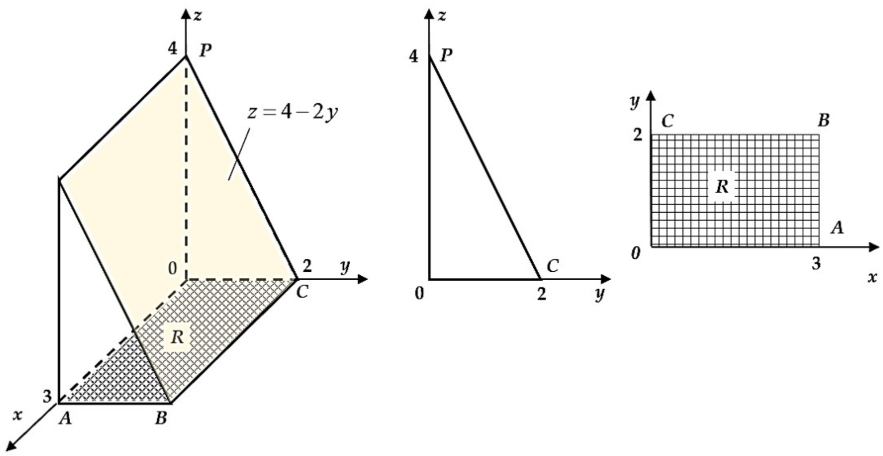
Thể tích của khối lăng trụ là

$$V = S_{\Delta OCP} \times h = \frac{1}{2} OC \times OP \times h = \frac{1}{2} \times 2 \times 4 \times 3 = 12$$

Do đó, giá trị của tích phân cũng là 12; có nghĩa là

$$\iint_R (4 - 2y)\, dA = 12$$

□



Hình 12.5: Tính tích phân bội hai $\iint_R (4 - 2y)\, dA = 12$ bằng thể tích

12.1.5 Tích phân lặp

Để tính tích phân xác định, ta ít sử dụng trực tiếp định nghĩa mà thường sử dụng các phương pháp tính tích phân trong chương 7. Tương tự như vậy, để tính tích phân bội hai ta ít khi sử dụng trực tiếp định nghĩa để tính, thậm chí trên một miền chữ nhật đơn giản. Thay vào đó, ta sẽ tính các tích phân bội hai bằng một quá trình gọi là **lấy tích phân lặp**. Quá trình này giống như đảo ngược lại quá trình lấy đạo hàm riêng.

Định lí sau đây sẽ cho thấy tích phân bội hai $\iint\limits_R f(x,y)\,dA$ có thể được tính theo các tích phân lặp như thế nào, và được chứng minh bởi nhà toán học người Italia Guido Fubini (1879-1943) vào năm 1907.

Định lý 12.1.3. ***Định lý Fubini trên một miền chữ nhật***

Nếu $f(x,y)$ liên tục trên hình chữ nhật $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \le x \le b,\ c \le y \le d\}$ thì tích phân bội hai

$$\iint\limits_R f(x,y)\,dA$$

có thể được tính bởi một trong hai tích phân lặp sau

$$\iint\limits_R f(x,y)dA = \int\limits_c^d \left[\int\limits_a^b f(x,y)dx\right] dy = \int\limits_a^b \left[\int\limits_c^d f(x,y)dy\right] dx$$

Ta có thể viết

$$\iint\limits_R f(x,y)\,dA = \int\limits_c^d \int\limits_a^b f(x,y)\,dxdy = \int\limits_a^b \int\limits_c^d f(x,y)\,dydx$$

.

Chú ý 12.1.4. Giả sử $f(x,y)$ liên tục trên hình chữ nhật $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \le x \le b,\ c \le y \le d\}$

Khi đó, ta viết $\int\limits_c^d f(x,y)\,dy$ để kí hiệu tích phân thu được bởi việc lấy tích phân $f(x,y)$ theo y trên đoạn $[c,d]$ với x giữ cố định. Tích phân thu được bởi việc lấy tích phân riêng này là một hàm theo x, nghĩa là

$$G(x) = \int\limits_c^d f(x,y)\,dy$$

Ta lấy tích phân xác định của hàm $G(x)$ theo biến x trên đoạn $[a,b]$ để được tích phân lặp

$$\int\limits_a^b G(x)\,dx = \int\limits_a^b \left[\int\limits_c^d f(x,y)\,dy\right] dx$$

Một cách tương tự, nếu trước tiên ta lấy tích phân $f(x,y)$ theo x trên $[a,b]$ mà giữ y cố định, và sau đó lấy tích phân theo y trên $[c,d]$, ta được tích phân lặp

$$\int\limits_a^b G(x)\,dx = \int\limits_c^d \left[\int\limits_a^b f(x,y)\,dx\right] dy$$

Ví dụ 12.1.2. Sử dụng định lý Fubini để tính tích phân bội hai
Sử dụng định lý Fubini, hãy tính tích phân bội hai $\iint\limits_R (4-2y)\,dA$, trong đó R là một hình chữ nhật trong mặt phẳng Oxy với các đỉnh $O(0,0), A(3,0), B(3,2)$ và $C(0,2)$.

Giải. Miền lấy tích phân là miền chữ nhật $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 3,\ 0 \le y \le 2\}$ (xem lại hình 12.5).
Do vậy ta sử dụng định lý Fubini bằng cách lấy tích phân lặp để tính tích phân.

$$\begin{aligned}\iint\limits_R (4-2y)\,dA &= \int_0^3 \left[\int_0^2 (4-2y)\,dy\right] dx \\ &= \int_0^3 \left[\left(4y-y^2\right)\Big|_0^2\right] dx \\ &= \int_0^3 (8-4-0)dx \\ &= \int_0^3 4dx = 4\,[x]\big|_0^3 = 12\end{aligned}$$

Kết quả này giống với kết quả đạt được trong ví dụ 12.1.1. □

Ví dụ 12.1.3. Sử dụng tích phân lặp để tính tích phân bội hai
Tính tích phân bội hai $\iint\limits_R \left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)dA$ trên miền chữ nhật

$$R = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x \le 2,\ 1 \le y \le e\right\}$$

a. Lấy tích phân theo y trước

b. Lấy tích phân theo x trước

Giải. a. Lấy tích phân theo y trước. Ta có

$$\begin{aligned}\iint\limits_R \left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)dA &= \int_1^2 \left[\int_1^e \left(\frac{x}{y}+\frac{2y}{x}\right) dy\right] dx \text{ (Lấy tích phân theo biến } y\text{, cố định } x\text{)} \\ &= \int_1^2 \left(x\ln y + \frac{y^2}{x}\right)\Bigg|_1^e dx\end{aligned}$$

$$\int_1^2 \left(x\ln y + \frac{y^2}{x}\right)\Bigg|_1^e dx = \int_1^2 \left(x\ln e + \frac{e^2}{x} - x\ln 1 - \frac{1}{x}\right)dx$$

$$= \int_1^2 \left(x + \frac{e^2}{x} - \frac{1}{x}\right)dx \text{ (Ta được tích phân xác định theo biến } x\text{)}$$

$$= \left(\frac{x^2}{2} + \left(e^2-1\right)\ln x\right)\Bigg|_1^2$$

$$= 2 + \left(e^2-1\right)\ln 2 - \frac{1}{2} - \left(e^2-1\right)\ln 1$$

$$= \frac{3}{2} + \left(e^2-1\right)\ln 2$$

b. Lấy tích phân theo x trước

$$\iint_R \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)dA = \int_1^e \left[\int_1^2 \left(\frac{x}{y} + \frac{2y}{x}\right)dx\right]dy \text{ (Lấy tích phân theo biến } x\text{, cố định } y\text{)}$$

$$= \int_1^e \left(\frac{x^2}{2y} + 2y\,\mathrm{lnx}\right)\Bigg|_1^2 dy$$

$$= \int_1^e \left(\frac{4}{2y} + 2y\ln 2 - \frac{1}{2y} - 2y\ln 1\right)dy$$

$$= \int_1^e \left(\frac{3}{2y} + 2y\ln 2\right)dy \text{ (Ta được tích phân xác định theo biến } y\text{)}$$

$$= \left(\frac{3}{2}\ln y - y^2\ln 2\right)\Bigg|_1^e$$

$$= \frac{3}{2} + \left(e^2-1\right)\ln 2$$

$\square$

Chú ý 12.1.5. Trong trường hợp $f(x,y) = g(x)\,h(y)$, và miền lấy tích phân là miền chữ nhật hình chữ nhật $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \le x \le b,\ c \le y \le d\}$, định lí Fubini cho phép tích phân được viết dưới dạng

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dydx = \int_a^b g(x)\,dx \int_c^d h(y)\,dy.$$

Chú ý rằng điều này chỉ đúng cho phép nhân.
Nếu $f(x,y) = g(x) + h(y)$ thì không có kết luận như vậy.

Chứng minh. Dễ thấy, xét trường hợp $f(x,y) = g(x)\,h(y)$.
Khi đó

$$\iint\limits_R f(x,y)\,dA = \int\limits_a^b \int\limits_c^d f(x,y)\,dydx = \int\limits_a^b \left[\int\limits_c^d g(x)\,h(y)\,dy\right] dx$$

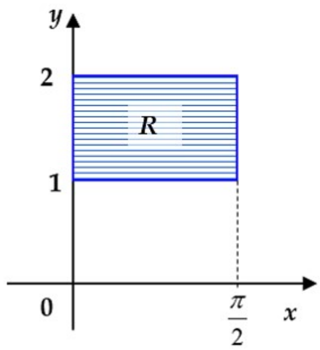
.
Trong tích phân phía trong ngoặc, x là hằng số, nên $g(x)$ là hằng số và ta có thể viết

$$\int\limits_a^b \left[\int\limits_c^d g(x)\,h(y)\,dy\right] dx = \int\limits_a^b g(x)\left[\int\limits_c^d h(y)\,dy\right] dx = \int\limits_a^b g(x)\,dx \int\limits_c^d h(y)\,dy$$

vì $\int\limits_c^d h(y)\,dy$ là hằng số.

Ví dụ 12.1.4. Tính tích phân bội hai

$$I = \int_0^{\pi/2} \int_1^2 y \sin x \; dy \; dx$$



Giải. Ta có miền lấy tích phân R là hình chữ nhật $R = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le \frac{\pi}{2},\ 1 \le y \le 2\right\}$
Ta có

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \int_1^2 y \sin x \; dy \; dx &= \left(\int_0^{\pi/2} \sin x \; dx\right) . \left(\int_1^2 y \; dy\right) \\ &= \left(-\cos x\Big|_0^{\pi/2}\right) \left(\frac{y^2}{2}\Bigg|_1^2\right) \\ &= -(0-1)\left(2-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}\end{aligned}$$

□

Chú ý 12.1.6. **Định lý Fubini-Tonelli trên một miền chữ nhật**
Xét hình chữ nhật $R : a \le x \le b,\ c \le y \le d$ và một hàm $f(x, y)$ bị chặn và liên tục trên hình chữ nhật R ngoại trừ trên một tập con S có diện tích zero của R, sao cho tích phân $\iint\limits_R f(x, y)\, dA$ tồn tại.Giả sử thêm rằng với mỗi giá trị x sao cho $a \le x \le b$, tập con S chỉ chứa hữu hạn (có thể không chứa) các điểm với tọa độ đầu là x.
Khi đó, tích phân lặp cũng tồn tại và

$$\iint\limits_R f(x, y)\, dA = \int\limits_a^b \int\limits_c^d f(x, y)\, dydx$$

Ví dụ 12.1.5.: $R : 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1$ và $f(x, y) = \sqrt{\frac{x}{y}}$.

Giải. Dù hàm dưới dấu tích phân không liên tục và không bị chặn tại tất cả các điểm có tọa độ $y = 0$, có thể chứng minh rằng tích phân bội hai tồn tại trên miền R và có thể được tính bởi việc dùng các tích phân lặp (chú ý rằng một trong hai tích phân đơn là suy rộng).Ta tính tích phân

$$\int_0^1 \int_0^1 \sqrt{\frac{x}{y}}\, dx\ dy = \int_0^1 \sqrt{x} dx\ \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{y}} = \left(\frac{2}{3}\, x^{3/2}\Big|_0^1\right) \cdot \left(2\, y^{1/2}\Big|_0^1\right) = \frac{4}{3}$$

□

12.1.6 Một lập luận không chính thức cho Định lý Fubini

Ta có thể làm định lí Fubini chấp nhận được với một lập luận hình học trong trường hợp $f(x, y) \ge 0$ trên R.

Nếu $\iint\limits_R f(x, y)\, dA$ được định nghĩa trên một hình chữ nhật R
với $R : a \le x \le b,\ c \le y \le d$.

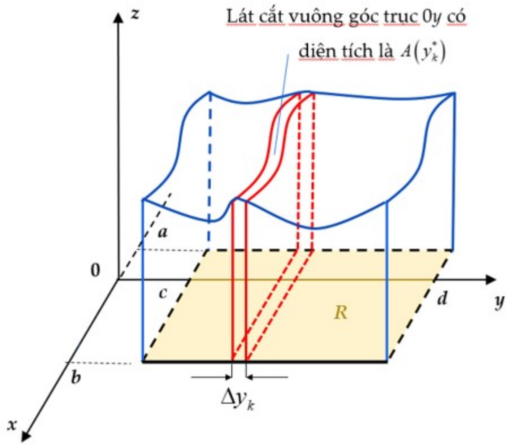
Khi đó tích phân bội hai $\iint\limits_R f(x, y)\, dA$ biểu diễn thể tích của khối D bị chặn trên bởi mặt $z = f(x, y)$ và bị chặn dưới bởi hình chữ nhật R.
Nếu $A(y_k^*)$ là diện tích thiết diện vuông góc với trục Oy tại điểm y_k^* thì $A(y_k^*)\, \Delta y_k$ biểu diễn thể tích của một lát cắt xấp xỉ thể tích của một phần của khối D, như trong Hình 12.6.

Ta được thể tích V của cả khối D là

$$\iint_R f(x,y)\,dA = V = \lim_{\|P\|\to 0}\sum_{k=1}^{N} A(y_k^*)\,\Delta y_k$$

Giới hạn ở vế phải chính là tích phân của $A(y)$ trên khoảng $c \le y \le d$, trong đó $A(y)$ là diện tích của lát cắt vuông góc với trục $0y$ với y cố định.
Trong Chương 5, ta đã thấy rằng diện tích $A(y)$ có thể được tính bởi tích phân

$$A(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx$$



Hình 12.6: Thể tích sử dụng phương pháp lát cắt vuông góc trục 0y

Lấy tích phân theo x (y cố định)
Bây giờ ta có thể thay thế $A(y)$ bằng tích phân trên để được

$$\iint_R f(x,y)\,dA = V = \lim_{\|P\|\to 0}\sum_{k=1}^{N} A(y_k^*)\,\Delta y_k = \int_c^d A(y)\,dy = \int_c^d \underbrace{\left[\int_a^b f(x,y)\,dx\right]}_{A(y)} dy$$

Tương tự ta có thể chứng minh

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dydx$$

Vậy $\int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)\,dx\right] dy = \iint_R f(x,y)\,dA = V = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\,dy\right] dx.$

12.2 Tích phân bội hai trên miền phẳng tổng quát

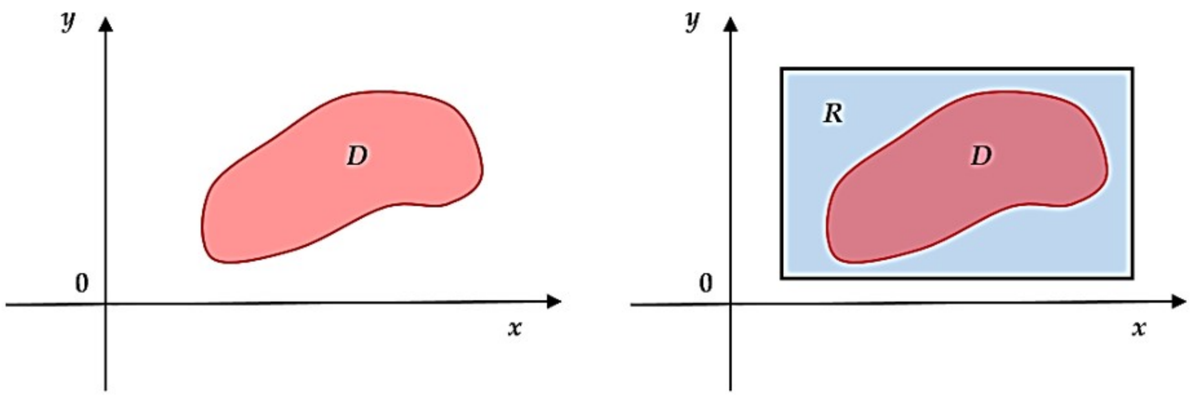
Cho $f(x,y)$ là một hàm liên tục trên miền D mà có thể bị chứa trong một hình chữ nhật R.
Định nghĩa hàm $F(x,y)$ trên R bằng $f(x,y)$ nếu (x,y) thuộc D và bằng 0 nếu (x,y) không thuộc D.Nghĩa là

$$F(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & \text{nếu } (x,y) \in D \\ 0, & \text{nếu } (x,y) \notin D. \end{cases}$$

Khi đó, nếu F khả tích trên R thì ta nói rằng f **khả tích** trên D, và **tích phân bội hai** của f trên D được định nghĩa là

$$\iint\limits_{D} f(x,y)\,dA = \iint\limits_{R} F(x,y)\,dA$$

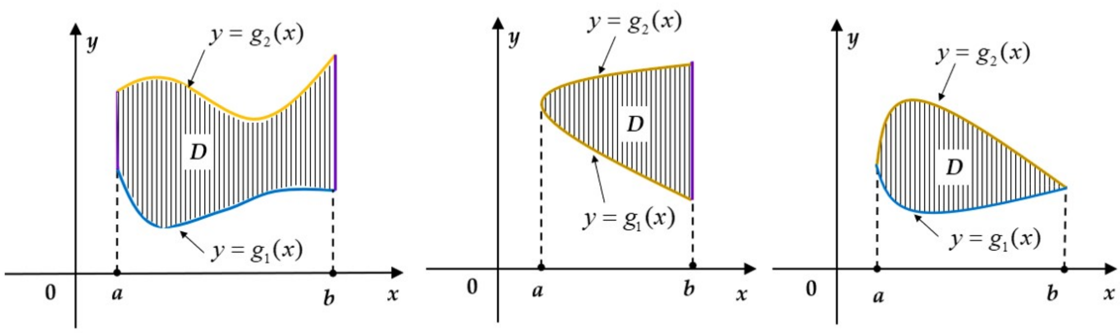
Dễ thấy $\iint\limits_{R} F(x,y)dA = \iint\limits_{D} f(x,y)dA + \iint\limits_{R\setminus D} 0dA = \iint\limits_{D} f(x,y)dA$



Hình 12.7: Miền D bị chặn bởi một hình chữ nhật R

12.2.1 Khái niệm miền loại I và loại II

1. Miền phẳng D là **miền loại I** , hay miền đơn theo chiều dọc trong mặt phẳng



Hình 12.8: Một số ví dụ cho miền phẳng D loại I

là một miền nằm giữa đồ thị của hai hàm liên tục theo x, và xác định bởi

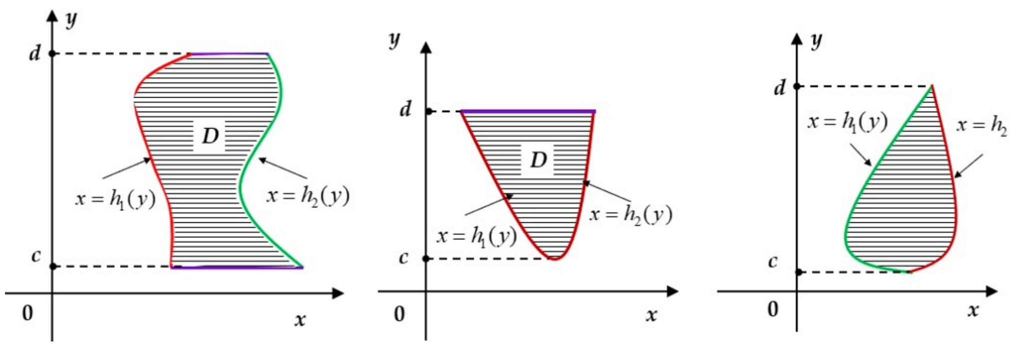
$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \le x \le b,\ g_1(x) \le y \le g_2(x)\}$$

trong đó $g_1(x)$ và $g_2(x)$ là các hàm liên tục của x trên $[a, b]$.

2. Một miền phẳng D là **miền loại II**, hay miền đơn theo chiều ngang trong mặt phẳng là một miền nằm giữa đồ thị của hai hàm liên tục theo y, và xác định bởi

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \le y \le d,\ h_1(y) \le x \le h_2(y)\}$$

trong đó $h_1(y)$ và $h_2(y)$ là các hàm liên tục của y trên $[c, d]$.



Hình 12.9: Một số ví dụ cho miền phẳng D loại II

12.2.2 Tích phân bội hai trên các miền loại I và loại II

Định lý 12.2.1. ***Định lý Fubini cho các miền loại I và miền loại II***

1. Nếu hàm $f(x, y)$ liên tục trên một miền D loại I là

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \le x \le b,\ g_1(x) \le y \le g_2(x)\}$$

thì

$$\iint\limits_D f(x, y)dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\ dy\ dx$$

2. Nếu hàm $f(x, y)$ liên tục trên một miền D loại II là

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \le y \le d,\ h_1(y) \le x \le h_2(y)\}$$

thì

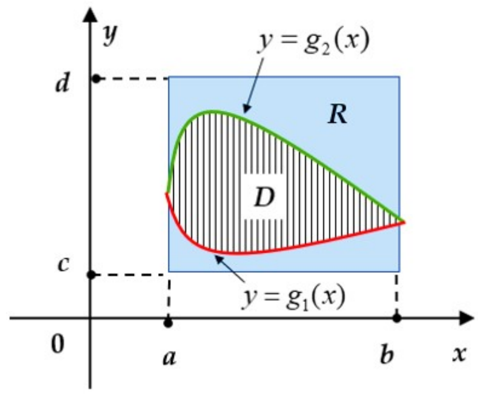
$$\iint\limits_D f(x,y)dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\ dx\ dy$$

Chứng minh

1) **Định lý Fubini cho miền loại I**

Trước tiên, để tính tích phân $\iint\limits_D f(x,y)dA$ với D là miền loại I, ta chọn hình chữ nhật $R = [a,b]\times[c,d]$ chứa miền D, như hình vẽ 12.10, và ta xét hàm

$$F(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & \text{nếu } (x,y)\in D \\ 0, & \text{nếu } (x,y)\notin D. \end{cases}$$



Hình 12.10: Miền lấy tích phân D là miền loại I

Khi đó

$$\iint\limits_D f(x,y)dA = \iint\limits_R F(x,y)dA$$

Mà miền chữ nhật $R=[a,b]\times[c,d]$, do vậy

$$\iint\limits_R F(x,y)\,dA = \int\limits_a^b \int\limits_c^d F(x,y)\,dydx$$

Ta lại có $F(x,y)=0$ nếu $y<g_1(x)$ hoặc $y>g_2(x)$ vì (x,y) nằm ngoài miền D. Do đó

$$\int\limits_c^d F(x,y)dy = \int\limits_c^{g_1(x)} F(x,y)dy + \int\limits_{g_1(x)}^{g_2(x)} F(x,y)dy + \int\limits_{g_2(x)}^{d} F(x,y)dy = \int\limits_{g_1(x)}^{g_2(x)} F(x,y)dy$$

Mặt khác $F(x,y)=f(x,y)$ nếu $g_1(x)\le y\le g_2(x)$ cho nên

$$\int\limits_c^d F(x,y)dy = \int\limits_{g_1(x)}^{g_2(x)} F(x,y)dy = \int\limits_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dy$$

Vậy

$$\iint\limits_D F(x,y)\,dA = \iint\limits_R F(x,y)\,dA = \int\limits_a^b \int\limits_c^d F(x,y)dy\ dx$$
$$= \int\limits_a^b \int\limits_{g_1(x)}^{g_2(x)} F(x,y)dy\ dx = \int\limits_a^b \int\limits_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dy\ dx$$

2) **Định lý Fubini cho miền loại II** được chứng minh tương tự

Ví dụ 12.2.1. Tính tích phân bội hai trên miền không là hình chữ nhật

Tính tích phân bội hai

$$\iint\limits_D 40x^2ydA$$

trong đó miền D giới hạn bởi đường các đường $y = x^2$ và $y = \sqrt{x}$

Giải. Trước hết ta tìm giao điểm của các đường

$y = x^2$ và $y = \sqrt{x}$

Phương trình hoành độ giao điểm

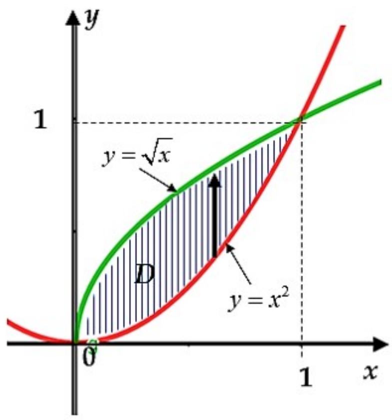
$$x^2 = \sqrt{x} \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1$$

Dựa và hình vẽ 12.11 ta có miền D là miền loại I

Miền $D : 0 \le x \le 1,\ x^2 \le y \le \sqrt{x}$

Do vậy ta có tích phân

$$K = \int\limits_0^1 \int\limits_{x^2}^{\sqrt{x}} 20x^2y^2dydx$$



Hình 12.11: Hình minh họa cho ví dụ 12.2.1

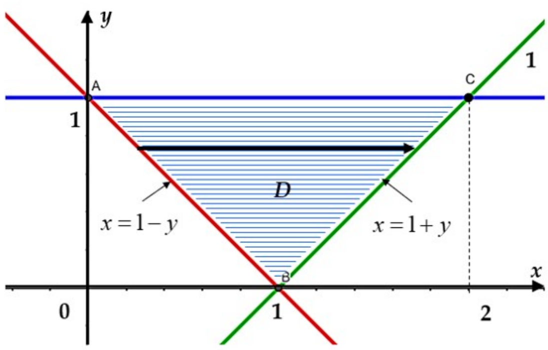
Để tích tích phân này, ta tính tích phân theo biến y trước và cố định biến x (coi x là hằng số). Sau đó thay cận vào cho y ta sẽ thu được tích phân xác định theo x, cụ thể là

$$K = \int_0^1 \left[20\, x^2 y^2 \Big|_{y=x^2}^{y=\sqrt{x}} \right] dx = \int_0^1 20x^2 \left[\left(\sqrt{x}\right)^2 - \left(x^2\right)^2 \right] dx$$
$$= \int_0^1 20x^2 \left[x - x^4 \right] dx$$
$$= \int_0^1 20 \left[x^3 - x^6 \right] dx$$
$$= 20 \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^7}{7} \right]_0^1 = \frac{3}{35}.$$

□

Ví dụ 12.2.2.Tính tích phân bội hai $M = \iint\limits_D (2x - 3y)\, dA$ trong đó D là hình tam giác có các đỉnh lần lượt là $A(0,1), B(1,0), C(2,1)$

Giải. Ta vẽ hình miền D
Ta có phương trình các đường thẳng lần lượt là
* Phương trình đường thẳng $AB : x + y = 1 \Leftrightarrow x = 1 - y$
* Phương trình đường thẳng $BC : x - y = 1 \Leftrightarrow x = 1 + y$
* Phương trình đường thẳng $AC : y = 1$
Dựa vào hình vẽ ta có thể xem miền D là miền loại II.



Hình 12.12: Miền lấy tích phân là hình tam giác

$$\text{Miền } D: \quad 0 \le y \le 1, \quad 1 - y \le x \le 1 + y$$

Khi đó tích phân

$$
\begin{aligned}
M &= \int_0^1 \int_{x=1-y}^{x=1+y} (2x-3y)\,dA \\
&= \int_0^1 \int_{1-y}^{1+y} (2x-3y)\,dx\,dy \\
&= \int\limits_0^1 \left[\left(x^2 - 3y\,x \right)\Big|_{1-y}^{1+y} \right] dy \\
&= \int\limits_0^1 \left[(1+y)^2 - 3y\,(1+y) - (1-y)^2 + 3y\,(1-y) \right] dy \\
&= \int\limits_0^1 \left[4y - 6y^2 \right] dy = 0
\end{aligned}
$$

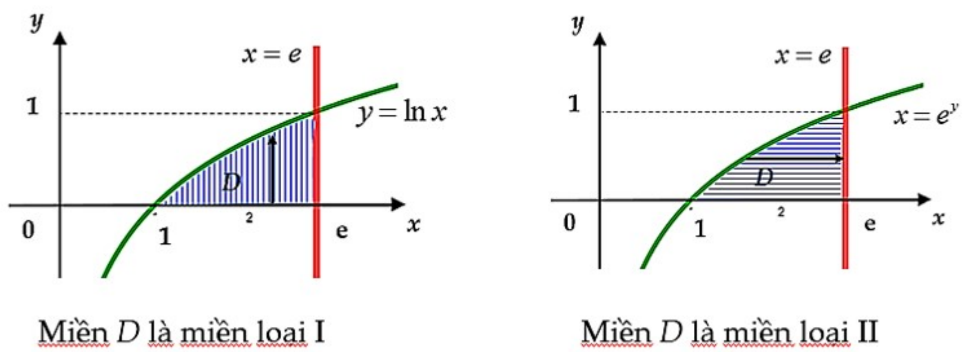
□

Ví dụ 12.2.3. Vẽ hình miền lấy tích phân và tính tích phân bội hai

$$I = \int_1^e \int_0^{\ln x} xy\,dy\,dx$$

Giải. Ta có, miền lấy tích phân là miền loại I

$$D : \begin{cases} 1 \le x \le e \\ 0 \le y \le ln(x) \end{cases} .$$



Hình 12.13: Miền D có thể xem là miền loại I hoặc miền loại II

Xem miền D là miền loại I, tính tích phân I ta được

$$\begin{aligned} I &= \int_1^e \int_0^{\ln x} xy\ dy\ dx \\ &= \int_1^e \left(\frac{1}{2} x\ y^2 \Big|_0^{\ln x} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_1^e \left(x \ln^2 x \right) dx \\ &= \frac{1}{4} \left[x^2 \ln^2 x - x^2 \ln x + \frac{1}{2} x^2 \right] \Big|_1^e \\ &= \frac{1}{8} \left(e^2 - 1 \right) \end{aligned}$$

□

Nhận xét 12.2.2. Ta có thể đổi thứ tự lấy tích phân để tính tích phân

$$I = \int_1^e \int_0^{\ln x} xy\ dy\ dx$$

Trong hình vẽ 12.13 ta thấy miền D có thể xem là miền loại I hoặc miền loại II. Khi chuyển sang miền loại II để lấy tích phân, ta cần biến đổi phương trình

$$y = lnx \quad \text{thành} \quad x = e^y.$$

Đổi thứ tự lấy tích phân ta được

$$I = \int_0^1 \int_{e^y}^e xy\ dx\ dy$$

12.2.3 Các tính chất của tích phân bội hai trên miền phẳng tổng quát

Tích phân bội hai có nhiều tính chất tương tự như tích phân xác định.
Giả sử rằng tất cả các tích phân trong các tính chất được nêu ra đều tồn tại trên miền phẳng D.

1.
$$\iint\limits_D \left[a\, f\left(x, y\right) + bg\left(x, y\right) \right] dA = a \iint\limits_D f\left(x, y\right) dA + b \iint\limits_D g\left(x, y\right) dA,$$

với a và b là hằng số.

2. Nếu $f\,(x,y) \geq g\,(x,y)$ trên một miền D thì

$$\iint\limits_{D} f\,(x,y)\,dA \geq \iint\limits_{D} g\,(x,y)\,dA$$

.

3. Nếu miền lấy tích phân D được chia làm D_1 và D_2 thì

$$\iint\limits_{D} f\,(x,y)\,dA = \iint\limits_{D_1} f\,(x,y)\,dA + \iint\limits_{D_2} f\,(x,y)\,dA$$

.

4. Công thức tính diện tích của miền phẳng D là

$$S(D) = \iint\limits_{D} 1.dA = \iint\limits_{D} dA$$

5. Nếu $m \leq f(x,y) \leq M, \quad \forall\,(x,y) \in D$ thì

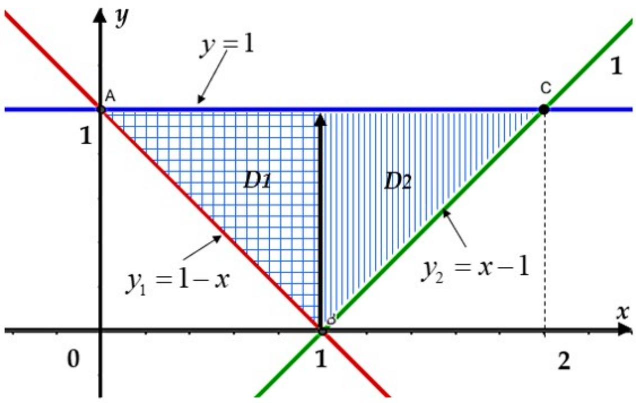
$$m.S(D) \leq \iint\limits_{D} f(x,y)dA \leq M.S(D)$$

trong đó $S(D)$ là diện tích của miền phẳng D

Ví dụ 12.2.4. Đổi thứ tự lấy tích phân trong tích phân sau

$$N = \int_0^1 \int_{1-y}^{1+y} f(x,y)dx\;dy$$

Giải. Ta có miền lấy tích phân $D: \quad 0 \leq y \leq 1, \quad 1-y \leq x \leq 1+y$
Do vậy ta sẽ vẽ hai đường thẳng $x = 1-y$ và đường $x = 1+y$, và chọn miền thỏa $0 \leq y \leq 1$.
Ta nhận thấy miền D chính là ΔABC trong ví dụ 12.2.2, miền D được chia làm hai miền đơn loại I (xem hình 12.14)
Biến đổi các phương trình $x = 1-y \Leftrightarrow y = 1-x$ và $x = 1+y \Leftrightarrow y = x-1$
Ta có miền $D_1 : 0 \leq x \leq 1, \quad 1-x \leq y \leq 1$



Hình 12.14: Miền phẳng D chia làm 2 miền loại I

và $D_2 : 1 \leq x \leq 2, \quad 1 \leq y \leq x - 1$

Đổi thứ tự lấy tích phân ta được

$$N = \iint\limits_D f(x,y)dA = \iint\limits_{D_1} f(x,y)dA + \iint\limits_{D_2} f(x,y)dA$$

$$N = \int_0^1 \int_{1-x}^1 f(x,y)dA + \int_1^2 \int_1^{x-1} f(x,y)dA$$

□

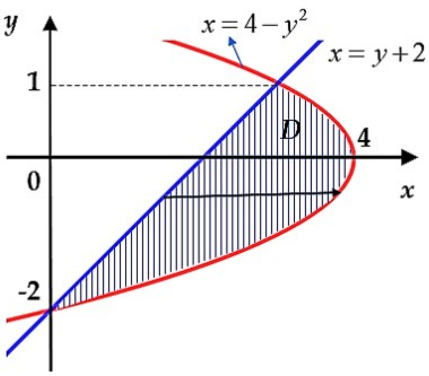
Ví dụ 12.2.5. Tính tích phân bội hai sau $\iint\limits_D (2x - y)\, dA$, trong đó miền D là miền giới hạn bởi đường parabol $x = 4 - y^2$ và đường thẳng $x = y + 2$.

Giải. 1. Phương trình tung độ giao điểm của hai đường $x = 4 - y^2$ và $x = y + 2$ là

$$y + 2 = 4 - y^2 \leftrightarrow y = -2 \vee y = 1$$

Ta có thể xem miền lấy tích phân D là miền loại II, xác định bởi

$$D : \begin{cases} 4 - y^2 \leq x \leq y + 2 \\ -2 \leq y \leq 1 \end{cases}.$$



Hình 12.15: Hình cho ví dụ 12.2.5

Khi đó ta có

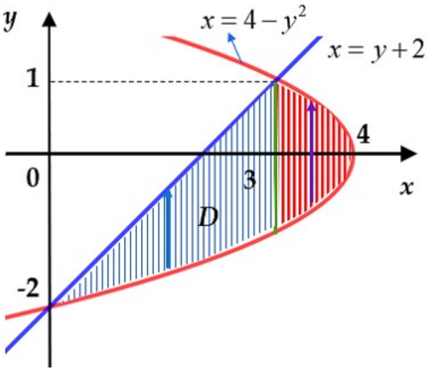
$$\begin{aligned} N &= \iint\limits_D (2x-y)\,dA \\ &= \int_{-2}^{1}\int_{y+2}^{4-y^2} (2x-y)\,dx\,dy \\ &= \int_{-2}^{1} \left[x^2-xy\right]\Big|_{y+2}^{4-y^2} dx \\ &= \int_{-2}^{1} \left[\left(4-y^2\right)^2 - \left(4-y^2\right)y - (y+2)^2 + (y+2)\,y\right] dy \\ &= \frac{477}{20} \end{aligned}$$

□

Nhận xét 12.2.3. Ta có thể đổi thứ tự lấy tích phân trong ví dụ trên. Khi đó miền D chia làm hai miền loại I là D_1 và D_2 (xem hình 12.16) Đổi thứ tự lấy tích phân, ta được

$$N = \int_0^3 \int_{-\sqrt{4-x}}^{x-2} (2x-y)\,dy\,dx + \int_3^4 \int_{-\sqrt{4-x}}^{\sqrt{4-x}} (2x-y)\,dy\,dx$$

Tuy nhiên việc tính tích phân theo thứ tự $dy\,dx$ không thuận lợi bằng việc tính tích phân theo thứ tự $dx\,dy$.



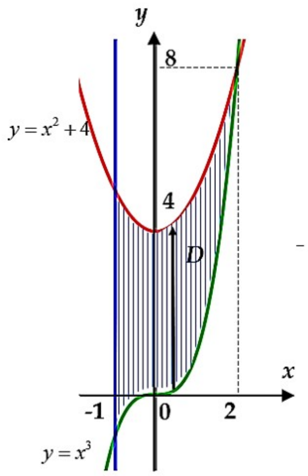
Hình 12.16: Miền lấy tích phân được xem là miền loại I

Ví dụ 12.2.6. Tính tích phân $K = \iint\limits_D (x-4)\,dydx$ trên hình phẳng

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \le x \le 2,\ x^3 \le y \le x^2+4\right\}$$

Giải. Ta chọn miền lấy tích phân D là miền loại I (xem hình 12.17)
Khi đó, tích phân cần tính

$$\begin{aligned} K &= \int_{-1}^{2}\int_{x^3}^{x^2+4} (x-4)\; dy\; dx \\ &= \int_{-1}^{2} (x-4).\left(y|_{x^3}^{x^2+4}\right) dx \\ &= \int_{-1}^{2} (x-4)\left(x^2+4-x^3\right) dx \\ &= -\frac{837}{20} \end{aligned}$$



Hình 12.17:

□

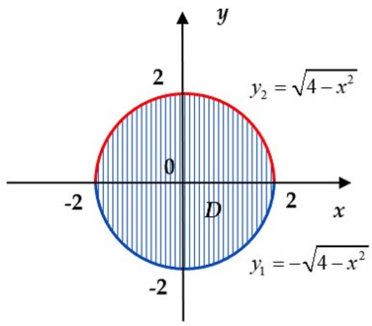
12.3 Tích phân bội hai trong hệ tọa độ cực

Tọa độ cực được dùng trong tích phân bội hai chủ yếu khi hàm dưới dấu tích phân hoặc miền lấy tích phân hay cả hai có mô tả trong tọa độ cực tương đối đơn giản.
Thí dụ: Xác định cận lấy tích phân của tích phân sau trong hệ tọa độ Đề-các

$$M = \iint\limits_D \left(x^2+y^2+1\right) dA$$

trong đó D là hình tròn $x^2+y^2 \le 4$ trong mặt phẳng $0xy$ (Hình 12.18)

Hiểu D như một miền đơn theo chiều dọc (loại I), ta thấy rằng với mỗi x cố định giữa -2 và 2, y biến thiên từ nửa đường tròn bên dưới với phương trình $y = -\sqrt{4-x^2}$ đến nửa đường tròn trên với phương trình $y = \sqrt{4-x^2}$.



Hình 12.18: D là một đĩa tròn $x^2+y^2 \le 4$

Xác định cận lấy tích phân trong tọa độ Đề-các ta được

$$M = \iint\limits_D \left(x^2+y^2+1\right) dA = \int\limits_{-2}^{2}\int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \left(x^2+y^2+1\right) dydx$$

Việc tính tích phân lặp ở vế phải gặp khó khăn trong tọa độ Đề-các, nhưng cả hàm dưới dấu tích phân và miền lấy tích phân đều có thể được biểu diễn khá đơn giản trong tọa độ cực.

* Nhắc lại **công thức chuyển đổi sang tọa độ cực**:

Đặt

$$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$$

Khi đó

$$r = \sqrt{x^2+y^2}, \tan\theta = \frac{y}{x}$$

.

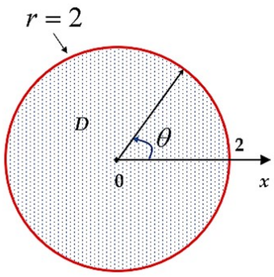
Ta thấy rằng:

\+ Hàm dưới dấu tích phân $f(x,y) = x^2 + y^2 + 1$ có thể được viết lại

$$f(r\cos\theta, r\sin\theta) = (r\cos\theta)^2 + (r\sin\theta)^2 + 1 = r^2 + 1$$

\+ Biên của miền lấy tích phân D là đường tròn $x^2+y^2 = 4$ biến đổi sang tọa độ cực là đường tròn $r = 2$.

Do đó, D có thể được mô tả như tập hợp tất cả các điểm (r,θ) sao cho với mỗi góc θ cố định giữa 0 và 2π, r biến thiên từ gốc $(r = 0)$ đến đường tròn $r = 2$, được chỉ ra trong Hình 12.19



Hình 12.19: Miền D có biên là đường tròn $r = 2$ trong tọa độ cực

Định lý 12.3.1. *Tích phân bội hai trong tọa độ cực*

Nếu f liên tục trong miền cực D^* xác định bởi

$$D^* = \{(r,\theta)\ | \alpha \le \theta \le \beta,\ 0 \le r_1(\theta) \le r \le r_2(\theta)\}$$

trong đó $0 \le \beta - \alpha \le 2\pi$ thì

$$\iint\limits_{D^*} f(r,\theta)\,dA = \int\limits_{\alpha}^{\beta}\int\limits_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r,\theta)\ r dr d\theta$$

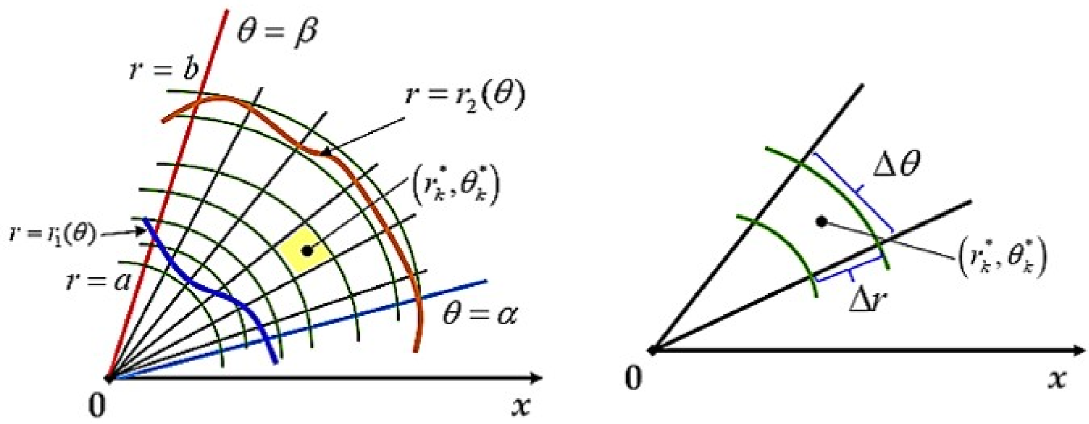
.

Chứng minh. Một miền lấy tích phân trong tọa độ cực được mô tả bởi

$$D^* = \{(r,\theta)|\alpha \le \theta \le \beta,\ 0 \le r_1(\theta) \le r \le r_2(\theta)\}$$

trong đó $0 \le \beta - \alpha \le 2\pi$ có thể được chia nhỏ thành các hình chữ nhật cực. Một hình chữ nhật cực điển hình được mô tả trong Hình 12.20.

Chúng ta bắt đầu bởi việc chia nhỏ miền lấy tích phân thành các hình chữ nhật



Hình 12.20: Miền lấy tích phân được chia thành các hình chữ nhật cực và hình chữ nhật cực điển hình

cực.

Tiếp theo, chúng ta lấy một điểm dạng cực (r_k^*, θ_k^*) bất kì trong mỗi hình chữ nhật cực thứ k trong phân hoạch.

Lập tổng Riemann

$$\sum_{k=1}^{N} f(r_k^*, \theta_k^*)\,\Delta A_k$$

trong đó ΔA_k là diện tích của hình chữ nhật cực thứ k.

Để tìm diện tích của một hình chữ nhật cực điển hình, đặt (r_k^*, θ_k^*) là tâm của hình chữ nhật cực đó – đó là, điểm chính giữa các cung và các tia tạo ra hình chữ nhật, như được biểu diễn trong Hình 12.20. Nếu các cung tròn giới hạn hình chữ nhật cực cách nhau khoảng cách Δr_k thì các cung được cho bởi công thức

$$r_1 = r_k^* - \frac{1}{2}\Delta r_k, \quad r_2 = r_k^* + \frac{1}{2}\Delta r_k$$

.
Ta biết rằng phần hình quạt với bán kính r và góc ở tâm θ có diện tích $\frac{1}{2}r^2\theta$.
Vậy, một tam giác đặc trưng có diện tích

$$\Delta A_k = \left[\frac{1}{2}\left(r_k^* + \frac{1}{2}\Delta r_k\right)^2 - \frac{1}{2}\left(r_k^* - \frac{1}{2}\Delta r_k\right)^2\right]\Delta\theta_k = r_k^* \,.\Delta r_k \,.\Delta\theta_k$$

Cuối cùng, ta tính tích phân bội hai trong dạng cực bằng việc lấy giới hạn

$$\begin{aligned}\iint\limits_{D^*} f(r,\theta)\, dA &= \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{N} f(r_k^*, \theta_k^*)\, \Delta A_k \\ &= \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{N} f(r_k^*, \theta_k^*)\ \ r_k^*\ \Delta r_k\ \Delta\theta_k \\ &= \int\limits_{\alpha}^{\beta} \int\limits_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r,\theta)\ \ r\ dr\ d\theta.\end{aligned}$$

□

Quá trình chuyển từ tích phân bội hai trong tọa độ Đề-các sang tọa độ cực

Để chuyển tích phân bội hai từ tọa độ Đề-các

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dA$$

sang tích phân bội hai trong tọa độ cực ta cần thực hiện các bước.
Bước 1: Đổi biến sang tọa độ cực

$$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$$

trong đó

$$r \ge 0,\ \ 0 \le \theta \le 2\pi \text{ hoặc} - \pi \le \theta \le \pi$$

và thay $dx\ dy = r\ drd\theta$
Bước 2: Chuyển miền lấy tích phân D trong tọa độ Đề-các sang dạng cực D^*
Xác định cận lấy tích phân trong tọa độ cực của miền D^* và theo định lý 12.3.1
Nếu

$$D^* = \{(r,\theta)|\alpha \le \theta \le \beta,\ \ 0 \le r_1(\theta) \le r \le r_2(\theta)\}$$

trong đó $0 \leq \beta - \alpha \leq 2\pi$ thì

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dA = \iint\limits_{D^*} f(r\cos\theta, r\sin\theta).\ r\ dr\ d\theta = \int\limits_{\alpha}^{\beta}\int\limits_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta).\ r\ dr\ d\theta$$

Ví dụ 12.3.1. Xác định cận lấy tích phân của tích phân sau trong hệ tọa độ Đề-các

$$M = \iint\limits_{D} \left(x^2 + y^2 + 1\right) dA$$

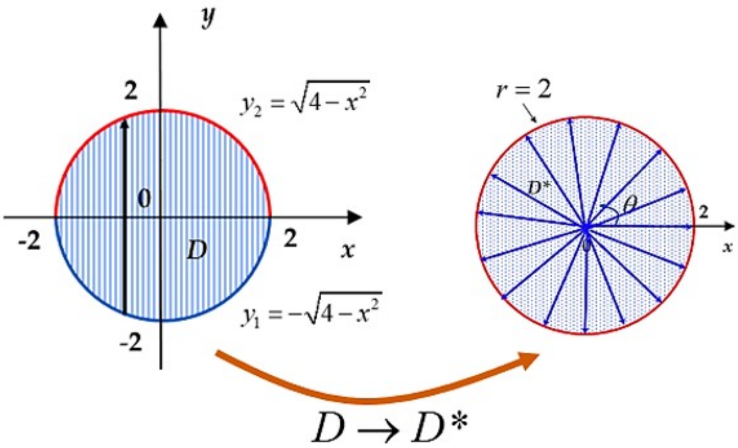
trong đó D là hình tròn $x^2 + y^2 \leq 4$ trong mặt phẳng $0xy$.

Giải. **Bước 1**: Đổi biến sang tọa độ cực

$$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$$

Bước 2: Biên của miền lấy tích phân D là đường tròn $x^2 + y^2 = 4$ biến đổi sang tọa độ cực là đường tròn $r = 2$.

Khi đó $D \to D^* : \begin{cases} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq r \leq 2 \end{cases}$. (Xem hình 12.21)



Hình 12.21: Miền D biến đổi thành D^*

Khi đó

$$\begin{aligned} M &= \iint\limits_D \left(x^2+y^2+1\right) dA = \int_0^{2\pi}\int_0^2 \left(1+r^2\right) r\ dr\ d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^2 \left(r+r^3\right) dr\ d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\frac{r^2}{2}+\frac{r^4}{4}\right)\Big|_0^2 d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} 6\ d\theta = 12\pi \end{aligned}$$

□

Ví dụ 12.3.2. Tính tích phân bội hai

$$Q = \iint\limits_D e^{x^2+y^2} dA$$

trong đó miền D giới hạn bởi hai đường tròn $x^2+y^2=1$ và $x^2+y^2=9$ nằm trong góc phần tư thứ nhất.

Giải. Đổi biến sang tọa độ cực

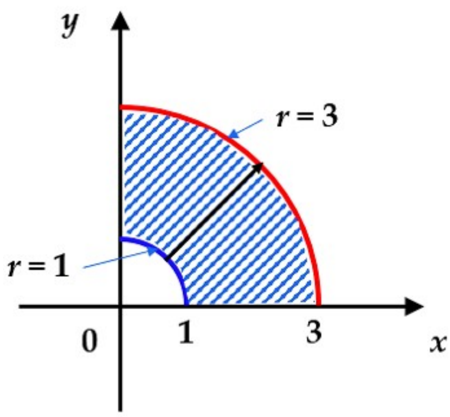
$$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$$

Ta có miền lấy tích phân

$$D \to D^* : \begin{cases} 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le r \le 2 \end{cases} .$$

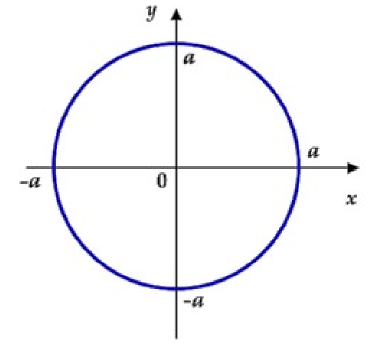
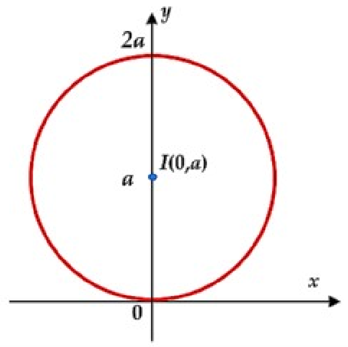
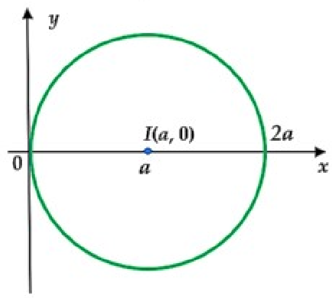
Xem hình 12.22 Khi đó

$$\begin{aligned} Q &= \iint\limits_D e^{x^2+y^2} dA \\ &= \int_0^{\pi/2}\int_1^3 e^{r^2} r\, dr\ d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{2}e^{r^2}\Big|_1^3\right) d\theta \\ &= \frac{1}{2}\left(e^9-e\right)\int_0^{\pi/2} d\theta \quad = \frac{\pi}{4}\left(e^9-e\right) \end{aligned}$$



Hình 12.22: Miền giới hạn bởi hai đường tròn $r=1$ và $r=3$ trong góc phần tư thứ nhất

□

Đường cong	Phương trình trong tọa độ Đề-các	Phương trình trong tọa độ cực	Hình vẽ
Đường tròn tâm 0(0,0), bán kính a>0	$x^2 + y^2 = a^2$	$r = a$	
Đường tròn tâm I(0,a), bán kính a>0	$x^2 + y^2 = 2ay$ $\Leftrightarrow x^2 + (y-a)^2 = a^2$	$r = 2a\sin\theta$	
Đường tròn tâm I(a,0), bán kính a>0	$x^2 + y^2 = 2ax$ $\Leftrightarrow (x-a)^2 + y^2 = a^2$	$r = 2a\cos\theta$	

Hình 12.23: Phụ lục một số đường tròn trong tọa độ cực

Ví dụ 12.3.3. Tính tích phân bội hai

$$\int_{-3}^{0}\int_{-\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{9-y^2}} \left(1 - y^2\right) dx\, dy$$

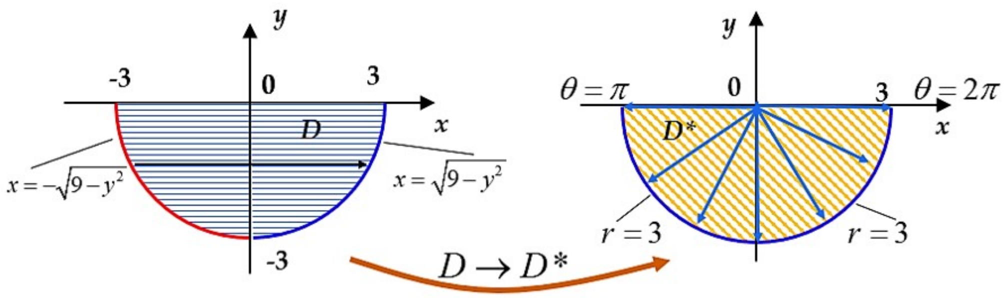
Giải. Ta có miền lấy tích phân $D : -3 \le y \le 0,\ -\sqrt{9-y^2} \le x \le \sqrt{9-y^2}$

Đường cong $x = \sqrt{9-y^2} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2+y^2 = 9 \end{cases}$

và $x = -\sqrt{9-y^2} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ x^2+y^2 = 9 \end{cases}$

Miền lấy tích phân D là nửa hình tròn như hình vẽ 12.24, do vậy ta thực hiện việc đổi biến sang tọa độ cực

$$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$$



Hình 12.24: Miền lấy tích phân trong ví dụ 12.3.3

Ta có miền lấy tích phân

$$D \to D^* : \begin{cases} \pi \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq r \leq 3 \end{cases} .$$

$$\begin{aligned}
\int_{-3}^{0}\int_{-\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{9-y^2}} \left(1-y^2\right) dx\ dy &= \int_{\pi}^{2\pi}\int_{0}^{3} \left(1-r^2\sin^2\theta\right).r\ dr\ d\theta \\
&= \int_{\pi}^{2\pi}\int_{0}^{3} r\ dr\ d\theta - \int_{\pi}^{2\pi}\int_{0}^{3} \left(r^2\sin^2\theta\right).r\ dr\ d\theta \\
&= \int_{\pi}^{2\pi} d\theta \int_{0}^{3} r dr - \int_{\pi}^{2\pi} \sin^2\theta d\theta \int_{0}^{3} r^3 dr \\
&= \frac{9\pi}{2} - \left[\frac{1-\cos 2\theta}{2}\right]\Bigg|_{\pi}^{2\pi} \cdot \frac{r^4}{4}\Bigg|_{0}^{3} \\
&= \frac{-45\pi}{8}
\end{aligned}$$

□

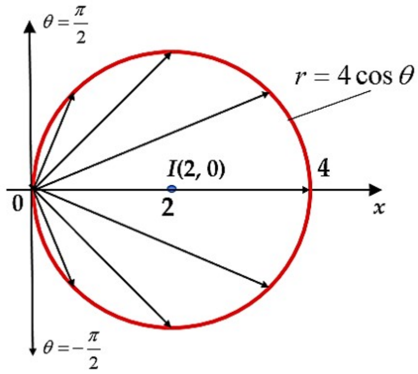
Nhận xét 12.3.2. Ta có thể tính tích phân trên với cận lấy tích phân như sau

$$\int_{-3}^{0}\int_{-\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{9-y^2}}\left(1-y^2\right)dx\,dy=\int_{-\pi}^{0}\int_{0}^{3}\left(1-r^2\sin^2\theta\right).r\,dr\,d\theta$$

Ví dụ 12.3.4. Tính tích phân bội hai $\iint\limits_D \sqrt{3x^2+3y^2}dA$ trong đó D là miền giới hạn bởi đường tròn $x^2+y^2=4x$.

Giải. Ta có đường tròn $x^2+y^2=4x$ hay $(x-2)^2+y^2=4$ là đường tròn tâm $I(2,0)$ và có bán kính $R=2$.
Phương trình đường tròn $x^2+y^2=4x$ trong tọa độ cực là $r=4cos\theta$
Đổi biến sang tọa độ cực

$$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$$



Hình 12.25: Đường tròn tâm $I(0,2)$, bán kính $R=2$

Ta có miền lấy tích phân

$$D\to D^*:\begin{cases}-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}\\ 0\le r\le 4\cos\theta\end{cases}.$$

Khi đó

$$\begin{aligned}&\iint\limits_D\sqrt{3x^2+3y^2}dA\\&=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{4\cos\theta}\sqrt{3r^2}.\ r\ dr\ d\theta\\&=\sqrt{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\frac{r^3}{3}\Big|_0^{4\cos\theta}\right)\ d\theta\\&=\frac{\sqrt{3}}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(64\cos^3\theta\right)\ d\theta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&=\frac{64\sqrt{3}}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\cos^2\theta\right)\ \cos\theta d\theta\\&=\frac{64\sqrt{3}}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(1-\sin^2\theta\right)d\left(\sin\theta\right)\\&=\frac{64\sqrt{3}}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(1-\sin^2\theta\right)d\left(\sin\theta\right)\\&=\frac{64\sqrt{3}}{3}\left[\sin\theta-\frac{\sin^3\theta}{3}\right]\Bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2}=\frac{256\sqrt{3}}{9}\end{aligned}$$

□

12.4 Một số ứng dụng của tích phân bội hai

12.4.1 Diện tích hình phẳng

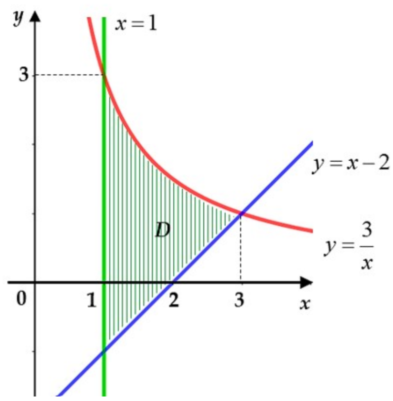
Diện tích của miền D trong mặt phẳng Oxy được cho bởi

$$S(D) = \iint\limits_D 1.dA = \iint\limits_D dA$$

.

Ví dụ 12.4.1. Tính diện tích của miền phẳng D là miền giới hạn bởi các đường $y = \dfrac{3}{x}$, $y = x - 2$ và $x = 1$.

Giải. Giao điểm của đường hyperbol $y = \dfrac{3}{x}$ và đường thẳng $y = x - 2$ là điểm $A(-1, -3)$ và điểm $B(3, 1)$.
Do vậy diện tích của miền phẳng D cần tìm là

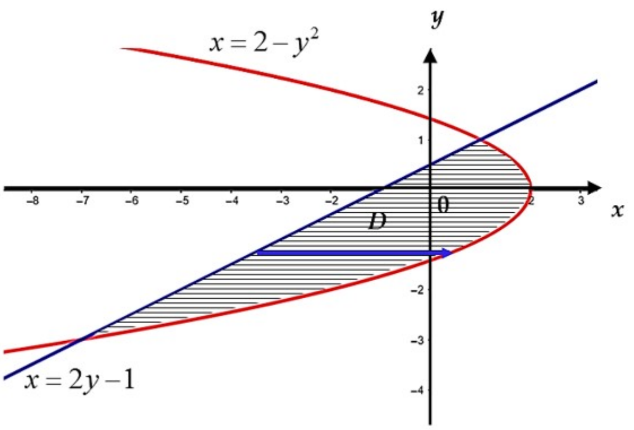


$$\begin{aligned} S(D) &= \iint\limits_D dA \\ &= \int_1^3 \int_{x-2}^{3/x} dy\, dx \\ &= \int_1^3 \left(y\Big|_{x-2}^{3/x} \right) dx \quad = \int_1^3 \left(\frac{3}{x} - x + 2 \right) dx = 3\ln 3 \end{aligned}$$

□

Ví dụ 12.4.2. Tính diện tích của miền phẳng D giới hạn bởi đường parabol $x = 2 - y^2$ và đường thẳng $x = 2y - 1$.

Giải. Giao điểm của hai đường $x = 2 - y^2$ và $x = 2y - 1$ là điểm $A(1, 1)$ và điểm $B(-7, -3)$.



Diện tích của miền phẳng D cần tìm là

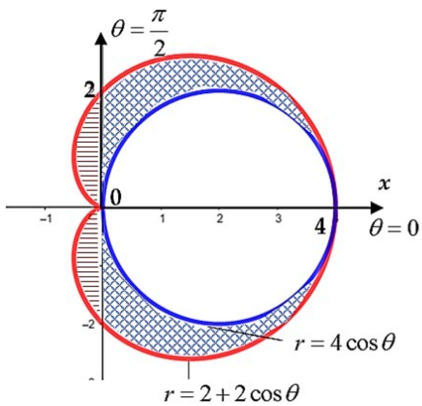
$$S(D) = \iint\limits_D dA = \int_{-3}^{1}\int_{2y-1}^{2-y^2} dx\, dy = \int_1^3 \left(2 - y^2 - 2y - 1\right) dy = \frac{32}{3}$$

□

Ví dụ 12.4.3. Tính diện tích của hình phẳng nằm bên trong đường $r = 2 + 2\cos\theta$ và bên ngoài đường tròn $r = 4\cos\theta$ cho trong tọa độ cực.

Giải. Hai đường $r = 2 + 2\cos\theta$ và $r = 4\cos\theta$ giao nhau khi

$$2 + 2\cos\theta = 4\cos\theta$$
$$\Leftrightarrow \cos\theta = 1 \qquad \Leftrightarrow \theta = 0$$



Ngoài ra gốc cực cũng là giao điểm của hai đường cong trên.
Diện tích của phần hình phẳng cần tìm là

$$S = 2S_1 + 2S_2 = 2\left(\iint\limits_{D_1} dA + \iint\limits_{D_2} dA\right)$$

Vậy

$$\begin{aligned}
S &= 2\left(\int_0^{\pi/2}\int_{4\cos\theta}^{2+2\cos\theta} r\,dr\,d\theta + \int_{\pi/2}^{\pi}\int_0^{2+2\cos\theta} r\,dr\,d\theta\right)\\
&= 2\left(\int_0^{\pi/2}\left(\frac{r^2}{2}\bigg|_{4\cos\theta}^{2+2\cos\theta}\right)d\theta + \int_{\pi/2}^{\pi}\left(\frac{r^2}{2}\bigg|_0^{2+2\cos\theta}\right)d\theta\right)\\
&= \int_0^{\pi/2}(4+8\cos\theta)\,d\theta + \int_{\pi/2}^{\pi}(2+2\cos\theta)^2\,d\theta\\
&= (2\pi+8)+(3\pi-8) = 5\pi
\end{aligned}$$

□

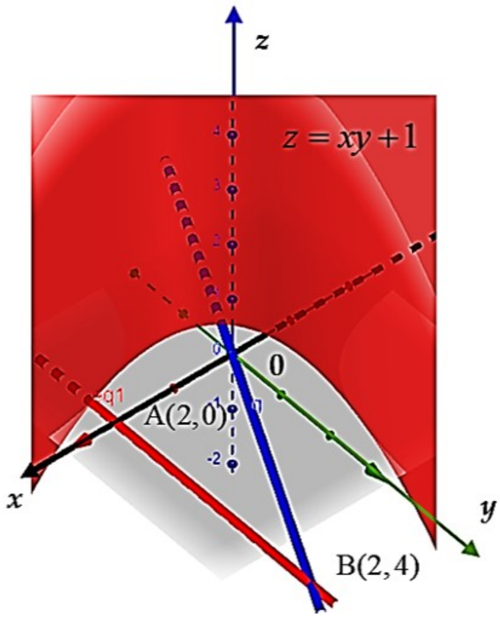
12.4.2 Thể tích vật thể

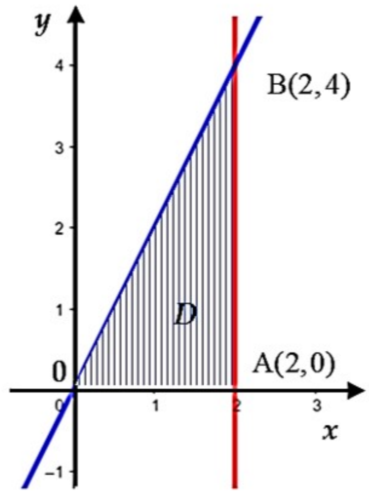
Nếu f liên tục và $f(x,y) \geq 0$ trên miền D, thể tích của khối bên dưới mặt cong $z = f(x,y)$ và bên trên miền D được cho bởi

$$V = \iint_D f(x,y)\,dA$$

.

Ví dụ 12.4.4. Tính thể tích của vật thể bên dưới mặt $z = xy + 1$ và trên miền D trong mặt phẳng $0xy$, với miền D là tam giác có các đỉnh là (0,0), (2,0), (2,4).





Giải. Ta có phương trình đường thẳng $0B : y = 2x$, đường thẳng $AB : x = 2$

Miền D: $0 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq 2x$

Do vậy, thể tích của vật thể cần tìm là

$$\begin{aligned}
V &= \iint\limits_D f(x,y)\, dA \\
&= \iint\limits_D (xy+1)\ dA \\
&= \int_0^2 \int_0^{2x} (xy+1)\, dy\, dx \\
&= \int_0^2 \left(\frac{xy^2}{2} + y\right)\Bigg|_0^{2x} dx \\
&= \int_0^2 \left(2x^3 + 2x\right) dx = 12
\end{aligned}$$

□

12.4.3 Diện tích mặt cong

Giả sử hàm $f(x,y)$ có các đạo hàm riêng f_x và f_y liên tục trên một miền D của mặt phẳng Oxy. Khi đó, phần mặt $z = f(x,y)$ nằm trên D có diện tích bề mặt

$$S = \iint\limits_D \sqrt{\left[f_x(x,y)\right]^2 + \left[f_y(x,y)\right]^2 + 1}\ dA$$

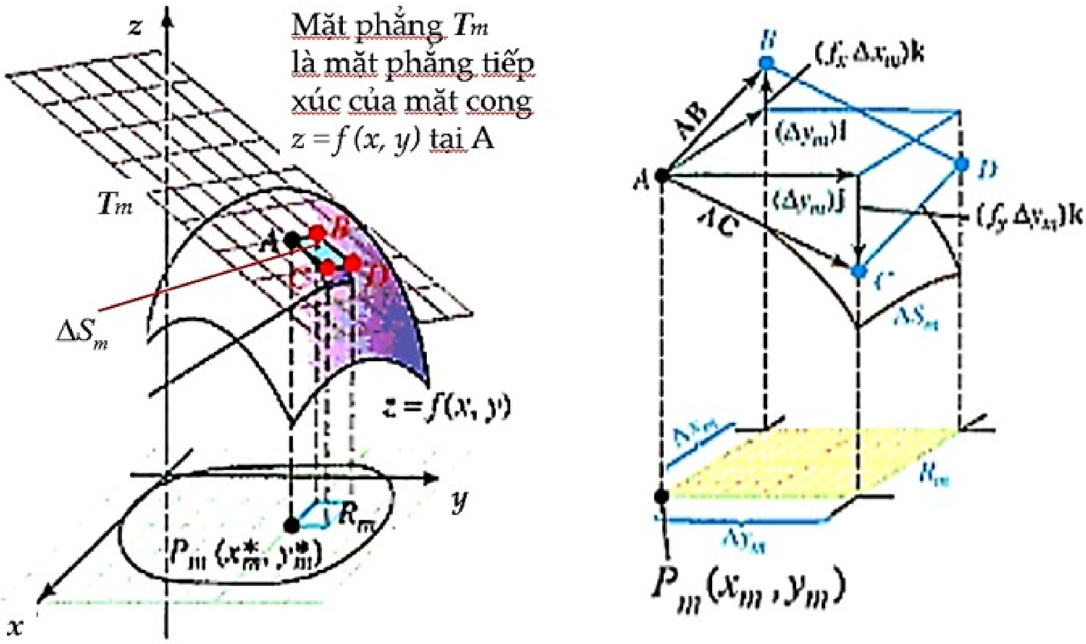
$$S = \iint\limits_D \sqrt{\left[z_x\right]^2 + \left[z_y\right]^2 + 1}\ dA$$

Chú ý:

$$dS = \sqrt{\left[f_x(x,y)\right]^2 + \left[f_y(x,y)\right]^2 + 1}\ dA$$

được gọi là **thành phần diện tích bề mặt**.

Chứng minh. Xét một mặt xác định bởi $z = f(x,y)$ được định nghĩa trên miền D của mặt phẳng Oxy. Bao bọc miền D trong một hình chữ nhật được phân hoạch bởi một lưới các đường song song với các trục tọa độ. Việc này tạo ra nhiều hình chữ nhật con, và ta kí hiệu các hình chữ nhật con hoàn toàn nằm trong D là $D_1, D_2, ..., D_n$.



Hình 12.26: Diện tích mặt phía trên D_m được xấp sỉ bởi diện tích hình bình hành trên mặt phẳng tiếp xúc

Với $m = 1, 2, ..., n$, cho $P_m(x_m^*, y_m^*)$ là một đỉnh bất kì của hình chữ nhật D_m và T_m là mặt phẳng tiếp tuyến tại P_m của mặt $z = f(x, y)$.
Cuối cùng, kí hiệu diện tích của "mảnh" bề mặt nằm ngay phía trên D_m là ΔS_m.
Hình chữ nhật D_m chiếu lên thành một hình bình hành ABDC trên mặt phẳng tiếp tuyến T_m, và nếu D_m "nhỏ", diện tích của hình bình hành này xấp xỉ gần với thành phần ΔS_m của diện tích bề mặt (xem Hình 12.16).
Nếu Δx_m và Δy_m là chiều dài của các cạnh của hình chữ nhật D_m, hình bình hành xấp xỉ sẽ có các cạnh được xác định bởi các vector

$$\mathbf{AB} = \Delta x_m \mathbf{i} + [f_x(x_m^*, y_m^*)\Delta x_m]\mathbf{k}$$

và

$$\mathbf{AC} = \Delta y_m \mathbf{j} + [f_y(x_m^*, y_m^*)\Delta y_m]\mathbf{k}$$

Trong Chương 9, ta đã chỉ ra rằng một hình bình hành như vậy với các cạnh AB và AC có diện tích $\|\mathbf{AB} \times \mathbf{AC}\|$. Xem hình 12.16.
Nếu K_m là diện tích của hình bình hành xấp xỉ, ta có

$$K_m = \|\mathbf{AB} \times \mathbf{AC}\|$$

Để tính K_m, trước hết ta tìm tích có hướng

$$\mathbf{AB} \times \mathbf{AC} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \Delta x_m & 0 & f_x\left(x_m^*, y_m^*\right)\Delta x_m \\ 0 & \Delta y_m & f_y\left(x_m^*, y_m^*\right)\Delta y_m \end{vmatrix}$$

$$= -f_x\left(x_m^*, y_m^*\right)\Delta x_m \Delta y_m \mathbf{i} - f_y\left(x_m^*, y_m^*\right)\Delta x_m \Delta y_m \mathbf{j} + \Delta x_m \Delta y_m \mathbf{k}$$

.

Sau đó, chúng ta tính chuẩn

$$\begin{aligned} K_m &= \|\mathbf{AB} \times \mathbf{AC}\| \\ &= \sqrt{\left[f_x\left(x_m^*, y_m^*\right)\right]^2 \Delta x_m^2 \Delta y_m^2 + \left[f_y\left(x_m^*, y_m^*\right)\right]^2 \Delta x_m^2 \Delta y_m^2 + \Delta x_m^2 \Delta y_m^2} \\ &= \sqrt{\left[f_x\left(x_m^*, y_m^*\right)\right]^2 + \left[f_y\left(x_m^*, y_m^*\right)\right]^2 + 1}\ \Delta x_m \Delta y_m. \end{aligned}$$

Cuối cùng, cộng trên cả phân hoạch, ta thấy diện tích bề mặt trên D có thể được xấp xỉ bởi tổng

$$\Delta S_n = \sum_{m=1}^{n} \sqrt{\left[f_x\left(x_m^*, y_m^*\right)\right]^2 + \left[f_y\left(x_m^*, y_m^*\right)\right]^2 + 1}\ \Delta A_m,$$

trong đó $\Delta A_m = \Delta x_m \Delta y_m$.

Đây là tổng Riemann, và lấy một giới hạn của tổng Riemann tương ứng, ta thấy diện tích bề mặt S, thỏa mãn

$$\begin{aligned} S &= \lim_{n\to\infty} \sum_{m=1}^{n} \sqrt{\left[f_x\left(x_m^*, y_m^*\right)\right]^2 + \left[f_y\left(x_m^*, y_m^*\right)\right]^2 + 1}\ \Delta A_m \\ &= \iint\limits_R \sqrt{\left[f_x(x,y)\right]^2 + \left[f_y(x,y)\right]^2 + 1}\ dA. \end{aligned}$$

□

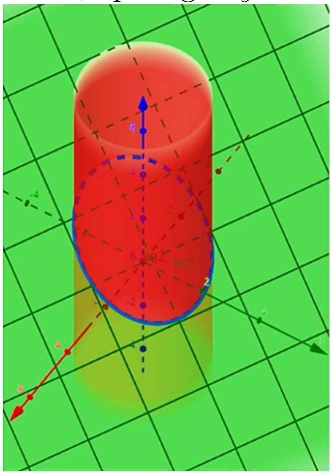
Ví dụ 12.4.5. Tính diện tích của phần mặt phẳng $x + 2y + 3z = 3$ nằm bên trong mặt trụ $x^2 + y^2 = 4$.

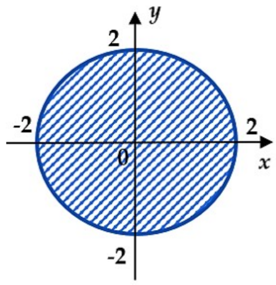
Giải. Phương trình mặt phẳng $x + 2y + 3z = 3 \Leftrightarrow z = \dfrac{3 - x - 2y}{3}$

Do vậy $z_x = -\dfrac{1}{3}, \quad z_y = -\dfrac{2}{3}$

$(z_x)^2 + (z_y)^2 + 1 = \dfrac{14}{9}$

Hình chiếu của phần mặt phẳng $x + 2y + 3z = 3$ nằm bên trong mặt trụ $x^2 + y^2 = 4$ lền mặt phẳng $0xy$ là hình tròn $D : x^2 + y^2 \leq 4$.





Diện tích của phần mặt phẳng $x + 2y + 3z = 3$ nằm bên trong mặt trụ $x^2 + y^2 = 4$ là

$$S = \iint\limits_D \sqrt{(z_x)^2 + (z_y)^2 + 1}\, dA = \iint\limits_D \tfrac{\sqrt{14}}{3} dA = \tfrac{\sqrt{14}}{3}.S(D) \quad = \tfrac{\sqrt{14}}{3}\pi(2)^2 = \tfrac{4\sqrt{14}\pi}{3}$$

□

Ví dụ 12.4.6. Tính diện tích của phần mặt trụ $y^2 + z^2 = 9$, $z \leq 0$ và $-5 \leq x \leq 5$.

Giải. Phương trình của mặt trụ $y^2 + z^2 = 9$, $z \leq 0 \Leftrightarrow z = \sqrt{9 - y^2}$

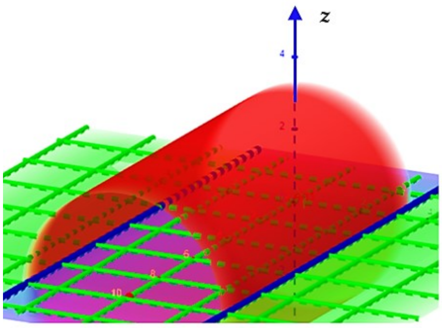
Ta có $z_x = 0,\ z_y = \dfrac{-y}{\sqrt{9 - y^2}} \Rightarrow (z_x)^2 + (z_y)^2 + 1 = \dfrac{9}{9 - y^2}$

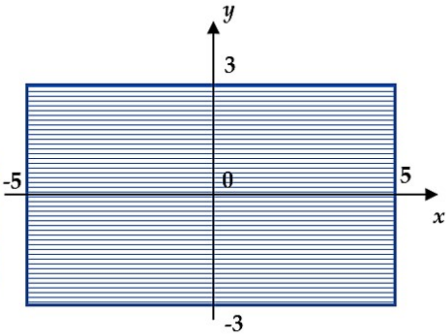
Phần mặt trụ trên có hình chiếu lên mặt phẳng $0xy$ là hình chữ nhật $D : -5 \leq x \leq 5, -3 \leq y \leq 3$

Diện tích của phần mặt trụ cần tìm là

$$S = \iint\limits_D \sqrt{(z_x)^2 + (z_y)^2 + 1}\, dA = \iint\limits_D \frac{3}{\sqrt{9 - y^2}}\, dA = \int_{-5}^{5}\int_{-3}^{3} \frac{3}{\sqrt{9 - y^2}} dy dx$$

$$S = 3\int_{-5}^{5} \left(\sin^{-1}\frac{y}{3}\right)\Big|_{-3}^{3} dx = 3\left(x|_{-5}^{5}\right)\left(\sin^{-1}1 - \sin^{-1}(-1)\right) = 30\pi$$



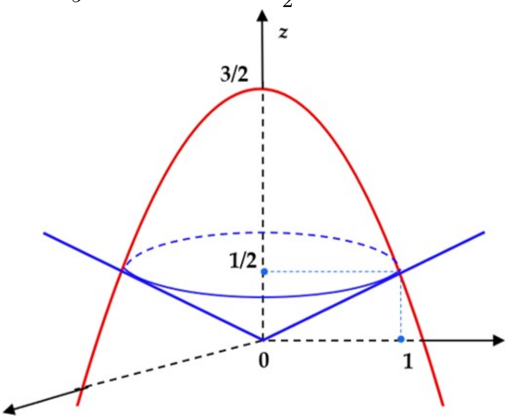


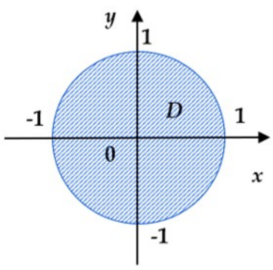
□

Ví dụ 12.4.7. 1) Tính diện tích của phần mặt nón $z = \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + y^2}$ bên trong mặt paraboloid $z = \frac{3}{2} - x^2 - y^2$.

2) Tính diện tích của phần mặt paraboloid $z = \frac{3}{2} - x^2 - y^2$ bên trong mặt nón $z = \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + y^2}$.

Giải. Giao tuyến của hai mặt $z = \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + y^2}$ và $z = \frac{3}{2} - x^2 - y^2$ là đường tròn $x^2 + y^2 = 1$ khi $z = \frac{1}{2}$.





Diện tích của phần mặt nón cần tìm là

$S = \iint\limits_D \sqrt{(z_x)^2 + (z_y)^2 + 1}\ dA = \iint\limits_D \sqrt{\left(\frac{x}{2\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2 + \left(\frac{y}{2\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2 + 1}\ dA = \iint\limits_D \frac{\sqrt{5}}{2}\ dA = \frac{\sqrt{5}}{2}\pi.1^2 = \frac{\sqrt{5}}{2}\pi$

Diện tích của phần mặt paraboloid cần tìm là

$S* = \iint\limits_D \sqrt{(z_x)^2 + (z_y)^2 + 1}\ dA = \iint\limits_{x^2+y^2\le 1} \sqrt{(-2x)^2 + (-2y)^2 + 1}\ dA$

$S* = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{1 + 4r^2}.\ r\,dr d\theta = \frac{\left(5\sqrt{5}-1\right)\pi}{6}$ □