KARL J.SMITH - MONTY J.STRAUSS - MAGDALENA D.TODA

Tài liệu môn học

CALCULUS

GIẢI TÍCH

Người dịch:

Bộ môn Toán - ĐH SPKT, Tp. Hồ Chí Minh - Năm 2016

Mục lục

Chương 13

GIẢI TÍCH VÉCTƠ

Trong chương này, chúng ta sẽ sử dụng những nội dung đã học trước đây như phép tính vi phân, phép tính tích phân và véc tơ để nghiên cứu về vi tích phân của hàm véc tơ xác định trên tập thuộc $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$. Chương này sẽ giới thiệu các khái niệm *tích phân đường, tích phân mặt* và sử dụng nó để nghiên cứu các dòng chất lỏng. Ngoài ra, chúng ta cũng sẽ trình bày Định lý Green - định lý này cho phép đưa tích phân đường về tích phân kép. Mở rộng các kết quả đó lên không gian $\mathbb{R}^3$, chúng ta có *Định lý Stokes, Định lý phân kỳ*. Những kết quả này sẽ được ứng dụng trong nhiều lĩnh vực, chẳng hạn như động lực học chất lỏng, lý thuyết điện từ.

13.1 Trường Vector: Div và Curl

13.1.1 Định nghĩa trường véc tơ

Để mô hình hóa điện lực học, từ trường, động lực học chất lỏng và những ứng dụng khác, ta sử dụng khái niệm *trường véc tơ*. Hình ảnh vệ tinh dưới đây mô tả cường độ và hướng gió trên các đại dương. Đó là một ví dụ về trường véc tơ, trong đó mỗi điểm được gắn với một véc tơ.

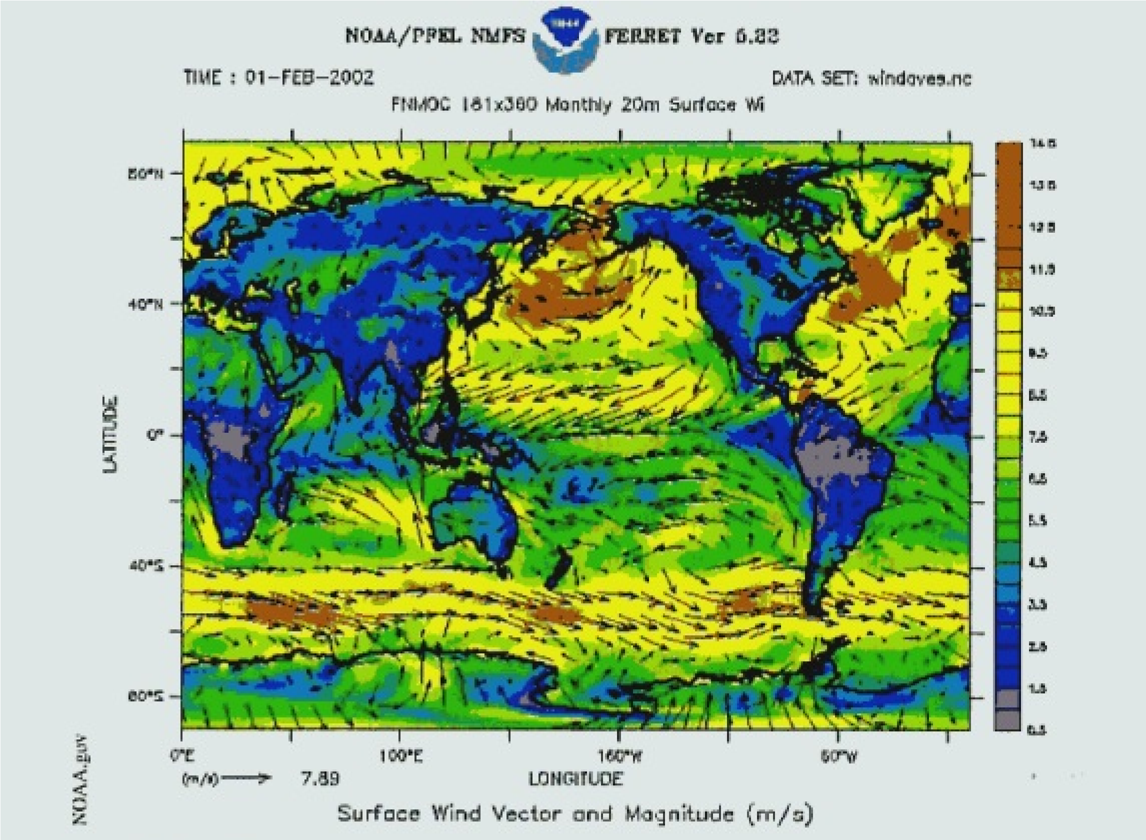


Figure 13.1 The arrows on this world map show wind direction and magnitude

Định nghĩa 13.1.1. Một **trường vector** trong $\mathbb{R}^3$ là một hàm $\mathbf{F}$ đặt tương ứng mỗi điểm thuộc miền xác định với một véc tơ.

Một trường véc tơ với miền xác định D trong $\mathbb{R}^3$ có dạng

$$\mathbf{F}(x, y, z) = M(x, y, z)\mathbf{i} + N(x, y, z)\mathbf{j} + P(x, y, z)\mathbf{k}$$

trong đó M, N, P là các hàm số xác định trên D và được gọi là các **hàm thành phần** của $\mathbf{F}$. Trường véc tơ $\mathbf{F}$ được gọi là **liên tục** nếu M, N, P liên tục, là **khả vi** nếu tất cả các đạo hàm riêng của M, N, P tồn tại.
Ví dụ

$$\mathbf{F} = 2x^2y\mathbf{i} + e^{yz}\mathbf{j} + (\tan\frac{x}{2})\mathbf{k}$$

là một trường vector với các thành phần $2x^2y; e^{yz}$ và $\tan\frac{x}{2}$ (theo thứ tự nhất định).

Một trường véc tơ trong $\mathbb{R}^2$ có thể xem như một trường hợp đặc biệt của trường véc tơ trong $\mathbb{R}^3$, tức là bỏ đi thành phần $\mathbf{k}$ và không chứa cao độ. Cụ thể, một trường véc tơ trong $\mathbb{R}^2$ có dạng

$$\mathbf{F}(x, y) = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}.$$

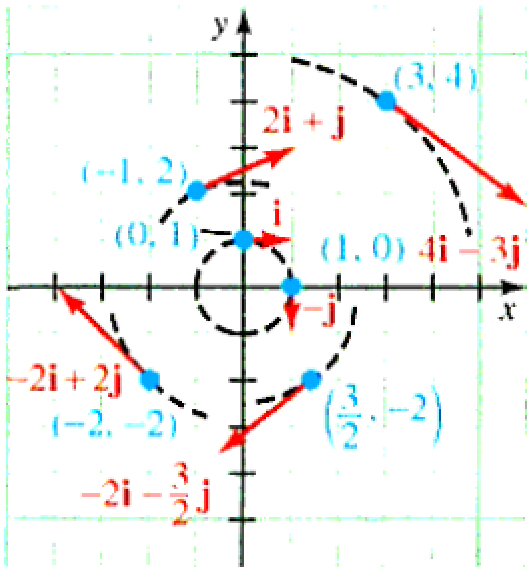
Để hình dung một cách trực quan trường véc tơ $\mathbf{F}(x, y, z)$, ta thường chọn một số điểm trong miền xác định của $\mathbf{F}$ và vẽ một mũi tên với điểm gốc tại $P(a, b, c)$, hướng là hướng của véc tơ $F(a, b, c)$, chiều dài biểu diễn độ lớn $\|F(a, b, c)\|$. Chúng ta gọi những biểu diễn như vậy là **đồ thị của F**. Dưới đây là ví dụ về đồ thị của trường véc tơ trong R^2.

Hãy phác họa đồ thị của trường véc tơ $\mathbf{F} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j}$.

Lời giải Chúng ta sẽ tính F tại những điểm khác nhau, chẳng hạn

$$\mathbf{F}(3, 4) = 4\mathbf{i} - 3\mathbf{j} \text{ và } \mathbf{F}(-1, 2) = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}.$$

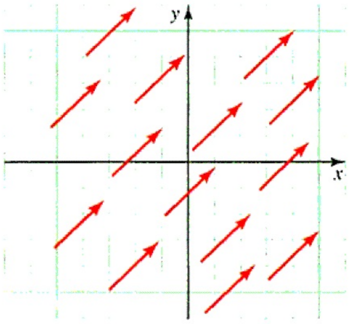
Tương tự như vậy, chúng ta có thể tính được các véc tơ tại các điểm khác nhau. Hình vẽ sau minh họa một số giá trị véc tơ tại một số điểm.



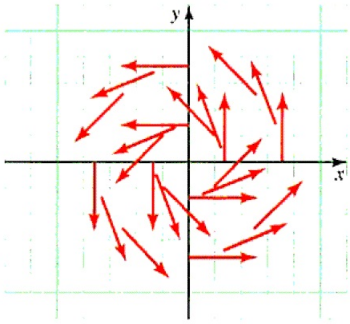
Các trường véc tơ rất khó để vẽ bằng tay, nên người ta thường sử dụng máy tính để vẽ.

Một trong những ứng dụng quan trọng của trường véc tơ là trong động lực học chất lỏng. Động lực học chất lỏng là một phần của cơ học chất lỏng liên quan đến dòng chất lỏng. Dòng chảy mà sự thay đổi diễn ra trên một đường thẳng được gọi là dòng chảy một chiều. Dòng chảy trong đó sự thay đổi của nó diễn ra trong mặt phẳng được gọi là dòng chảy hai chiều, ngược lại sự thay đổi diễn ra trong không gian thì nó được gọi là dòng chảy ba chiều. Đồ thị của trường véc tơ cung cấp nhiều thông tin hữu ích về tính chất của trường. Một dòng chảy được gọi là *không xoáy* nếu vận tốc góc của nó tại một điểm bất kì bằng không tại mọi thời điểm. Ngược lại ta nói dòng chảy là *xoáy*.

Hình dưới đây mô tả đồ thị trường vector không xoáy và trường xoáy:



a. An irrotational fluid flow



b. A rotational flow

Trong động lực học chất lỏng, nếu các đạo hàm theo thời gian của dòng chảy triệt tiêu, thì dòng cháy được gọi là *ổn định*. Ngược lại ta nói dòng chảy *không ổn định*.

Trọng trường, điện trường, từ trường là các trường véc tơ quan trọng trong vật lý. Sau đây chúng ta sẽ tìm hiểu về trọng trường, điện trường và từ trường sẽ được trình bày trong mục sau. Theo luật Newton về trọng trường, lực $\mathbf{F}(x, y, z)$ do một chất điểm có khối lượng m đặt tại gốc tọa độ tác dụng lên một đơn vị chất điểm tại điểm $P(x, y, z)$ xác định bởi

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{Gm}{x^2 + y^2 + z^2}\mathbf{u}(xy, z)$$

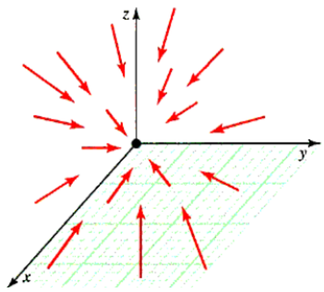
trong đó G là hằng số, $\mathbf{u}$ là véc tơ đơn vị với điểm đầu là P và hướng đến gốc tọa độ. Trường $\mathbf{F}$ được gọi là **trọng trường** của chất điểm m. Vì

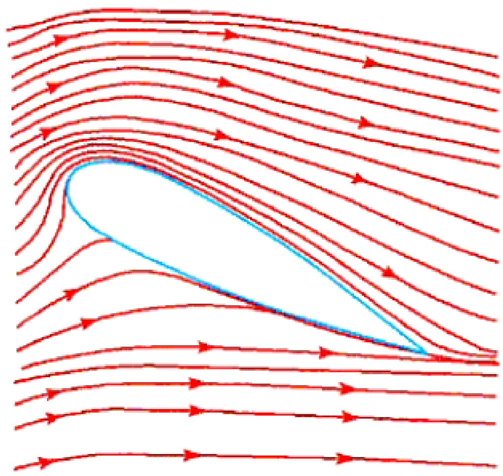
$$\mathbf{u}(x, y, z) = \frac{-1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})$$

nên

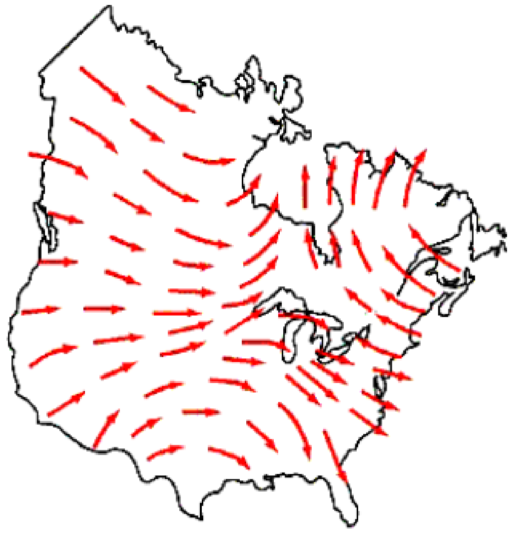
$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{-Gm}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}).$$

Chú ý rằng trọng trường **F** luôn hướng về gốc tọa độ và có độ lớn như nhau cho mọi chất điểm khối lượng m nằm cách điểm gốc một khoảng $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Những trường véc tơ như vậy gọi là **trường lực hướng tâm.** Hình sau mô tả một số trường lực trong vật lý





b. Air flow vector field



c. Wind velocity on a map

13.1.2 Độ phân kỳ (divergence)

Độ phân kỳ (divergence) và véc tơ xoáy (curl) là hai phép toán quan trọng trên trường véc tơ. Nó được đề xuất để nghiên cứu các dòng chất lỏng. Độ phân kỳ được định nghĩa như sau.

Định nghĩa 13.1.2. Độ phân kỳ của trường vector khả vi

$$\mathbf{V}(x, y, z) = u(x, y, z)\mathbf{i} + v(x, y, z)\mathbf{j} + w(x, y, z)\mathbf{k}$$

được ký hiệu là div **V** và xác định bởi công thức

$$\operatorname{div} \mathbf{V}(x, y, z) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y, z) + \frac{\partial v}{\partial y}(x, y, z) + \frac{\partial w}{\partial z}(x, y, z).$$

Độ phân kỳ của trường véc tơ trong $\mathbb{R}^2$ được định nghĩa tương tự.

Ví dụ 13.1.1. Độ phân kì của trường vector

a. Độ phân kỳ của $\mathbf{F}(x, y) = x^2y\mathbf{i} + xy^3\mathbf{j}$ là:

$$\text{div } \mathbf{F} = 2xy + 3xy^2$$

b. Độ phân kỳ của $\mathbf{G}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y^3z^2\mathbf{j} + xz^3\mathbf{k}$ là:

$$\text{div } \mathbf{G} = 1 + 3y^2z^2 + 3xz^2$$

Giả sử trường véc tơ

$$\mathbf{V} = u(x, y, z)\mathbf{i} + v(x, y, z)\mathbf{j} + w(x, y, z)\mathbf{k}$$

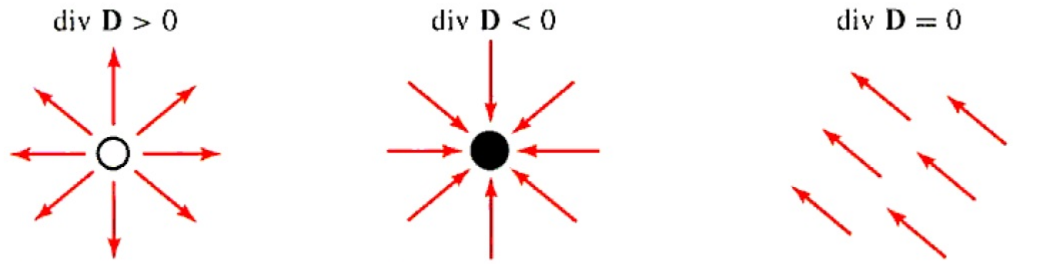
biểu diễn vận tốc của chất lỏng với khối lượng riêng $\rho(x, y, z)$ tại điểm (x, y, z) thuộc miền R trong $\mathbb{R}^3$. Khi đó trường véc tơ $\rho\mathbf{V}$ được gọi là **mật độ thông lượng** và được ký hiệu là $\mathbf{D}$. Chúng ta có thể xem $\mathbf{D} = \rho\mathbf{V}$ như là độ đo khối lượng của dòng chất lỏng.

Giả sử rằng không có sự tác động bên ngoài lên dòng chảy theo hướng phá hủy hay tạo ra dòng chảy. Khi đó div $\mathbf{D}$ trái dấu và có độ lớn bằng tốc độ thay đổi khối lượng riêng theo thời gian. Tức là

$$\text{div } \mathbf{D} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

Phương trình này thường được gọi là **phương trình liên tục** của động lực học chất lỏng.

Khi div $\mathbf{D} = 0$, ta nói **$\mathbf{D}$ là không nén được**. Dòng chảy không nén là dòng chảy trong đó mật độ vật chất là hằng số trong miền có thể tích vô cùng bé và di chuyển cùng vận tốc với dòng chảy. Nếu div $\mathbf{D} > 0$ tại điểm (x_0, y_0, z_0) thì điểm đó được gọi là **điểm nguồn**, nếu div $\mathbf{D} < 0$ thì nó được gọi là **điểm rò**.



a. Fluid flows from a *source point* **b.** Fluid flows toward a *sink point* **c.** Fluid is *incompressible*

Chúng ta có thể biểu diễn độ phân kì bằng cách sử dụng **toán tử del** được định nghĩa như sau

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{k}$$

Trong mục 11.6, bằng cách áp dụng toán tử del cho một hàm số khả vi $f(x, y, z)$ ta được **trường gradient**

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}$$

Tương tự, bằng cách lấy tích vô hướng của toán tử del ∇ với trường véc tơ $\mathbf{V}(x, y, z) = u(x, y, z)\mathbf{i} + v(x, y, z)\mathbf{j} + w(, y, z)\mathbf{k}$ ta được độ phân kỳ

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{V} &= (\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}).(u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k}) \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \\ &= \operatorname{div} \mathbf{V}.\end{aligned}$$

13.1.3 Véc tơ xoáy (curl)

Định nghĩa 13.1.3. Vector xoáy của trường vector khả vi

$$\mathbf{V}(x, y, z) = u(x, y, z)\mathbf{i} + v(x, y, z)\mathbf{j} + w(x, y, z)\mathbf{k}$$

được ký hiệu là curl $\mathbf{V}$ và xác định bởi công thức

$$\operatorname{curl}\mathbf{V} = (\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z})\mathbf{i} + (\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x})\mathbf{j} + (\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y})\mathbf{k}.$$

Chú ý, sử dụng tích có hướng ta có thể biểu diễn curl theo cách sau

$$\begin{aligned}\operatorname{curl}\mathbf{V} &= \nabla \times \mathbf{V} \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{vmatrix}.\end{aligned}$$

Một trường véc tơ V mà véc tơ xoáy của nó bằng không tại mọi điểm được gọi là *trường không xoáy*. Trong trường hợp của một dòng chất lỏng, vận tốc dòng chảy $\mathbf{V}$ là một trường véctơ. Khi đó $\operatorname{curl}\mathbf{V}$ được gọi là **độ xoáy** của dòng. Dòng chất lỏng được gọi là không xoáy nếu trường vận tốc của nó không xoáy, tức là độ xoáy $\operatorname{curl}\mathbf{V}$ bằng không tại mọi điểm.

Ví dụ 13.1.2. Vector xoáy của trường vector

Cho trường vector

$$F = x^2yz\mathbf{i} + xy^2z\mathbf{j} + xyz^2\mathbf{k}.$$

Khi đó

$$\operatorname{curl}\mathbf{F} = (xz^2 - xy^2)\mathbf{i} + (x^2 - yz^2)\mathbf{j} + (y^2z - x^2z)\mathbf{k}$$

Và vector xoáy của trường $G = (x\cos(y))\mathbf{i} + xy^2\mathbf{j}$ là

$$\operatorname{curl}\mathbf{G} = (y^2 + x\sin(y))\mathbf{k}.$$

Ví dụ 13.1.3. Một trường vector với các thành phần là hằng số thì độ phân kì và vector xoáy bằng 0. Cụ thể, giả sử $\mathbf{F} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$. Khi đó div $\mathbf{F} = 0$ và curl$\mathbf{F} = \mathbf{0}$. Thật vậy,

$$\operatorname{div}\mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}(a) + \frac{\partial}{\partial x}(b) + \frac{\partial}{\partial x}(c) = 0.$$
$$\operatorname{curl}\mathbf{F} = 0\mathbf{i} - 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k} = \mathbf{0}.$$

Sự kết hợp của độ phân kỳ, gradient, và véc tơ xoáy xuất hiện trong rất nhiều ứng dụng khác nhau. Đặc biệt, nếu $f(x, y, z)$ là hàm số khả vi thì gradient ∇f của nó là trường vector. Khi đó

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\nabla f &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} \\ &= \nabla\cdot\nabla f.\end{aligned}$$

Toán tử $\nabla^2 = \nabla\cdot\nabla$ được gọi là **toán tử Laplace** và phương trình $\nabla^2 f = 0$ được gọi là **phương trình Laplace**. Một hàm số thỏa mãn phương trình Laplace trên miền D được gọi là **hàm điều hòa** trên D.

Chú ý rằng nếu $f(x, y)$ là hàm số hai biến theo x và y thì $\nabla^2 f = f_{xx}(x, y) + f_{yy(x,y)}$.

Ví dụ 13.1.4. Chứng tỏ rằng hàm hai biến $f(x, y) = e^x\cos(y)$ là điều hòa.

Ta có

$$\begin{aligned}\nabla^2 f(x, y) &= f_{xx}(x, y) + f_{yy}(x, y) \\ &= e^x\cos y - e^x\cos y = 0.\end{aligned}$$

Do đó f là điều hòa.

Một trong những khám phá khoa học tuyệt vời thế kỷ 19 là về định luật điện từ trường của James Clerk Maxwell. Định luật đó được biểu diễn một cách rất tinh tế dưới dạng độ phân kỳ và véc tơ xoáy. Người ta biết rằng lực tác dụng lên một vật mang điện sinh ra bởi trường điện từ phụ thuộc vào vị trí, vận tốc và lượng điện tích của vật và không phụ thuộc vào các vật mang điện khác đang hiện diện cũng như việc các vật mang điện đó di chuyển như thế nào. Giả sử một vật tích điện được đặt tại điểm (x, y, z) ở thời điểm t, trường cường độ dòng điện là $E(x, y, z, t)$ và trường cường độ từ trường $H(x, y, z, t)$. Khi đó điện từ trường được xác định bởi

$$\text{div } \mathbf{E} = \frac{Q}{\epsilon}, \qquad \text{div } (\mu H) = 0$$

$$\text{curl}(\mathbf{E}) = -\frac{\partial(\mu H)}{\partial t}, \qquad c^2(\text{curl } B) = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\mathbf{J}}{\epsilon}$$

trong đó Q là mật độ điện tích, $\mathbf{J}$ là mật độ dòng điện, B là mật độ thông lượng từ trường, c là tốc độ ánh sáng, μ, ϵ là các hằng số.

13.2 Tích phân đường

13.2.1 Định nghĩa tích phân đường

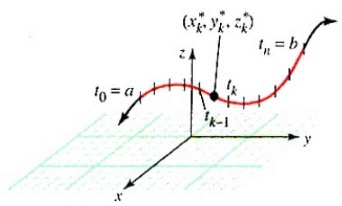


Figure 13.6 The curve C partitioned into subarcs

Cho C là một cung trơn trong không gian xác định bởi phương trình tham số $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t), a \leq t \leq b$ và $f(x, y, z)$ là hàm số xác định trên một miền chứa C. Chúng ta nói rằng C là **định hướng được** nếu ta có thể mô tả hướng của C khi t tăng.

Chia C thành n cung nhỏ, ký hiệu độ dài cung nhỏ thứ k là Δs_k. Chọn một điểm (x_k^*, y_k^*, z_k^*) tùy ý trên cung nhỏ thứ k. Ký hiệu $\|\Delta s\|$ là độ dài lớn nhất trong số độ dài các cung nhỏ.

Định nghĩa 13.2.1. Nếu giới hạn của tổng Riemann

$$\lim_{\|\Delta s\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*, y_k^*, z_k^*) \Delta s_k$$

tồn tại thì giới hạn đó được gọi là **tích phân đường** của f trên C và ký hiệu $\int_C f(x, y, z)\, ds$. Như vậy,

$$\int_C f(x, y, z)\, ds = \lim_{\|\Delta s\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*, y_k^*, z_k^*) \Delta s_k$$

Nếu C là một đường cong kín thì chúng ta dùng ký hiệu $\oint_C f\, ds$ cho tích phân đường của f trên C .

Mệnh đề 13.2.2. *Nếu C trơn và f liên tục trên C thì tích phân đường của f trên C tồn tại và ta có*

$$\int_C f(x,y,z)\ ds = \int_a^b f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2+[z'(t)]^2}dt$$

Chú ý 13.2.3. Tích phân đường của hàm hai biến $f(x,y)$ trên đường cong trơn C có phương trình tham số $x = x(t),\ y = y(t), a \le t \le b$ được định nghĩa tương tự. Hơn nữa,

$$\int_C f(x,y)\ ds = \int_a^b f(x(t),y(t))\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}dt.$$

Ví dụ 13.2.1. Tính tích phân đường theo ba biến

Tính tích phân đường cong $\int_C x^2z\ ds$, với C có dạng $x = cost, y = 2t, z = sint$ và $0 \le t \le \pi$.

Giải Ta có

$$\begin{aligned}\int_C x^2z\ ds &= \int_0^\pi [x(t)]^2z(t)\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2+[z'(t)]^2}dt\\ &= \int_0^\pi (cost)^2(sint)\sqrt{(-sint)^2+2^2+(cost)^2}dt\\ &= \int_0^\pi \sqrt{5}cos^2tsintdt\\ &= \frac{-\sqrt{5}}{3}cos^3t|_0^\pi\\ &= \frac{2\sqrt{5}}{3}.\end{aligned}$$

Có thể mở rộng định nghĩa tích phân đường cho đường cong trơn từng khúc. Đường cong C gọi là *trơn từng khúc* nếu nó gồm hữu hạn các đường cong trơn nối tiếp nhau. Hơn nữa, ta có kết quả sau.

Mệnh đề 13.2.4. *Nếu C được hợp thành từ hai đoạn cong (không giao nhau hoặc chỉ giao nhau tại các điểm đầu) C_1 và C_2 thì:*

$$\int_C f\ ds = \int_{C_1} f\ ds + \int_{C_2} f\ ds.$$

Ví dụ 13.2.2.Tính tích phân đường của đường cong hợp

Tính $\int_C xy\ ds$ trong đó C hợp thành bởi đoạn thẳng C_1 nối điểm $(-3,3)$ đến $(0,0)$, và phần đường cong $C_2 : 16y = x^4$ từ điểm $(0,0)$ đến $(2,1)$.

Giải

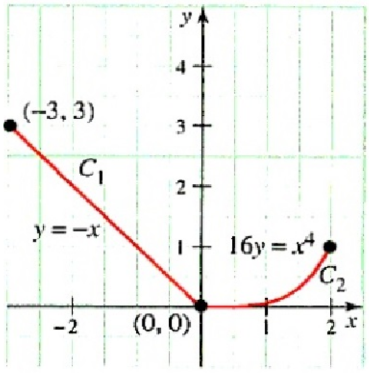


Figure 13.8 The curve C in Example 2

Ta có phương trình C_1 là $y = -x$. Phương trình tham số của nó có dạng

$$x = t,\ y = -t,\ t \in [-3, 0].$$

Do đó

$$\begin{aligned}\int_{C_1} xy\ ds &= \int_{-3}^{0} t.(-t)\sqrt{1^2 + [-1]^2}dt \\ &= \int_{-3}^{0} -\sqrt{2}t^2 dt = -9\sqrt{2}\end{aligned}$$

Tiếp theo, phương trình tham số của C_2 là

$$x = 2t,\ y = t^4,\ t \in [0, 1].$$

Do đó

$$\begin{aligned}\int_{C_2} xy\ ds &= \int_{0}^{1} 2t.t^4\sqrt{2^2 + [4t^3]^2}dt \\ &= \int_{0}^{1} 2t^5\sqrt{4 + 16t^6}dt \\ &= \frac{1}{9}\left.(1 + 4t^6)^{3/2}\right|_0^1 = \frac{1}{9}(5\sqrt{5} - 1).\end{aligned}$$

Từ đó ta có

$$\int_C xy\ dS = \int_{C_1} xy\ dS + \int_{C_2} xy\ dS = -9\sqrt{2} + \frac{1}{9}(5\sqrt{5} - 1).$$

Định lý 13.2.5. ***Tính chất của tích phân đường***
Giả sử các tích phân sau là tồn tại, thì với hằng số k bất kỳ, ta có:

(i) $\int_C kf\ ds = k\int_C f\ ds$

(ii) $\int_C (f_1 + f_2)\ ds = \int_C f_1\ dS + \int_C f_2\ ds$

(iii) $\int_C f\ dS = \int_{C_1} f\ ds + \int_{C_2} f\ ds + ... + \int_{C_n} f\ ds.$
trong đó $C = C_1 \cup C_2 \cup ... \cup C_n$ *và các* C_i *chỉ giao nhau các điểm đầu cuối.*

13.2.2 Tích phân đường theo biến x, y, z

Nếu thay độ dài đoạn nhỏ Δs trong định nghĩa 13.2.1 thành Δx (chiếu vuông góc lên Ox) thì giới hạn được đề cập trong định nghĩa tích phân đường trở thành tích phân:

$$\int_C f(x,y,z)dx = \int_a^b f[x(t),y(t),z(t)].x'(t)dt$$

Tương tự, chúng ta có:

$$\int_C g(x,y,z)dy = \int_a^b g[x(t),y(t),z(t)].y'(t)dt$$

$$\int_C h(x,y,z)dz = \int_a^b h[x(t),y(t),z(t)].z'(t)dt$$

Hoặc tổ hợp:

$$\int_C [fdx + gdy + hdz] = \int_C fdx + \int_C gdy + \int_C hdz$$

Ví dụ 13.2.3.Tính tích phân đường với biến của hệ trục tọa độ
Tính tích phân đường:

$$\int_C [ydx - zdy + xdz]$$

trong đó C là đường cong có phương trình tham số $x = t^2,\ y = e^{-t},\ z = e^t,\ t \in [0,1]$.
Giải:

$$\begin{aligned}\int_C [ydx - zdy + xdz] &= \int_0^1 [e^{-t}.2tdt - e^t(-e^{-t})dt + t^2e^tdt]\\ &= \int_0^1 [2te^{-t} + 1 + t^2e^t]dt\\ &= [-2e^{-t}(t+1) + t + e^t(t^2 - 2t + 2)]\Big|_0^1\\ &= e - 4e^{-1} + 1\end{aligned}$$

13.2.3 Tích phân đường của trường Vector

Định nghĩa 13.2.6. Cho trường vector $\mathbf{F}(x,y,z) = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k}$ và C là đường cong trơn từng khúc định hướng được với biểu diễn tham số

$$\mathbf{R}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k},\ t \in [a,b]$$

Sử dụng biểu thức $d\mathbf{R} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}$ ta định nghĩa tích phân đường của $\mathbf{F}$ dọc theo cung $\mathbf{C}$ như sau

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{R} &= \int_C (udx + vdy + wdz)\\ &= \int_C \mathbf{F}[\mathbf{R}(t)]\mathbf{R}'(t)dt\\ &= \int_a^b \Big[u[x(t),y(t),z(t)].x'(t) + v[x(t),y(t),z(t)].y'(t) + w[x(t),y(t),z(t)].z'(t)\Big]dt\end{aligned}$$

Ví dụ 13.2.4. Tính tích phân đường của trường vector
Tính tích phân đường của trường $\mathbf{F}(x,y,z) = (y^2 - z^2)\mathbf{i} + 2yz\mathbf{j} - x^2\mathbf{k}$ dọc theo đường cong C có phương trình tham số $x = t^2,\ y = 2t\ z = t,\ t \in [0,1]$.
Giải Biểu diễn $\mathbf{F}$ theo tham số t

$$\mathbf{F} = [4t^2 - t^2]\mathbf{i} + [2.2t.t]\mathbf{j} - [t^4]\mathbf{k}$$

Vì $\mathbf{R}(t) = t^2\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$ nên $d\mathbf{R} = (2tdt)\mathbf{i} + (2dt)\mathbf{j} + dt\mathbf{k}$. Từ đó

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{R} &= \int_0^1 3t^2(2tdt) + 4t^2(2dt) - t^4dt\\ &= \int_0^1 (6t^3 + 8t^2 - t^4)dt = \frac{119}{30}.\end{aligned}$$

Ví dụ 13.2.5. Giá trị của một tích phân đường là độc lập của tham số hóa
Cho $\mathbf{F} = y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ và cho C là nửa trên đường tròn $x^2 + y^2 = 4$ theo chiều ngược chiều kim đồng hồ từ (2,0) đến (-2,0) như hình

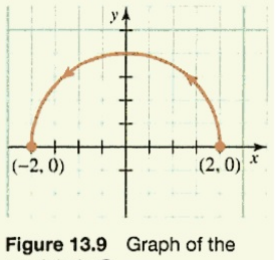


Figure 13.9 Graph of the semicircle C

Tính tích phân đường $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{R}$ ứng với dạng tham số hóa của C như sau.
a. $x = 2\cos\theta, y = 2\sin\theta, 0 \le \theta \le \pi$
b. $x = -t, y = \sqrt{4 - t^2}, -2 \le t \le 2$
Giải a. Ứng với dạng tham số hóa $x = 2\cos\theta, y = 2\sin\theta$ ta có $x'(\theta) = -2\sin\theta, y'(\theta) =$

$2\cos\theta$.
Từ đó

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{R} &= \int_C [ydx + xdy]\\ &= \int_0^\pi [(2\sin\theta)(-2\sin\theta) + (2\cos\theta)(2\cos\theta)]d\theta\\ &= \int_0^\pi 4(\cos^2\theta - \sin^2\theta)d\theta\\ &= \int_0^\pi 4\cos 2\theta\\ &= 0.\end{aligned}$$

b. Ứng với dạng tham số hóa $x = -t, y = \sqrt{4-t^2}$ ta có $x'(t) = -1, y'(t) = \frac{-t}{\sqrt{4-t^2}}$
Ta có

$$\begin{aligned}\int_C [ydx + xdy] &= \int_{-2}^2 \left[\sqrt{4-t^2}(-1) + (-t)\left(\frac{-t}{\sqrt{4-t^2}}\right)\right] dt\\ &= \int_{-2}^2 \frac{-4+2t^2}{\sqrt{4-t^2}}dt\\ &= -t\sqrt{4-t^2}|_{-2}^2\\ &= 0.\end{aligned}$$

Ta thấy hai kết quả là như nhau, điều đó chứng tỏ tích phân đường không phụ thuộc vào dạng tham số hóa của đường cong.

Ví dụ 13.2.6. Tính tích phân đường theo các đường khác nhau
Cho $\mathbf{F} = xy^2\mathbf{i} + x^2y\mathbf{j}$ và tính tích phân đường $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{R}$ từ điểm (0,0) đến (2,4) theo các đường sau:
a. Đoạn thẳng nối hai điểm
b. Đường cong parabol $y = x^2$ nối hai điểm
Giải Hai đường đó như hình dưới

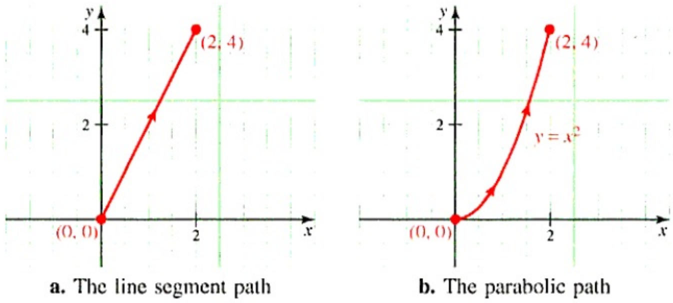


Figure 13.10 A line interval along different paths

a. Đường thẳng đã cho có phương trình $y = 2x$ theo hướng đã cho được tham số hóa thành $x = t, y = 2t$ với $0 \leq t \leq 2$. Vì vậy $\mathbf{R}(t) = t\mathbf{i} + 2t\mathbf{j}$ do đó $d\mathbf{R} = dt\mathbf{i} + 2dt\mathbf{j}$. Hơn nữa, $\mathbf{F} = 4t^3\mathbf{i} + 2t^3\mathbf{j}$ nên $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} = 4t^3dt + 4t^3dt = 8t^3dt$.
Từ đó

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} = \int_0^2 8t^3dt = [2t^4]|_0^2 = 32$$

b. Parabol $y = x^2$ được tham số hóa thành $x = t, y = t^2$ với $0 \leq t \leq 2$. Vì vậy $\mathbf{R}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}$ nên $d\mathbf{R} = dt\mathbf{i} + 2tdt\mathbf{j}$. Do đó

$$\mathbf{F} = xy^2\mathbf{i} + x^2y\mathbf{j} = (t)(t^2)\mathbf{i} + (t)^2(t^2)\mathbf{j} = t^5\mathbf{i} + t^4\mathbf{j}$$

và

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} = t^5dt + 2t^5dt = 3t^5dt.$$

Từ đó ta được

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} = \int_0^2 3t^5dt = \left[\frac{1}{2}t^6\right]_0^2 = 32.$$

Trong ví dụ trên ta thấy giá trị của tích phân đường giống nhau cho cả a. và b. Nhưng không phải bao giờ cũng như vậy. Đặc biệt nếu trường hợp đó xảy ra (giá trị tích phân không phụ thuộc đường đi) thì ta nói tích phân đường là **độc lập đường đi**.

13.2.4 Ứng dụng: Khối lượng và Công

Xem xét đoạn dây đồng có hình dáng đoạn cong C và $\rho(x, y, z)$ là khối lượng riêng (khối lượng trên mỗi đơn vị chiều dài) của nó tại điểm (x, y, z). Khi đó khối lượng cả đoạn dây là:

$$m = \int_C \rho(x, y, z)\ dS$$

Và khối tâm của C là điểm $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ với

$$\overline{x} = \frac{1}{m}\int_C x\rho(x,y,z)\ ds,\ \overline{y} = \frac{1}{m}\int_C y\rho(x,y,z)\ ds,\ \overline{z} = \frac{1}{m}\int_C z\rho(x,y,z)\ ds.$$

Lưu ý rằng khối tâm của đường cong không nhất thiết thuộc đường cong đó.

Ví dụ 13.2.7. Tính khối lượng của sợi dây đồng mỏng bằng tích phân đường

Một sợi dây đồng có dáng đoạn cong C:

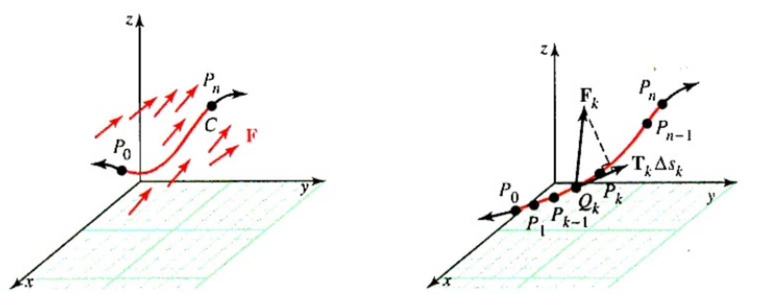
$$x = \sqrt{2}\sin t,\ y = \cos t,\ z = \cos t,\ t \in [0, \pi]$$

Nếu khối lượng riêng theo độ dài tại (x, y, z) là $\rho(x, y, z) = xyz$ thì khối lượng sợi dây là:

$$\begin{aligned} m &= \int_C xyz\ ds \\ &= \int_0^\pi \sqrt{2}\sin t\cos^2 t\sqrt{2\cos^2 t + \sin^2 t + \sin^2 t}dt \\ &= \int_0^\pi 2\sin t\cos^2 tdt \\ &= -\frac{2\cos^3 t}{3}\bigg|_0^\pi = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

Trong mục 9.3 chúng ta đã biết rằng công của trường lực **F** làm vật di chuyển thẳng khoảng cách D là W= **F**.**D** (F là hằng số).

Giả sử trường lực **F**(x,y,z) biến thiên liên tục trên miền D. Dưới tác động của **F**, một vật di chuyển theo đường cong trơn C thuộc D, có biểu diễn tham số **R**(t)theo chiều tăng của t. Chia nhỏ C thành các điểm $P_0, P_1, ..., P_n$ như hình vẽ



a. An object moves along a curve C in a force field **F**

b. The work performed as the object moves along the kth subarc is $W_k \approx \mathbf{F}_k \cdot \mathbf{T}_k \Delta s_k$

Figure 13.11 Work performed as an object moves in a force field F along a curve C

Với $k = 1, 2, .., n$, cho $Q_k(x_k^*, y_k^*, z_k^*)$ là một điểm được chọn tùy ý từ cung nhỏ C_k (với những điểm cuối là P_{k-1} và P_k), và cho $\mathbf{F}_k = \mathbf{F}(x_k^*, y_k^*, z_k^*)$. Nếu độ dài $\triangle s_k$ của cung nhỏ C_k nhỏ, lực sẽ xấp xỉ hằng số và ta giả sử là giá trị $\mathbf{F}_k$ là hằng số trên cung nhỏ này. Hướng di chuyển sẽ không thay đổi nhiều trên toàn cung nhỏ, vì vậy ta có thể giả sử vật sẽ di chuyển một khoảng $\triangle s_k$ theo chiều của tiếp tuyến đơn vị $\mathbf{T}_k = \mathbf{T}(x_k^*, y_k^*, z_k^*)$ với độ dịch chuyển tuyến tính là $\mathbf{T}_k \triangle s_k$. Vì vậy, ta có thể xấp xỉ công cho cung nhỏ thứ k bởi

$$W_k \approx \mathbf{F_k} \cdot \mathbf{T}_k \triangle s_k.$$

Xây dựng cho n cung nhỏ, ta được tổng

$$\sum \mathbf{F_k} \cdot \mathbf{T}_k \triangle s_k.$$

Xấp xỉ này cho tổng công của một vật di chuyển dọc C trong trường lực $\mathbf{F}$. Khi độ dài lớn nhất của cung nhỏ $\| \triangle s_k \|$ tiến về 0, tổng xấp xỉ này tiến về giá trị của tích phân đường $\int_C \mathbf{F}.\mathbf{T}\ dS$, đó là

$$W = \lim_{\| \triangle s_k \| \to 0} \sum \mathbf{F_k} \cdot \mathbf{T}_k \triangle s_k = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\ ds.$$

Qua quan sát này cho ta xem **công như là tích phân đường**.

Định nghĩa 13.2.7. Tính công bằng tích phân đường

Giả sử trường lực $\mathbf{F}$ biến thiên liên tục trên miền D. Thì công W khi một vật di chuyển theo đường cong trơn C thuộc D được biểu diễn bởi tích phân

$$W = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\ ds$$

trong đó $\mathbf{T}$ là vector tiếp tuyến đơn vị tại điểm chạy trên C.

Chúng ta đã biết trong mục 10.4 rằng $\mathbf{T} = \dfrac{dx}{ds}\mathbf{i} + \dfrac{dy}{ds}\mathbf{j} = \dfrac{d\mathbf{R}}{ds}$. Do đó công có thể được tính theo công thức sau

$$W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R}.$$

Ví dụ 13.2.8.Tính công bằng tích phân đường

Trong mặt phẳng Oxy, một vật di chuyển dưới tác động của trường lực $\mathbf{F} = y^2\mathbf{i} + 2(x+1)y\mathbf{j}$. Tính công của F lên vật khi nó di chuyển dọc theo elip có phương trình $x^2 + 4y^2 = 4$ từ điểm (2,0) theo chiều kim đồng hồ đến điểm (0,1). Sau đó nó tiếp tục di chuyển về điểm (2,0) theo đoạn thẳng.

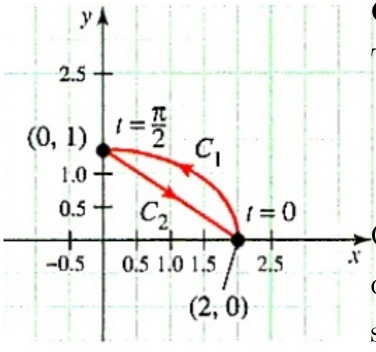


Figure 13.12 The curve C

Giải Gọi C là đường đi khép kín của vật theo đề bài. Theo công thức đã trình bày, công cần tính là:

$$W = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R}$$

Gọi C_1 là đoạn con của C thuộc elip và C_2 là đoạn thẳng còn lại trong C. Khi đó C_1 có tham số $x = 2\cos t,\ y = \sin t,\ t \in [0, \pi/2]$ (lưu ý chiều di chuyển của vật là chiều tăng của t). Nghĩa là trên C_1 thì $\mathbf{R}_1(t) = 2\cos t\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j}$. Tính $d\mathbf{R}_1 = \mathbf{R}_1'(t)dt$ và đưa vào tích phân:

$$\begin{aligned}
W_1 &= \int_{C_1} \mathbf{F}_1(t)] \cdot d\mathbf{R}_1 \\
&= \int_0^{\pi/2} [\sin^2 t(-2\sin t) + 2(2\cos t + 1)\sin t \cos t]dt \\
&= \int_0^{\pi/2} [-2\sin^2 t + 4\cos^2 t + 2\cos t]\sin t dt \\
&= \int_0^{\pi/2} [6\cos^2 t + 2\cos t - 2](-d\cos t) \\
&= -\int_1^0 (6u^2 + 2u - 2)du = 1
\end{aligned}$$

Tương tự với C_2 thì $\mathbf{R}_2(t) = 2t\mathbf{i} + (1-t)\mathbf{j},\ t \in [0, 1]$ và

$$\begin{aligned}
W_2 &= \int_{C_2} \mathbf{F}[\mathbf{R}_2(t)] \cdot d\mathbf{R}_2 \\
&= \int_0^1 [2(1-t)^2 + 2(2t+1)(1-t)(-1)]dt \\
&= \int_0^{\pi/2} [-2\sin^2 t + 4\cos^2 t + 2\cos t]\sin t dt \\
&= \int_0^1 (6t^2 - 6t)dt \\
&= -1
\end{aligned}$$

Kết quả

$$W = W_1 + W_2 = 0.$$

BÀI TẬP 13.2

13.3 Định lý cơ bản và sự độc lập của đường đi

Nói chung, giá trị của tích phân đường $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R}$ phụ thuộc không chỉ điểm đầu và điểm cuối mà còn phụ thuộc vào hình dạng của đường lấy tích phân C. Tuy nhiên, trong một số trường hợp nhất định tích phân sẽ bằng nhau cho tất cả các đường trên miền D cho trước với cùng điểm đầu P và điểm cuối Q. Khi đó ta nói tích phân đường là **độc lập đường đi** trong D.

13.3.1 Định lý cơ bản của tích phân đường

Định lý cơ bản trong tích phân xác định phát biểu rằng, nếu hàm f liên tục trên $[a, b]$ thì $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, với F là một nguyên hàm của f, tức là $F'(x) = f(x)$. Đối với hàm hai hoặc ba biến, bằng cách sử dụng gradient thay cho đạo hàm chúng ta thu được định lý cơ bản sau.

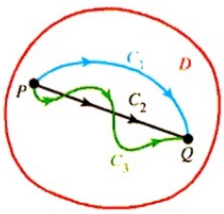


Figure 13.16 A line integral $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R}$ is independent of path in D if its value is the same for all curves joining any two points in D

Định lý 13.3.1. *Cho C là một cung trơn từng khúc, có biểu diễn tham số $\mathbf{R}(t)$, $t \in [a, b]$. Trường vector F là liên tục trên C. Nếu f là hàm số sao cho $\mathbf{F} = \nabla f$, thì*

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} = f(Q) - f(P)$$

trong đó $P = \mathbf{R}(a)$ và $Q = \mathbf{R}(b)$ lần lượt là điểm đầu và điểm cuối của C.

Chứng minh. Ta sẽ chứng minh định lý này với trường hợp $f(x, y, z)$ là một hàm ba biến và $\mathbf{F} = \nabla f(x, y, z)$. Giả sử $\mathbf{R}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ và cho $G(t) = f[x(t), y(t), z(t)]$. Thì ta có

$$\frac{dG}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt}.$$

Từ đó ta thu được

$$\begin{aligned}
\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{R} &= \int_C \nabla . d\mathbf{R} \\
&= \int_C \left[\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz\right] \\
&= \int_a^b \left[\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt}\right] dt \\
&= \int_a^b \frac{dG}{dt}dt \\
&= G(b) - G(a) \\
&= f[x(b), y(b), z(b)] - f[x(a), y(a), z(a)] \\
&= f[\mathbf{R}(b)] - f[\mathbf{R}(a)] \\
&= f(Q) - f(P).
\end{aligned}$$

□

Ví dụ 13.3.1. Dùng định lý cơ bản để tính tích phân đường
Tính $I = \int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{R}$, trong đó $\mathbf{F} = \nabla(e^x \sin y - xy - 2y)$ và C có biểu diễn tham số bởi vector $\mathbf{R}(t) = [t^3 \sin \frac{\pi}{2}t]\mathbf{i} - [\frac{\pi}{2}\cos(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{2})]\mathbf{j},\ t \in [0, 1]$.
Giải Trước hết, chúng ta thấy rằng các giả thiết của định lý cơ bản cho tích phân đường thỏa mãn. Tại t=0 thì điểm đầu $P = \mathbf{R}(t) = (0, 0)$ và $f(P) = 0$. Tại t = 1 thì điểm cuối $Q = \mathbf{R}(1) = (1, \frac{\pi}{2})$ và $f(Q) = e - \frac{3\pi}{2}$. Do đó:

$$\begin{aligned}
\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{R} &= f(Q) - f(P) \\
&= e - \frac{3\pi}{2}.
\end{aligned}$$

13.3.2 Trường thế

Để áp dụng được định lý cơ bản của tích phân đường thì trường **F** phải là trường gradient. Tiếp theo chúng ta sẽ tìm hiểu dưới điều kiện nào thì một trường véc tơ là một trường gradient? Trước tiên chúng ta sẽ giới thiệu một số thuật ngữ.

Định nghĩa 13.3.2. Trường vector **F** được gọi là **trường thế** trên miền D nếu tồn tại hàm số f sao cho

$$\mathbf{F} = \nabla f,\ \forall (x, y) \in D.$$

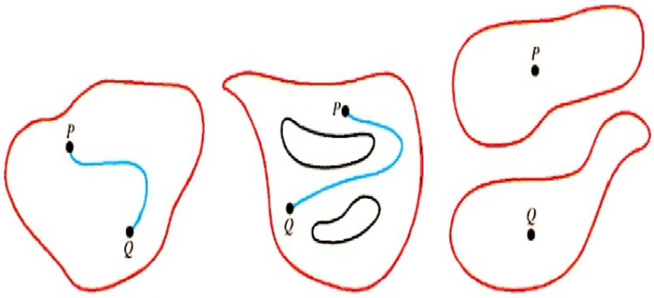
Khi đó f được gọi là **hàm số thế vị** của **F** trên D.

Ví dụ 13.3.2. Chứng minh trường vector là một trường thế
Chứng minh $\mathbf{F} = 2xy\mathbf{i} + x^2\mathbf{j}$ là trường thế với hàm số thế vị $f = x^2y$.
Giải Ta có $\nabla f = 2xy\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} = F$. Vậy $\mathbf{F}$ là trường thế.

Việc kiểm tra một trường là trường thế khi đã biết hàm số thế vị khá đơn giản. Tuy nhiên, trong thực tế, với một trường véc tơ cho trước, chúng ta rất khó để biết nó có là trường thế hay không. Sau đây chúng ta sẽ trình bày một tiêu chuẩn để đảm bảo rằng $\mathbf{F}$ là trường thế trên một miền D có các tính chất sau.

(i) D là **miền liên thông**, tức là nếu với hai điểm P, Q bất kỳ trong D thì luôn có thể nối lại bằng một đường cong trơn từng khúc hoàn toàn nằm trong D.

(ii) D là **miền đơn liên**, tức là mọi miền giới hạn bởi đường cong kín trong D thì cũng nằm hoàn toàn trong D.



a. A region that is simply connected (no holes) **b.** A connected region that is not simply connected **c.** A region that is not connected

Nếu D thỏa mãn cả hai tính chất trên thì D được gọi là miền **liên thông đơn.**

Định lý 13.3.3. *Trong mặt phẳng Oxy, cho trường $F(x, y) = u\mathbf{i} + v\mathbf{j}$ trong đó u, v có đạo hàm riêng liên tục trên tập mở, liên thông đơn D. Khi đó, $\mathbf{F}$ là trường thế trên D nếu và chỉ nếu*

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial v}{\partial x}(x, y),\ \forall (x, y) \in D.$$

Ví dụ 13.3.3. Tìm hàm số thế vị
Chứng tỏ rằng $\mathbf{F} = (e^x \sin y - y)\mathbf{i} + (e^x \cos y - x - 2)\mathbf{j}$ là trường thế và tìm hàm số thế vị tương ứng.
Giải Rõ ràng, $u = e^x \sin y - y$ và $v = e^x \cos y - x - 2$ có các đạo hàm riêng liên tục. Hơn nữa

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = e^x \cos y - 1.$$

Do đó **F** là trường thế.
Giả sử f là hàm số thế vị cần tìm, tức là $F = \nabla f = f'_x\mathbf{i} + f'_y\mathbf{j}$. Do đó

$$f'_x = u = e^x \sin y - y,\ v = f'_y = e^x \cos y - x - 2.$$

Đẳng thức thứ nhất suy ra $f(x, y) = e^x \sin y - xy + k(y)$ (k(y) là biểu thức không phụ thuộc x). Tính đạo hàm kết quả này theo y và thế vào đẳng thức $v = f'_y$ thì suy ra:

$$e^x \cos y - x + k'(y) = e^x \cos y - x - 2 \Leftrightarrow k'(y) = -2$$

Vậy $k(y) = -2y + c$, tức là $f(x, y) = e^x \sin y - xy - 2y + c$ với mọi hằng số c bất kỳ. Chẳng hạn, chọn c = 0 chúng ta có hàm số thế vị

$$f(x, y) = e^x \sin y - xy - 2y.$$

Ví dụ 13.3.4. Kiểm tra một trường thế trong mặt phẳng
Kiểm tra xem trường vector $\mathbf{F} = ye^{xy}\mathbf{i} + (xe^{xy} + x)\mathbf{j}$ có phải là trường thế không, nếu có thì tìm hàm số thế vị tương ứng.
Giải Ta có $u(x, y) = ye^{xy}$ và $v(x, y) = xe^{xy} + x$.
Từ đó ta được,

$$\frac{\partial u}{\partial y} = xye^{xy} + e^{xy}$$

,

$$\frac{\partial v}{\partial x} = xye^{xy} + e^{xy} + 1$$

Rõ ràng $\dfrac{\partial u}{\partial y} \neq \dfrac{\partial v}{\partial x}$ và vì vậy **F** không là trường thế.

Định lý sau đây là sự tổng quát hóa của tiêu chuẩn trên để xác định trường đã cho có là trường thế trong $\mathbb{R}^3$.

Định lý 13.3.4. *Giả sử trường vector* **F** *và vector xoáy* curl **F** *liên tục trên miền liên thông đơn $D \subset \mathbb{R}^3$. Khi đó* **F** *là trường thế nếu và chỉ nếu* curl $\mathbf{F} = \mathbf{0}$.

Như trong $\mathbb{R}^2$, một miền liên thông trong R^3 được mô tả thông thường như một miền không có lỗ hổng.

Chứng minh. Kết quả này sẽ được chứng ở phần 13.6 như một ứng dụng của định lý Stokes. □

Chú ý: Nếu đồng nhất $\mathbb{R}^2$ như là không gian con của $\mathbb{R}^3$ thì định lý 13.3.3 là một hệ quả của định lý 13.3.4 khi xem $F(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$ là $G(x, y, z) = (u(x, y, 0), v(x, y, 0), 0)$.
Bởi vì

$$\operatorname{curl}\mathbf{G} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u(x,y,0) & v(x,y,0) & 0 \end{vmatrix} = 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

Ta có $\operatorname{curl}\mathbf{G} = \mathbf{0}$ khi và chỉ khi

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y}$$

Khi đó Định lý 13.4 trở thành tiêu chuẩn kiểm định bằng chéo các đạo hàm riêng cho một trường thế $\mathbf{F}$ trong R^2.

Ví dụ 13.3.5. Tìm hàm số thế vị của trường thế trong R^3
Chứng tỏ rằng

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \langle 20x^3z + 2y^2, 4xy, 5x^4 + 3z^2\rangle$$

là một trường thế. Tìm hàm số thế vị của nó.
Giải
Vector xoáy của trường đã cho là

$$\begin{aligned} \operatorname{curl}\mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 20x^3z + 2y^2 & 4xy & 5x^4 + 3z^2 \end{vmatrix} \\ &= 0\mathbf{i} - (20x^3 - 20x^3)\mathbf{j} + (4y - 4y)\mathbf{k} = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Do đó $\mathbf{F}$ là trường thế. Giả sử f là hàm số thế vị, tức là $\nabla f = (f'_x, f'_y, f'_z) = F$.
Do $f'_x = 20x^3z + 2y^2 \Rightarrow f(x, y, z) = 5x^4z + 2xy^2 + g(y, z)$, trong đó $g(y, z)$ không phụ thuộc x.
Đạo hàm kết quả trên theo y và so sánh thành phần thứ 2 của $\mathbf{F}$:

$$f'_y = 4xy + g'_y = 4xy$$

Suy ra $g'_y(y, z) = 0 \Rightarrow g(y, z) = h(z)$, trong đó $h(z)$ không phụ thuộc x và y.
So sánh đạo hàm f'_z với thành phần thứ 3 của F:

$$f'_z = 5x^4 + g'_z = 5x^4 + h'(z) = 5x^4 + 3z^2$$

Suy ra $h'(z) = 3z^2 \Rightarrow h(z) = z^3 + c$.
Chọn hằng số $c = 0$, chúng ta có hàm số thế vị:

$$f(x, y, z) = 5x^4z + 2xy^2 + z^3$$

13.3.3 Sự độc lập của đường đi

Định nghĩa 13.3.5. Tích phân đường $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R}$ được gọi là **độc lập đường đi** trong miền D nếu với hai điểm bất kì P và Q trong D, tích phân đường lấy dọc theo các đường cong trơn từng khúc nối P và Q trong D có giá trị giống nhau.

Định lý sau đây cung cấp các điều kiện tương đương để tích phân đường độc lập với đường đi.

Định lý 13.3.6. *Cho trường Vector* $\mathbf{F}$ *liên tục trên tập mở liên thông* D*. Các điều kiện sau là tương đương:*

(i) $\mathbf{F}$ *là trường thế trên* D*.*

(ii) $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} = 0$ *với mọi đường cong trơn, kín trong* D*.*

(iii) $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R}$ *không phụ thuộc vào hình dạng của đường cong* $C \subset D$*.*

Từ định lý trên, một hệ quả được suy ra: Công của một vật di chuyển trên đường cong kín dưới tác động của trường thế là bằng 0.

Ví dụ 13.3.6. Công với đường đi kín trong trường lực là trường thế
Chứng minh rằng không có công nào được sinh ra khi một vật di chuyển dọc một đường cong kín trong một miền liên thông mà trường lực tại miền đó là trường thế.
Giải Giả sử $\mathbf{F}$ là trường thế với $\nabla f = \mathbf{F}$, trong đó f là hàm số thế vị của $\mathbf{F}$. Vì đường di chuyển là kín nên nó bắt đầu và kết thúc tại cùng 1 điểm P. Do đó, công được tính bởi

$$W = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} = f(P) - f(P) = 0.$$

Bây giờ, ta có thể tính một tích phân đường cho trước theo nhiều cách khác nhau. Ta có thể:
(1) Tham số hóa C và sử dụng tham số hóa để đưa tích phân đường về tích phân thông thường theo biến t trên đoạn $[a, b]$.
(2) Kiểm tra xem $\mathbf{F}$ có là trường thế không. Nếu nó là một trường thế, tìm hàm số

thế vị f của nó và sau đó dùng định lý cơ bản cho tích phân đường.
(3) Nếu $\mathbf{F}$ là trường thế, tìm đường đi C_1 đơn giản nhất có thể, đồng thời C_1 có cùng điểm đầu và cuối với C. Vì tích phân đường là độc lập đường đi nên $\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R}$.
Sau đây là một ví dụ minh họa.

Ví dụ 13.3.7. Tính tích phân $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R}$ trong đó

$$\mathbf{F}(x,y) = [(2x - x^2y)e^{-xy} + \tan^{-1} y]\mathbf{i} + \Big[\frac{x}{y^2+1} - x^3e^{-xy}\Big]\mathbf{j}$$

và C là:

a. Eplip: $9x^2 + 4y^2 = 36$

b. đường cong có phương trình tham số $x = t^2 \cos \pi t,\ y = e^{-t} \sin \pi t,\ t \in [0,1]$

Giải Ta có

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\Big[\frac{x}{y^2+1} - x^3e^{-xy}\Big] &= \frac{1}{y^2+1} + (x^3y - 3x^2)e^{-xy}\\ &= \frac{\partial}{\partial y}[(2x - x^2y)e^{-xy} + \tan^{-1} y]\end{aligned}$$

Do đó $\mathbf{F}$ là trường thế.

a. Vì $\mathbf{F}$ là trường thế và C là đường cong kín nên $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} = 0$

b. Điểm đầu của C là P(0,0) (tương ứng t=0) và điểm cuối của C là Q(-1,0) (tương ứng t=1). Vì $\mathbf{F}$ là trường thế cho nên $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R}$ không phụ thuộc vào hình dạng của C. Chúng ta có thể thay C bằng đoạn thẳng PQ có phương trình tham số $x = -t,\ y = 0,\ t \in [0,1]$. Tích phân đường theo đoạn thẳng đó ta được

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} &= \int_{PQ} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} \int_0^1 \Big[(2(-t)e^0 + \tan^{-1} 0)(-1) + (-t - (-t)^3e^0)(0)\Big]dt\\ &= \int_0^1 2tdt = 1.\end{aligned}$$

13.4 Định lý Green

13.4.1 Định lý Green

Định lý Green cho ta mối liên hệ giữa tích phân đường lấy theo đường cong kín và tích phân 2 lớp lấy trên miền giới hạn bởi đường cong kín đó. Trước khi trình bày

Định lý, ta sẽ giới thiệu một số khái niệm liên quan. **Đường cong Jordan** là một đường cong kín không tự cắt.

Cho C là đường cong Jordan. Hướng dương trên C là hướng mà khi một người di chuyển trên đường cong theo hướng đó thì miền giới hạn bởi đường cong nằm bên trái của người di chuyển.

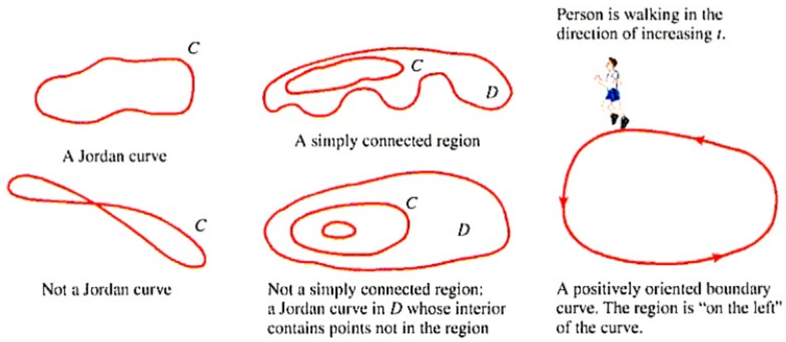


Figure 13.19 Jordan curves and simply connected regions

Định lý 13.4.1. *Giả sử D là miền liên thông đơn giới hạn bởi đường cong Jordan kín trơn từng khúc, định hướng dương C và $\mathbf{F}(x,y) = M(x,y)\mathbf{i} + N(x,y)\mathbf{j}$ là trường vector khả vi liên tục trên D. Khi đó*

$$\oint_C (Mdx + Ndy) = \iint\limits_D \Big(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\Big) dA.$$

Ví dụ 13.4.1. Chứng tỏ rằng công thức Green đúng đối với tích phân đường $\int_C (-ydx + xdy)$, trong đó C là đường cong kín như hình vẽ.

Giải

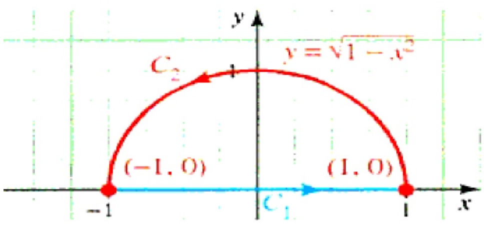


Figure 13.22 Path C

Trước hết, chúng ta áp dụng cách tính không dùng định lý Green. Đường cong C bao gồm 2 đoạn: đoạn thẳng C_1 từ $(-1;0)$ đến $(1;0)$; và nửa đường tròn C_2 từ $(1;0)$ đến $(-1;0)$. Tham số hóa C_1 và C_2:

$$(C_1): x = t,\ y = 0,\ t \in [-1;1]$$
$$(C_2): x = \cos t,\ y = \sin t,\ t \in [0;\pi]$$

Từ đó, ta được

$$\begin{aligned}\int_C(-ydx+xdy) &= \int_{-1}^{1}[-0dt+td0]+\int_0^{\pi}[-\sin t(-\sin t)dt+\cos t(\cos t)dt]\\ &= \int_0^{\pi}(\sin^2 t+\cos^2 t)dt\\ &= \int_0^{\pi}1dt=\pi.\end{aligned}$$

Sau đây chúng ta tính lại tích phân trên bằng cách áp dụng Định lý Green. Rõ ràng là các điều kiện của định lý thỏa mãn. Do đó

$$\begin{aligned}\int_C(-ydx+xdy) &= \iint\limits_D\Big(\frac{\partial}{\partial x}(x)-\frac{\partial}{\partial y}(-y)\Big)dA\\ &= \iint\limits_D 2dA\\ &= 2S_D=\pi.\end{aligned}$$

Ở đây D là miền nửa hình tròn bán kính bằng 1 nên $S_D=\frac{\pi}{2}$.

Ví dụ 13.4.2. Tính công với định lý Green

Cho đường cong kín C như hình vẽ. Tìm công để di chuyển một vật dọc theo C trong trường lực

$$\mathbf{F}(x,y)=(x+xy^2)\mathbf{i}+2(x^2y-y^2\sin y)\mathbf{j}.$$

Giải Công W được tính bởi tích phân đường $\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{R}$. Chú ý rằng $\mathbf{F}$ có đạo hàm liên tục trên miền D giới hạn bởi C, và vì D liên thông với biên định hướng dương (C) nên các giả thiết của Định lý Green được thỏa mãn. Từ đó

$$\begin{aligned}W &= \oint \mathbf{F}\cdot d\mathbf{R}\\ &= \iint\limits_D\left[\frac{\partial}{\partial x}(2x^2y-2y^2\sin y)-\frac{\partial}{\partial y}(x+xy^2)\right]dA=\iint\limits_D(4xy-2xy)dA\\ &= 2\int_0^1\int_{x^2}^1 xydydx=2\int_0^1\frac{1}{2}xy^2\Big|_{y=x^2}^{y=1}dx=\int_0^1(x-x^5)dx=\left[\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{6}x^6\right]\Big|_0^1\\ &= \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

13.4.2 Tính diện tích sử dụng tích phân đường

Định lý 13.4.2. *Cho D là miền liên thông đơn trong mặt phẳng giới hạn bởi đường cong kín, trơn từng khúc, định hướng dương C. Khi đó diện tích S_D của D được xác* *định bởi một trong các tích phân đường sau đây:*

$$S_D = \oint_C xdy = -\oint_C ydx = \frac{1}{2}\oint_C [xdy - ydx]$$

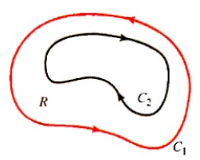
Ví dụ 13.4.3. Tính diện tích miền D tạo bởi elip E:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{13.1}$$

Giải Phương trình tham số của Elip E cho bởi: $x = a\cos t,\ y = b\sin t,\ t \in [0, 2\pi]$ (lưu ý chiều trên E là ngược kim đồng hồ khi t tăng). Do đó:

$$\begin{aligned} S_D &= \frac{1}{2}\oint_C [xdy - ydx] \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} [(a\cos t)(b\cos t)dt - (b\sin t)(-a\sin t)dt] \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} [ab\cos^2 t + ab\sin^2 t]dt \\ &= \frac{ab}{2}\int_0^{2\pi} [1]dt = \pi ab. \end{aligned}$$

13.4.3 Định lý Green cho miền đa liên



a. A doubly-connected region with oriented boundary curves

Ở trên chúng ta đã phát biểu định lý Green cho miền liên thông đơn. Tuy nhiên, Định lý đó có thể được mở rộng cho miền liên thông, đa liên, tức là miền có một hoặc nhiều lỗ thủng. Hình bên minh họa cho miền 2 liên với một lỗ thủng. Biên của miền đó gồm một đường cong ngoài C_1 và một đường cong trong C_2. Chiều dương của biên của miền đó là chiều mà đi dọc trên biên theo chiều đó thì miền R giới hạn bởi biên luôn nằm bên trái. Tức là, C_1 có chiều ngược kim đồng hồ và C_2 cùng chiều kim đồng hồ.

Định lý 13.4.3. *Cho R là miền hai liên, liên thông với các biên C_1 và C_2 định hướng dương như trình bày trên. Nếu các biên và trường vector $F(x, y) = M\mathbf{i} + N\mathbf{j}$ thỏa các giả thiết của định lý Green thì ta có*

$$\iint_D \Big(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\Big)dA = \oint_{C_1}(Mdx + Ndy) + \oint_{C_2}(Mdx + Ndy).$$

Ví dụ 13.4.4. Tính

$$\oint_C \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2},$$

trong đó C là đường cong trơn jordan bao quanh gốc tọa độ $(0, 0)$.

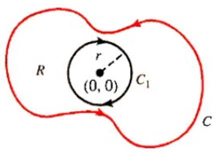


Figure 13.26 The region *R* for doubly connected regions

Giải Đặt $M(x, y) = \dfrac{-y}{x^2 + y^2}$, $N(x, y) = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$. Dễ thấy rằng tại mọi điểm khác điểm gốc thì

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

Gọi C_1 là đường tròn tâm tại gốc và có bán kính r đủ nhỏ để nó nằm hoàn toàn trong C. Ký hiệu R là miền giữa C và C_1. Vì $\frac{\partial N}{\partial x} = \dfrac{\partial M}{\partial y}$ trên R cho nên theo định lý Green cho miền đa liên,

$$\oint_C \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2} + \oint_{C_1} \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2} = \iint_R \Big(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\Big) dA = 0.$$

Như vậy

$$\oint_C \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2} = -\oint_{C_1} \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2} = \oint_{-C_1} \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2}.$$

Trong đó $-C_1$ là C_1 sau khi đổi hướng. Nên nhớ rằng để áp dụng định lý thì C_1 là biên trong nên chiều trên C_1 cùng chiều kim đồng hồ. Do đó $-C_1$ có chiều ngược kim đồng hồ. Phương trình tham số của $-C_1$ (theo chiều ngược kim đồng hồ) là: $x = r\cos t,\ y = r\sin t,\ t \in [0, 2\pi]$. Từ đó ta được

$$\begin{aligned}
\oint_C \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2} &= \oint_{-C_1} \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2} \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{-r\sin t(-r\sin t)dt + r\cos t(r\cos tdt)}{r^2\cos^2 t + r^2 \sin t^2} \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{r^2\sin^2 t + r^2\cos^2 t}{r^2\cos^2 t + r^2\sin^2} dt \\
&= \int_0^{2\pi} dt = 2\pi.
\end{aligned}$$

13.4.4 Các dạng biểu diễn khác của định lý Green

Định lý Green có thể biểu diễn dưới 2 dạng khác, và từ hai dạng đó giúp ta có thể mở rộng định lý lên không gian $\mathbb{R}^3$. Trước tiên chú ý rằng curl của trường vector

$\mathbf{F}(x,y) = M\mathbf{i} + N\mathbf{j}$ xác định bởi

$$\operatorname{curl}\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ M(x,y) & N(x,y) & 0 \end{vmatrix} = 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + (N'_x - M'_y)\mathbf{k}.$$

Do đó

$$\iint\limits_D \Big(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\Big) dA = \iint\limits_D (\operatorname{curl}\mathbf{F}\cdot\mathbf{k})dA.$$

Mặt khác

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{R} = \oint_C \mathbf{F}\cdot\frac{d\mathbf{R}}{ds}\,ds = \oint_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds$$

trong đó $\mathbf{T} = \dfrac{dx}{ds}\mathbf{i} + \dfrac{dy}{ds}\mathbf{j}$ là vector tiếp tuyến đơn vị trên đường cong. Kết hợp những kết quả trên ta được

$$\oint \mathbf{F}\cdot d\mathbf{R} = \iint\limits_D \Big(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\Big) dA$$

$$\oint \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds = \iint\limits_D (\operatorname{curl}\mathbf{F}\cdot\mathbf{k})\,dA.$$

Ta sẽ mở rộng kết quả này cho mặt trong R^3, và nó được gọi là *định lý Stokes* ở mục 13.6.

Ta vừa biểu diễn Định lý Green được dưới dạng $\mathbf{F}.\mathbf{T}$, thành phần tiếp tuyến của trường vector $\mathbf{F}$. Kết quả sau chỉ ra rằng định lý Green cũng có thể được biểu diễn dưới dạng $\mathbf{F}\cdot\mathbf{N}$, thành phần pháp tuyến của $\mathbf{F}$. Khi kết quả này được mở rộng ra $\mathbb{R}^3$ trong phần 13.7, nó được gọi là *định lý phân kì.*

Định lý 13.4.4. *Giả sử rằng $\mathbf{F}(x,y) = M(x,y)\mathbf{i} + N(x,y)\mathbf{j}$ xác định trên miền D với biên kín trơn từng khúc sao cho các giả thiết định lý Green thỏa mãn. Khi đó*

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds = \iint\limits_D (\operatorname{curl}\mathbf{F}\cdot\mathbf{k})dA$$

Và

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,ds = \iint\limits_D \operatorname{div}\,\mathbf{F}\,dA.$$

Chứng minh. Đẳng thức đầu đã được chứng minh ở trên. Ta chỉ cần chứng minh đẳng thức sau. Tham số hóa đường cong C với tham số là độ dài cung s sao cho nó định hướng dương, trong đó $\mathbf{R}(s) = x(s)\mathbf{i} + y(s)\mathbf{j}$ là véc tơ vị trị trên C. Véc tơ tiếp tuyến đơn vị trên C cho bởi $\mathbf{T} = \mathbf{R}'(s) = x'(s)\mathbf{i} + y'(s)\mathbf{j}$. Từ đó, véc tơ pháp tuyến hướng ra ngoài là $\mathbf{N} = y'(s)\mathbf{i} - x'(s)\mathbf{j}$.

$$\begin{aligned}
\oint_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,ds &= \int_a^b (P\mathbf{i} + Q\mathbf{j})(\frac{dy}{dS}\mathbf{i} - \frac{dx}{dS}\mathbf{j})\,ds \\
&= \oint_a^b (-Qdx + Pdy) \\
&= \iint_D \Big(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\Big)dxdy \\
&= \iint_D \operatorname{div}\mathbf{F}\,dA.
\end{aligned}$$

□

13.4.5 Đạo hàm theo pháp tuyến

Định nghĩa 13.4.5. Đạo hàm theo pháp tuyến của f, ký hiệu $\partial f/\partial n$, là đạo hàm của f theo hướng pháp tuyến đơn vị $\mathbf{N}$. Như vậy

$$\frac{\partial f}{\partial n} = \nabla f\cdot\mathbf{N}$$

trong đó $\mathbf{N}$ là vector pháp tuyến đơn vị. Trong $\mathbb{R}^2$, $\mathbf{N} = \dfrac{dy}{ds}\mathbf{i} - \dfrac{dx}{ds}\mathbf{j}$ là một vector pháp tuyến đơn vị. Sử dụng định lý Green chúng ta chứng minh được:

$$\iint_D \nabla^2 f dxdy = \oint_C \frac{\partial f}{\partial n}dt$$

Ví dụ 13.4.5. Công thức Green cho tích phân của Laplacian

Giả sử f là một hàm số với đạo hàm riêng cấp 1 và cấp 2 liên tục trong miền liên thông đơn D. Nếu đường cong đóng trơn từng khúc định hướng dương có biên D, chứng minh

$$\iint_D \nabla^2 f dxdy = \oint_C \frac{\partial f}{\partial n}dt$$

với $\nabla^2 f = f_{xx} + f_{yy}$ là Laplacian của f và $\frac{\partial f}{\partial n} = \nabla f.\mathbf{N}$ là đạo hàm pháp tuyến của f.

Giải Cho $u = -\dfrac{\partial f}{\partial y}$ và $v = \dfrac{\partial f}{\partial x}$. Thì ta có $\nabla^2 f = f_{xx} + f_{yy} = \dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{\partial v}{\partial y}$ và

$$\begin{aligned}
\iint\limits_D \nabla^2 f dxdy &= \iint\limits_D \Big(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\Big) dxdy \\
&= \oint_C (udx + vdy)\, dS \\
&= \oint \Big(u\frac{dx}{dS} + v\frac{dy}{dS}\Big)\, dS \\
&= \oint_C \Big(-\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dx}{dS} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dy}{dS}\Big)\, dS \\
&= \oint_C \Big(f_x\frac{dy}{dS} - f_y\frac{dx}{dS}\Big)\, dS \\
&= \oint_C \nabla f\Big(\frac{dy}{dS}\mathbf{i} - \frac{dx}{dS}\mathbf{j}\Big)\, dS \\
&= \oint_C \nabla f.\mathbf{N}\, dS \\
&= \oint_C \frac{\partial f}{\partial n}\, dS.
\end{aligned}$$

13.5 Tích phân mặt

Định nghĩa 13.5.1. Mặt cong trơn, mặt cong trơn từng mảnh
Một mặt cong gọi là **trơn** nếu tại mỗi điểm trên nó có một vector pháp tuyến khác 0. Một mặt cong gọi là **trơn từng mảnh** nếu nó hợp thành từ một số hữu hạn các mặt cong trơn.

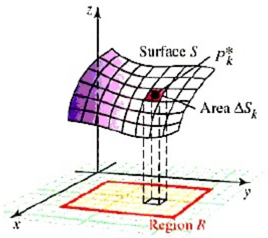
13.5.1 Định nghĩa tích phân mặt

Định nghĩa 13.5.2. Cho hàm ba biến $g(x, y, z)$ liên tục trên mặt cong trơn từng mảnh S. Chia S thành n mảnh nhỏ. Mảnh thứ k có diện tích ΔS_k và chọn trên đó điểm bất kỳ $P_k^*(x_k^*, y_k^*, z_k^*)$. Ký hiệu $\|\Delta S\|$ là diện tích của mảnh nhỏ lớn nhất.

Nếu giới hạn $\lim\limits_{\|\Delta S\|\to 0} \sum\limits_{k=1}^{n} g(P_k^*)\Delta S_k$ tồn tại thì ta gọi giới hạn đó là **tích phân**

mặt của $g(x, y, z)$ trên S và ký hiệu

$$\iint_S g(x, y, z)\, dS.$$



Construction of a Riemann sum

Như vậy

$$\iint_S g(x, y, z)\, dS = \lim_{\|\Delta S\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} g(P_k^*) \Delta S_k.$$

13.5.2 Cách tính

Mệnh đề 13.5.3. *Giả sử phương trình của S là $z = f(x, y)$ và R là hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng Oxy. Giả sử f'_x, f'_y liên tục trên R. Khi đó*

$$\iint_S g(x, y, z)\, dS = \iint_R g(x, y, f(x, y)) \sqrt{1 + [f'_x]^2 + [f'_y]^2} dA$$

Ví dụ 13.5.1. Tính tích phân

$$\iint_S (xz + 2x^2 - 3xy)\, dS$$

trong đó S là phần mặt phẳng có phương trình $2x - 3y + z = 6$ nằm phía trên ($z \geq 0$) hình vuông $R = \{(x, y)|2 \leq x \leq 3; 2 \leq y \leq 3\}$.

Giải Phương trình mặt S được viết lại là $z = 6 - 2x + 3y = f(x, y)$. Kiểm tra thấy rằng $f(x, y) \geq 0$ tại mọi điểm trên R. Theo mệnh đề ta có

$$\begin{aligned}
\iint_S g\, dS &= \iint_S (x(6 - 2x + 3y) + 2x^2 - 3xy) \sqrt{(-2)^2 + 3^2} dA \\
&= \iint_R [x(6 - 2x + 3y) + 2x^2 - 3xy] \sqrt{14} dxdy \\
&= 6\sqrt{14} \int_2^3 xdx \int_2^3 dy \\
&= 15\sqrt{14}.
\end{aligned}$$

Mệnh đề 13.5.4. *Nếu mặt S là trơn từng mảnh thì diện tích của nó được xác định bởi công thức sau*

$$A = \iint_S dS$$

Một trong những ứng dụng hữu ích của tích phân mặt là giúp tính khối tâm của một bản mỏng có dạng là một phần mặt cong S cho trước. Nếu ký hiệu $\rho(x, y, z)$ là khối lượng riêng (khối lượng trên mỗi đơn vị diện tích) tại điểm (x, y, z) trên một bản mỏng S thì tổng khối lượng m của bản mỏng cho bởi công thức

$$m = \iint_S \rho(x, y, z)\ dS$$

Và khối tâm của S là điểm $C(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ với

$$\overline{x} = \frac{1}{m}\iint_S x.\rho\ dS,\ \overline{y} = \frac{1}{m}\iint_S y.\rho\ dS,\ \overline{z} = \frac{1}{m}\iint_S z.\rho\ dS$$

Ví dụ 13.5.2. Tìm khối lượng của bản mỏng S có khối lượng riêng là $\rho(x, y, z) = z$ và có hình dáng nửa mặt cầu $z = (a^2 - x^2 - y^2)^{1/2}$.

Giải Từ phương trình của S suy ra

$$\begin{aligned} dS &= \sqrt{[z'_x]^2 + [z'_y]^2 + 1dA} \\ &= \sqrt{\left(\frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}\right)^2 + \left(\frac{-y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}\right)^2 + 1dA} \\ &= \sqrt{\frac{x^2}{a^2 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{a^2 - x^2 - y^2} + 1dA} \\ &= \frac{adA}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \end{aligned}$$

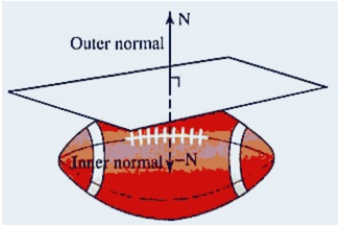
Do vậy khối lượng S là

$$\begin{aligned} m &= \iint_S \rho(x, y, z)\ dS \\ &= \iint_S z\frac{adA}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \\ &= \iint_S (a^2 - x^2 - y^2)^{1/2}\frac{adA}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \\ &= a\iint_R dA = \pi a^3. \end{aligned}$$

Lưu ý rằng R là hình chiếu của S lên Oxy nên nó là hình tròn bán kính a. Nghĩa là diện tích R là $S_R = \pi a^2$.

13.5.3 Tích phân thông lượng

Tích phân mặt là công cụ quan trọng để nghiên cứu dòng chất lỏng qua một mặt. Để trình bày ứng dụng đó, chúng ta cần một số khái niệm sau.



Định nghĩa 13.5.5. Ta nói mặt cong S là **định hướng được** nếu S có một trường vector pháp tuyến đơn vị biến thiên liên tục trên đó.

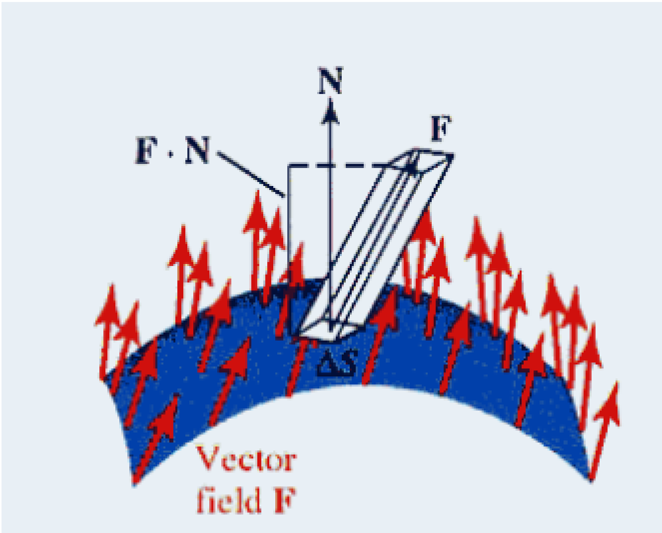
Những mặt thông thường như mặt cầu, mặt nón, mặt trụ là định hướng được. Tuy nhiên ta có thể dễ dàng xây dựng những mặt không định hướng được, chẳng hạn dải **Mobius**. Nếu S là mặt định hướng được, thì mỗi véc tơ pháp tuyến $\mathbf{N}$ có thể hướng vào trong S hoặc hướng ra ngoài S như minh họa ở hình bên.

Định nghĩa 13.5.6. Xét một mặt S với trường véc tơ pháp tuyến đơn vị liên tục $\mathbf{N}$ và một chất lỏng chảy ổn định qua một bề mặt S. *Mật độ thông lượng* là đại lượng đo lượng chất lỏng chảy qua một đơn vị diện tích bề mặt trong một đơn vị thời gian.

Trong vật lý cơ bản, người ta đã chỉ ra rằng đại lượng đó tỉ lệ thuận với số véc tơ trường đi qua mặt S. Điều này có thể được hình dung như một dòng nước chảy qua một tấm lưới.

Figure 13.38 Water flowing through a net

Giả sử ΔS là diện tích của một mảnh nhỏ của mặt S. Khi đó lượng chất lỏng chảy qua mảnh đó có thể được xấp xỉ bằng thể tích của hình trụ với chiều cao **F.N** và diện tích đáy là ΔS (hình vẽ), tức là $\Delta V \approx (\mathbf{F} \cdot \mathbf{N})\Delta S$.



Như vậy ta có thể đo toàn bộ thể tích của chất lỏng chảy qua bề mặt trong mỗi đơn vị thời gian bằng cách sử dụng tích phân mặt của **F.N**, đại lượng đó được gọi là *thông lượng*.

Định nghĩa 13.5.7. Trường vector **F** có các thành phần mà đạo hàm riêng liên tục trên mặt S. Mặt S định hướng theo pháp tuyến đơn vị **N**. Khi đó thông lượng của **F** qua S định bởi

$$Flux = \iint\limits_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, dS.$$

Giả sử mặt S có phương trình $z = z(x, y)$, $(x, y) \in R$. Khi đó vector $\mathbf{n} = \langle -z'_x, -z'_y, 1\rangle$ là một vector pháp tuyến trên S và $\mathbf{N} = \frac{n}{\|n\|}$ là pháp vector đơn vị **hướng lên** của S (thành phần thứ 3 dương). Ngược lại, $\mathbf{N} = -\frac{n}{\|n\|}$ là pháp vector đơn vị **hướng xuống** của S. Bởi vì $dS = \sqrt{[z'_x]^2 + [z'_y]^2 + 1dA} = \|n\|dA$, cho nên ta có mệnh đề sau.

Mệnh đề 13.5.8. *Nếu S định hướng lên thì*

$$\iint\limits_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, dS = \iint\limits_R \mathbf{F}(x, y, z(x, y))\langle -z'_x, -z'_y, 1\rangle dA.$$

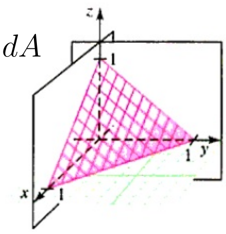
Nếu S định hướng xuống thì

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS = \iint_R \mathbf{F}(x,y,z(x,y))\langle z'_x, z'_y, -1\rangle dA$$

Chú ý rằng khi tính tích phân thông lượng (tích phân mặt loại 2), chúng ta phải chỉ rõ hướng của mặt S là lên hay xuống.

Ví dụ 13.5.3. Tính thông lượng của $\mathbf{F} = xy\mathbf{i} + z\mathbf{j} + (x+y)\mathbf{k}$ qua S với S là phần mặt phẳng có phương trình $x+y+z=1$ thuộc góc phần tám thứ nhất. Pháp vector trên S định hướng lên.

Giải Từ phương trình S suy ra $n = \langle -z'_x, -z'_y, 1\rangle = \langle 1,1,1\rangle$ cho nên



$$\begin{aligned} flux &= \iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS = \iint_R (xy, 1-x-y, x+y)\cdot\langle 1,1,1\rangle dA \\ &= \iint_R (xy+1-x-y+x+y)dA \\ &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} [xy+1]dy \\ &= \int_0^1 [x\frac{(1-x)^2}{2} + (1-x)]dx = \frac{13}{24}. \end{aligned}$$

Ví dụ 13.5.4. Tính dòng nhiệt bằng tích phân thông lượng

Cho R là miền bị chặn trên bởi paraboloid $z = 9 - x^2 - y^2$ và bị chặn dưới bởi mặt phẳng xy (hình vẽ).

Thí nghiệm chỉ ra rằng tốc độ của dòng nhiệt được cho bởi trường vector $\mathbf{H} = -K\nabla T$, với $T(x,y,z) = 2x + y - 3z^2$ là nhiệt độ tại mỗi điểm $P(x,y,z)$ trong miền và K là hằng số (*hằng số dẫn nhiệt*, được đo bằng thực nghiệm cho các bề mặt với vật chất khác nhau). Tìm tổng nhiệt $\iint_R \mathbf{H}.\mathbf{N}\,dS$ chảy ra khỏi miền (nghĩa là pháp tuyến đơn vị $\mathbf{N}$ hướng ra ngoài, xa điểm gốc).

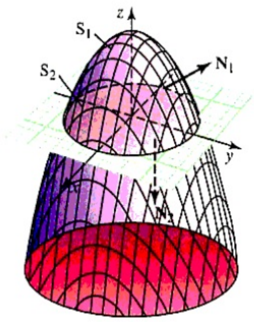


Figure 13.41 The surface
S bounded by the region *R*

Giải Chú ý rằng $\nabla T = \langle 2, 1, -6z\rangle$ và bề mặt S được hợp thành bởi mặt trên $S_1 : z = 9 - x^2 - y^2$ và mặt đáy là đĩa tròn $S_2 : x^2 + y^2 \leq 9$. Hơn nữa, S_2 chính là miền D thu được khi chiếu S_1 lên mặt phẳng xy.

Đối với S_1: Đặt $G = z + x^2 + y^2 - 9$. Khi đó $\nabla G = \langle 2x, 2y, 1\rangle$. Mặt trên S_1 có véc tơ pháp tuyến hướng lên nên tích phân thông lượng S_1 là

$$\begin{aligned}
\iint\limits_{S_1} \mathbf{H}\cdot\mathbf{N_1}\, dS &= \iint\limits_{S} -K\nabla T.\nabla G\, dS \\
&= \iint\limits_{D} -K\langle 2, 1, -6z\rangle \cdot \langle 2x, 2y, 1\rangle dA \\
&= \iint\limits_{D} -K[4x + 2y - 6(9 - x^2 - y^2)]dA \\
&= -K\int_0^{2\pi} \left[36\cos\theta + 18\sin\theta - \frac{243}{2}\right] d\theta \\
&= 243\pi K.
\end{aligned}$$

Với S_2: Véc tơ pháp tuyến $\mathbf{N_2} = -\mathbf{k} = \langle 0, 0, -1\rangle$ hướng xuống nên tích phân thông lượng xác định bởi

$$\begin{aligned}
\iint\limits_{S_2} \mathbf{H}\cdot\mathbf{N_2}\, dS &= \iint\limits_{D} -K\langle 2, 1, -6z\rangle.\langle 0, 0, -1\rangle dA \\
&= -K\iint\limits_{D} 6z dA \\
&= -K\iint\limits_{D} 0 dA \text{ (vì } z = 0 \text{ trên } S_2) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Vì vậy tổng nhiệt chảy ra ngoài là

$$\begin{aligned}\iint_S \mathbf{H}\cdot\mathbf{N}\, dS &= \iint_{S_1} \mathbf{H}\cdot\mathbf{N_1}\, dS + \iint_{S_2} \mathbf{H}\cdot\mathbf{N_2}\, dS \\ &= 243\pi K + 0 \\ &= 243\pi K.\end{aligned}$$

13.5.4 Tích phân theo phương trình tham số của mặt cong

Trong mục 12.4, chúng ta biết rằng nếu một mặt cong S cho dưới dạng phương trình tham số bởi hàm véc tơ

$$\mathbf{R}(u,v) = x(u,v)\mathbf{i} + y(u,v)\mathbf{j} + z(u,v)\mathbf{k},\ (u,v) \in D$$

xác định trên miền D nằm trong mặt phẳng xy thì diện tích mặt S cho bởi công thức

$$\iint_D \|\mathbf{R}_u \times \mathbf{R}_v\| dudv$$

Từ đó ta thu được công thức sau

Mệnh đề 13.5.9. *Nếu S trơn,f liên tục trên S thì:*

$$\iint_S f(x,y,z)\ dS = \iint_D f(\mathbf{R})\|\mathbf{R}_u \times \mathbf{R}_v\| dudv$$

Và thông lượng chảy qua mặt S xác định bởi

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\ dS = \iint_D \mathbf{F}\cdot(\mathbf{R}_u \times \mathbf{R}_v) dA.$$

Ví dụ 13.5.5. Tích phân mặt cho bề mặt được định nghĩa theo tham số
Tính $\iint_S (x+y+z)\ dS$ với S là bề mặt được định nghĩa theo tham số sau

$$\mathbf{R}(u,v) = (2u+v)\mathbf{i} + (u-2v)\mathbf{j} + (u+3v)\mathbf{k}$$

với $0 \le u \le 1, 0 \le v \le 2$.
Giải Ta có

$$\iint_S (x+y+z)\ dS = \iint_D f(\mathbf{R})\|\mathbf{R}_u \times \mathbf{R}_v\| du\ dV$$

Đầu tiên, ta cần tìm những thành phần cho tích phân mặt bên phải. Dùng $\mathbf{R}(u,v) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, ta thấy $x = 2u + v, y = u - 2v, z = u + 3v$ và vì $f(x,y,z) = x + y + z$ nên

$$\begin{aligned} f(\mathbf{R}) &= f(2u+v, u-2v, u+3v) \\ &= (2u+v) + (u-2v) + (u+3v) \\ &= 4u + 2v. \end{aligned}$$

Tiếp theo ta có $\mathbf{R}_u = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ và $\mathbf{R}_v = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$. Từ đó suy ra

$$\mathbf{R}_u \times \mathbf{R}_v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = (3+2)\mathbf{i} - (6-1)\mathbf{j} + (-4-1)\mathbf{k} = 5\mathbf{i} - 5\mathbf{j} - 5\mathbf{k}.$$

Vì vậy $\|\mathbf{R}_u \times \mathbf{R}_v\| = \sqrt{5^2 + (-5)^2 + (-5)^2} = 5\sqrt{3}$. Thế những giá trị này vào vế phải công thức ban đầu, ta được

$$\begin{aligned} \iint\limits_S (x+y+z)\ dS &= \iint\limits_D f(\mathbf{R})\|\mathbf{R}_u \times \mathbf{R}_v\| dudv \\ &= \int_0^2 \int_0^1 (4u+2v)(5\sqrt{3}) dudv \\ &= 5\sqrt{3} \int_0^2 [2u^2 + 2uv]_0^1\ dV \\ &= 5\sqrt{3} \int_0^2 (2+2v) dv \\ &= 5\sqrt{3}[2v + v^2]_0^2 \\ &= 5\sqrt{3}(8) \\ &= 40\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Ví dụ 13.5.6. Tính thông lượng của trường $\mathbf{F} = z\mathbf{i} + x\mathbf{j} + (y+z)\mathbf{k}$ qua mặt cong S có phương trình tham số:

$$\mathbf{R}(u,v) = uv\mathbf{i} + (u-v)\mathbf{j} + (2u+v)\mathbf{k},\ (u,v) \in D$$

Miền D giới hạn bởi các đường $u = 0,\ v = 0,\ u + v = 1$.

Giải Tại một điểm trên mặt cong thì $x = uv,\ y = u - v,\ z = 2u + v$ cho nên tại đó

$$\mathbf{F}(u,v) = (2u+v)\mathbf{i} + uv\mathbf{j} + 3u\mathbf{k}.$$

Hơn nữa, $\mathbf{R}_u = v\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{R}_v = u\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$ nên

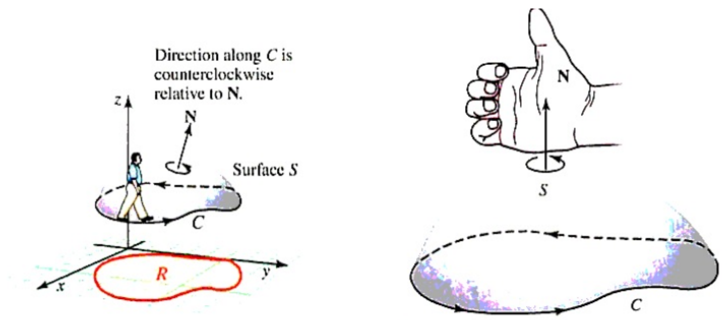
$$\mathbf{R}_u \times \mathbf{R}_v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ v & 1 & 2 \\ u & -1 & 1 \end{vmatrix} = 3\mathbf{i} + (2u - v)\mathbf{j} - (u + v)\mathbf{k}$$

Vậy thông lượng

$$\begin{aligned} \iint\limits_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, dS &= \iint\limits_D \mathbf{F} \cdot (\mathbf{R}_u \times \mathbf{R}_v) dA \\ &= \iint\limits_D \langle 2u + v, uv, 3u \rangle \cdot \langle 3, 2u - v, -u - v \rangle du\, dV \\ &= \int_0^1 du \int_0^{1-u} (2u^2 v - 3u^2 - uv^2 - 3uv + 6u + 3v) du\, dV \\ &= \int_0^1 \frac{1}{6}(u - 1)(8u^3 - u^2 - 16u - 9) du = \frac{137}{120}. \end{aligned}$$

13.6 Định lý Stokes

Định nghĩa 13.6.1. Trên mặt cong được định hướng S, cho đường cong kín C có định hướng. Chúng ta nói hướng trên C là **tương thích với hướng trên S** nếu một người đứng trên C, hướng đầu theo pháp tuyến N (hướng ra ngoài) của S, đi theo chiều trên C thì miền giới hạn bởi C nằm bên tay trái.



a. Positive direction (counterclockwise) **b.** Fingers point in the positive direction

Figure 13.46 Compatible orientation

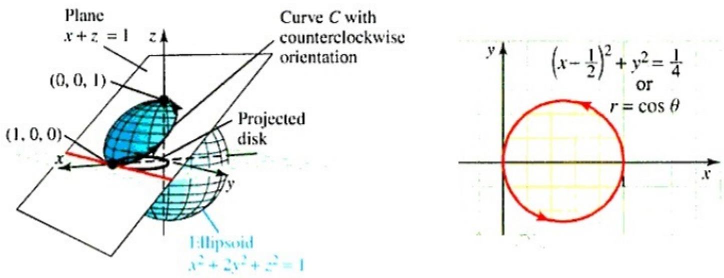
Định lý 13.6.2. *Cho mặt định hướng S có biên là đường cong Jordan trơn từng khúc C. Hướng trên C là tương thích với hướng trên S. Nếu trường vector $\boldsymbol{F}$ khả vi liên tục trên S thì*

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} = \iint\limits_S (\operatorname{curl} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N})\, dS$$

Ví dụ 13.6.1. Tính tích phân đường

$$\oint_C \left(\frac{1}{2}y^2dx + zdy + xdz\right)$$

với C là giao tuyến của mặt phẳng $x + z = 1$ và mặt ellipsoid $x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$. Hướng trên C là hướng dướng (ngược chiều kim đồng hồ) nếu nhìn từ phía trên xuống.



Giải Tích phân cần tìm có dạng $\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{R}$ trong đó $\mathbf{F} = \dfrac{y^2}{2}\mathbf{i} + z\mathbf{j} + x\mathbf{k}$. Áp dụng định lý Stoke, ta có

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{R} = \iint_S (\operatorname{curl}\mathbf{F}\cdot\mathbf{N})\, dS$$

Có rất nhiều mặt giới hạn bởi đường cong C, ta chọn mặt S là phần mặt phẳng $x + z = 1$. Tiếp theo, ta sẽ tính các thành phần của tích phân bên phải. Ta có

$$\operatorname{curl}\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{y^2}{2} & z & x \end{vmatrix} = -\mathbf{i} - \mathbf{j} - y\mathbf{k}$$

Từ phương trình S, véc tơ pháp tuyến đơn vị hướng lên của S là $\mathbf{N} = \frac{1}{\sqrt{2}}\langle 1, 0, 1\rangle$. Từ đó suy ra

$$\operatorname{curl}\mathbf{F}\cdot\mathbf{N} = \frac{-1}{\sqrt{2}}(1 + y).$$

Hơn nữa, $dS = \sqrt{[z'_x]^2 + [z'_y]^2 + 1}dA = \sqrt{2}dA.$

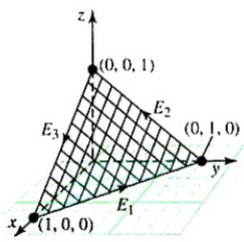
Cuối cùng, vì C là giao tuyến của trình mặt $x+z = 1$ với ellipsoid $x^2+2y^2+z^2 = 1$, bằng cách thế $z = 1 - x$ vào phương trình Ellipsoid ta được

$$x^2 + 2y^2 + (1 - x)^2 = 1 \Leftrightarrow (x - \frac{1}{2})^2 + y^2 = \frac{1}{4}.$$

Cho nên hình chiếu của S lên Oxy là hình tròn $(x-\frac{1}{2})^2+y^2 \le \frac{1}{4}$. Trong tọa độ cực thì biên hình tròn này có phương trình $r=\cos\theta$. Vậy

$$\begin{aligned}\oint_C (\frac{1}{2}y^2dx+zdy+xdz) = \oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{R} &= \iint_S (\operatorname{curl}\mathbf{F}\cdot\mathbf{N})\, dS \\ &= \iint_D \frac{-1}{\sqrt{2}}(1+y)\sqrt{2}dA \\ &= -\int_0^{\pi} d\theta \int_0^{\cos\theta} (1+r\sin\theta)rdr \\ &= -\int_0^{\pi}\Big[\frac{1}{2}\cos^2\theta+\frac{1}{3}\cos^3\theta\sin\theta\Big]d\theta = -\frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

Ví dụ 13.6.2. Cho S là phần mặt phẳng $x+y+z=1$ thuộc góc phần tám thứ nhất, C là biên của S (hướng trên C là ngược chiều kim đồng hồ nhìn từ phía trên - theo z). Hãy kiểm chứng định lý Stokes với S và trường vector $F=-\dfrac{3y^2}{2}\mathbf{i}-2xy\mathbf{j}+yz\mathbf{k}$.



Giải Trước hết chúng ta tính $\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{R}$.
Đường cong C bao gồm ba đoạn thẳng thuộc ba mặt phẳng tọa độ. Đặt E_1 : $y+x=1,\ z=0$ là phần của C thuộc mặt phẳng z=0. E_1 có hướng từ (1,0,0) đến (0,1,0) nên có phương trình tham số: $x=1-t,\ y=t,\ z=0,\ t\in[0,1]$, hay $\mathbf{R}(t)=\langle 1-t,t,0\rangle \Rightarrow d\mathbf{R}=\langle -dt,dt,0\rangle$ và $\mathbf{F}(t)=-\dfrac{3t^2}{2}\mathbf{i}-2t(1-t)\mathbf{j}$. Do đó

$$\int_{E_1}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{R}=\int_0^1(\frac{7}{2}t^2-2t)dt=\frac{1}{6}$$

Tương tự với $E_2: y+z=1,\ x=0$ hướng từ (0,1,0) đến (0,0,1) và $E_3: x+z=1,\ y=0$ hướng từ (0,0,1) đến (1,0,0) thì

$$\int_{E_2}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{R}=\int_0^1(1-t)tdt=\frac{1}{6},\ \int_{E_3}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{R}=0.$$

Vậy $\displaystyle\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{R}=\int_{E_1}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{R}+\int_{E_2}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{R}+\int_{E_3}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{R}=\frac{1}{3}$.

Tiếp theo, chúng ta tính $\iint\limits_S (\operatorname{curl}\mathbf{F}\cdot\mathbf{N})\,dS$. Từ $\mathbf{F}$ suy ra $\operatorname{curl}\mathbf{F} = z\mathbf{i} + y\mathbf{k}$. Véc tơ pháp tuyến đơn vị hướng lên của S là $\mathbf{N} = \frac{1}{\sqrt{3}}\langle 1,1,1\rangle$. Vì $z = 1 - x - y$ nên

$$\operatorname{curl}\mathbf{F}\cdot\mathbf{N} = (z\mathbf{i} + y\mathbf{k})(\frac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})) = \frac{1}{\sqrt{3}}(1-x-y+y) = \frac{1}{\sqrt{3}}(1-x).$$

Hơn nữa, từ phương trình của S ta được $dS = \sqrt{3}dA$.

Mặt khác, hình chiếu vuông góc D của S lên mặt phẳng Oxy giới hạn bởi là $x = 0, y = 0, x + y = 1$. Kết hợp lại ta được

$$\begin{aligned}\iint\limits_S (\operatorname{curl}\mathbf{F}\cdot\mathbf{N})\,dS &= \iint\limits_D \frac{1}{\sqrt{3}}(1-x)\sqrt{3}dA\\ &= \int_0^1 dx\int_0^{1-x}(1-x)dydx\\ &= \int_0^1 (1-x)^2dx = \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Vậy định lý Stokes được được thỏa mãn.

Đôi khi chúng ta dùng định lý Stokes để thay thế mặt cong phức tạp bằng mặt cong đơn giản hơn (có cùng biên) để tính tích phân mặt.

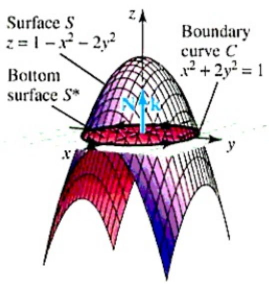
Ví dụ 13.6.3. Tính $\iint\limits_S (\operatorname{curl}\mathbf{F}\cdot\mathbf{N})\,dS$, trong đó S là phần mặt cong $z = 1 - x^2 - 2y^2,\ z \geq 0$ và $\mathbf{F} = (x, y^2, ze^{xy})$.

Giải Đặt S_1 là phần mặt phẳng $z = 0$ giới hạn bởi $x^2 + 2y^2 \leq 1$. Khi đó S và S_1 có chung biên C là đường elip $x^2 + 2y^2 = 1,\ z = 0$. Vậy

$$\iint\limits_S (\operatorname{curl}\mathbf{F}\cdot\mathbf{N})\,dS = \oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{R} = \iint\limits_{S_1} (\operatorname{curl}\mathbf{F}\cdot\mathbf{N})\,dS.$$

Khi đó tính vế phải đơn giản hơn. Thật thế, phương trình $S_1 : z = 0$ cho nên $\operatorname{curl}\mathbf{F} = zxe^{xy}\mathbf{i} - zye^{xy}\mathbf{j} = (0,0,0)$ và véc tơ pháp tuyến đơn vị của S_1 là $\mathbf{N} = \mathbf{k}$. Như vậy

$$\iint\limits_S (\operatorname{curl}\mathbf{F}\cdot\mathbf{N})\,dS = \iint\limits_{S_1} (\operatorname{curl}\mathbf{F}\cdot\mathbf{N})\,dS = 0.$$



13.6.1 Các ứng dụng lý thuyết của Định lý Stokes

Trong vật lý cũng như các lĩnh vực khác, định lý Stokes thường được dùng như một công cụ để thiết lập các tính chất tổng quát. Chẳng hạn, sau đây chúng ta sẽ ứng dụng nó để chứng minh Định lý 13.3.4.

Chứng minh Định lý 13.3.4

Nếu $\mathbf{F}$ trường thế và f là hàm số thế vị của $\mathbf{F}$, tức là $\nabla f = \mathbf{F}$. Thì $\operatorname{curl}\mathbf{F} = \nabla\times\mathbf{F} = \nabla\times(\nabla f) = \mathbf{0}$. Ngược lại, nếu $\operatorname{curl}\mathbf{F} = \mathbf{0}$, ta sẽ chỉ ra rằng $\mathbf{F}$ thì trường thế bằng cách chứng minh rằng tích phân đường của nó không phụ thuộc vào hình dạng đường cong. Cho P_1 và P_2 là hai điểm bất kì trong miền liên thông đơn D và C_1 và C_2 là hai đường không giao nhau từ P_1 đến P_2 trong D. Gọi C là đường cong Jordan đi từ P_1 và trở về P_1 có được bằng cách ghép C_1 và $-C_2$. Vì D là miền liên thông đơn nên tồn tại một mặt S trơn từng khúc có biên C. Theo định lý Stokes

$$\begin{aligned}\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{R} &= \int_{C_1}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{R} - \int_{C_2}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{R}\\ &= \iint_S \operatorname{curl}\mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS\\ &= 0.\end{aligned}$$

Như vậy,

$$\int_{C_1}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{R} = \int_{C_2}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{R}.$$

Tức là tích phân đường $\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{R}$ không phụ thuộc đường đi. Vì vậy $\mathbf{F}$ là trường thế.

Ví dụ 13.6.4. Phương trình Maxwell

Trong vật lý, người ta chứng minh được rằng nếu I là dòng điện chảy qua mặt S có biên là đường cong kín C, thì

$$\oint_C \mathbf{H}\cdot d\mathbf{R} = I \text{ và } \iint_S \mathbf{J}\cdot\mathbf{N}\,dS = I$$

với $\mathbf{H}$ là mật độ từ tính, và $\mathbf{J}$ là mật độ dòng điện. Sử dụng thông tin đó, hãy chứng minh phương trình mật độ dòng điện Maxwell $\operatorname{curl}\mathbf{H} = \mathbf{J}$.

Giải Từ dữ kiện ta có

$$\oint_C \mathbf{H}\cdot d\mathbf{R} = I = \iint_S \mathbf{J}\cdot\mathbf{N}\,dS$$

Theo định lý Stokes, $\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{R} = \iint\limits_S (\operatorname{curl} \mathbf{H} \cdot \mathbf{N})\ dS$. Vì 2 tích phân mặt đều bằng $\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{R}$ ta có

$$\iint\limits_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{N}\ dS = \iint\limits_S (\operatorname{curl} \mathbf{H} \cdot \mathbf{N})\ \ dS$$

hoặc tương đương

$$\iint\limits_S (\mathbf{J} - \operatorname{curl} \mathbf{H}) \cdot \mathbf{N}\ dS = 0.$$

Vì phương trình này đúng cho mọi mặt S có biên C, nên ta có

$$\begin{aligned} \mathbf{J} - \operatorname{curl} \mathbf{H} = \mathbf{0} \text{ hoặc} \\ \mathbf{J} = \operatorname{curl} \mathbf{H}. \end{aligned}$$

13.6.2 Biểu diễn vật lý cho Định lý Stokes

Nếu $\mathbf{V}$ là trường vận tốc của dòng chất lỏng, thì $\operatorname{curl} \mathbf{V}$ đo mức độ xoáy của chất lỏng(xem hình vẽ).

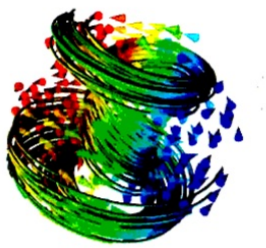


Figure 13.52 The tendency of a fluid to swirl across the surface S is measured by curl $\mathbf{V} \cdot \mathbf{N}$

Nếu dòng chất lỏng chảy qua bề mặt S, xu hướng quay thay đổi từ điểm này đến điểm khác trên bề mặt, và tích phân mặt $\iint\limits_S (\operatorname{curl} \mathbf{V} \cdot \mathbf{N})\ dS$ là độ đo xu hướng quay tích lũy trên toàn bộ bề mặt.

Định lý Stokes nói rằng mức độ xu hướng quay tích lũy bằng tích phân đường $\oint\limits_C \mathbf{V}.d\mathbf{R}$. Để giải thích tích phân đường này, nhắc lại rằng nó được viết dưới dạng $\oint\limits_C \mathbf{V} \cdot \mathbf{T}\ ds$ với s là tham số độ dài cung và $\mathbf{T}$ là tiếp tuyến đơn vị của đường cong.

Vì tích phân đường là tổng các thành phần tiếp tuyến của trường vận tốc $\mathbf{V}$, nó đo tốc độ chảy của khối chất lỏng quanh C. Vì lý do này nó được gọi là **lưu số của F** quanh **C**. Nếu $\operatorname{curl}\mathbf{V} = \mathbf{0}$, lưu số bằng 0 và $\mathbf{V}$ được nói là **không xoáy**. Tóm lại

$$\iint_S (\operatorname{curl}\mathbf{V}\cdot\mathbf{N})\, dS = \oint_C \mathbf{V}\cdot\mathbf{T}\, ds.$$

13.7 Định lý độ phân kỳ

Định lý 13.7.1. *Cho S là mặt cong kín trơn, định hướng được, giới hạn một miền $R \subset \mathbb{R}^3$ và $\boldsymbol{F}$ là trường vector liên tục, các thành phần của nó có các đạo hàm riêng liên tục trên một miền mở chứa R. Khi đó*

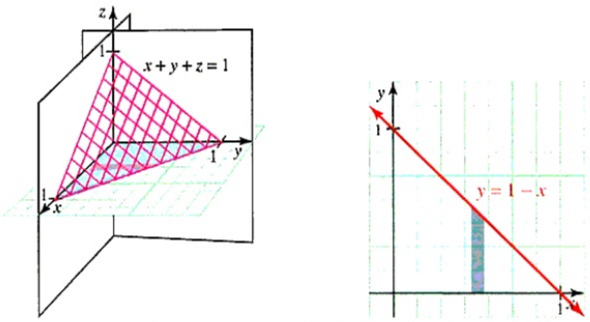
$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\ \ dS = \iiint_R \operatorname{div}\mathbf{F}\, dV$$

trong đó $\mathbf{N}$ là trường véc tơ pháp tuyến đơn vị hướng ra ngoài của S.

Ví dụ 13.7.1. Tính tích phân mặt dùng định lý phân kì
Tính $\iint\limits_S \mathbf{F}.\mathbf{N}\, dS$ với $\mathbf{F} = x^2\mathbf{i} + xy\mathbf{j} + x^3y^3\mathbf{k}$ và S là bề mặt của một tứ diện giới hạn bởi mặt phẳng $x + y + z = 1$ và các mặt phẳng tọa độ. Vector pháp tuyến đơn vị $\mathbf{N}$ hướng ra ngoài.

Giải Ta sẽ dùng định lý phân kì. Chú ý rằng

$$\operatorname{div}\ \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2) + \frac{\partial}{\partial y}(xy) + \frac{\partial}{\partial z}(x^3y^3) = 2x + x + 0 = 3x.$$



a. The surface S **b.** Projected region D in the xy-plane

Figure 13.59 A tetrahedron in $\mathbb{R}^3$

Tứ diện là tập R: gồm tất cả điểm (x, y, z) chẳng hạn $0 \le z \le 1 - x - y$ với $0 \le y \le 1 - x$ và $0 \le x \le 1$. Hình chiếu D của tứ diện lên mặt phẳng xy là tất cả

(x, y) với $0 \leq y \leq 1 - x$ với $0 \leq x \leq 1$.
Áp dụng định lý phân kì, ta được

$$\begin{aligned}
\iint\limits_S \mathbf{F}.\mathbf{N}\ dS &= \iiint\limits_R \text{div } \mathbf{F} \quad dV \\
&= \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} 3xdzdydx \\
&= \int_0^1 \int_0^{1-x} 3x(1-x-y)dydx \\
&= 3\int_0^1 \left[x(1-x)y - \frac{1}{2}xy^2\right]_0^{1-x} dx \\
&= 3\int_0^1 \left[x(1-x)^2 - \frac{1}{2}x(1-x)^2\right] dx \\
&= \frac{1}{8}.
\end{aligned}$$

Ví dụ 13.7.2. Kiểm chứng định lý độ phân kỳ trong trường hợp $\mathbf{F} = 2x\mathbf{i} - 3y\mathbf{j} + 5z\mathbf{k}$ và S là mặt tạo bởi nửa mặt cầu có $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ và hình tròn $x^2 + y^2 \leq 9$ trong mặt phẳng xy.

Giải Trước hết, chúng ta tính $\iint\limits_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\ dS$.

Mặt S gồm hai phần, phần mặt cầu $S_1 : z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ và đáy là hình tròn $S_2 : z = 0,\ x^2 + y^2 \leq 9$. Do đó

$$\iint\limits_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\ dS = \iint\limits_{S_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\ dS + \iint\limits_{S_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\ dS$$

Trên S_1, hướng ra của véc tơ pháp tuyến đơn vị $\mathbf{N}$ là hướng lên, nên

$$\mathbf{N} = \left\langle -\frac{-x}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}}, -\frac{-y}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}}, 1 \right\rangle.$$

Hình chiếu vuông góc của S_1 lên mặt phẳng xy là hình tròn $D : x^2 + y^2 \leq 9$ hoặc

$r = 3$ trong tọa độ cực. Từ đó

$$\begin{aligned}
\iint\limits_{S_1} \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\, dS &= \iint\limits_{D} \langle 2x, -3y, 5z\rangle \cdot \Big\langle -\frac{-x}{\sqrt{9-x^2-y^2}}, -\frac{-y}{\sqrt{9-x^2-y^2}}, 1\Big\rangle dA \\
&= \iint\limits_{D} \Big(\frac{2x^2-3y^2}{\sqrt{9-x^2-y^2}} + 5\sqrt{9-x^2-y^2}\Big) dA \\
&= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^3 \Big[\frac{2r^2\cos^2\theta - 3r^2\sin^2\theta}{\sqrt{9-r^2}} + 5\sqrt{9-r^2}\Big] r dr \\
&= \int_0^{2\pi} [81 - 90\sin^2\theta] d\theta = 72\pi.
\end{aligned}$$

Trên S_2, hướng ra ngoài của $\mathbf{N}$ là hướng xuống nên $\mathbf{N} = -\mathbf{k}$ và z=0 nên

$$\iint\limits_{S_2} \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\, dS = \iint\limits_{S_2} -5z\; dS = 0$$

Từ đó suy ra $\iint\limits_{S} \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\, dS = 72\pi$

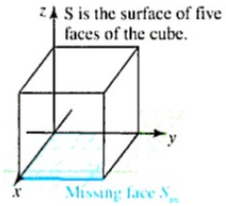
Tiếp theo chúng ta tính tích phân bội ba $\iiint\limits_{R} \text{div }\ \mathbf{F}\, dV$.

Ta có div $\mathbf{F} = 2 - 3 + 5 = 4$ và thể tích V của R chính là một nửa thể tích hình cầu bán kính bằng 3 cho nên

$$\iiint\limits_{R} \text{div }\ \mathbf{F}\; dV = 4\iiint\limits_{R} dV = 4V = 72\pi.$$

Đôi khi chúng ta muốn dùng định lý độ phân kỳ nhưng mặt cong S là không kín, hoặc véc tơ pháp tuyến trên S hướng vào trong. Việc đổi hướng pháp vector là đơn giản vì chỉ cần đổi dấu tích phân. Trong trường hợp S không kín, chúng ta có thể tìm một mặt cong S_0 đơn giản sao cho $S \cup S_0$ kín và thỏa các điều kiện định lý. Khi đó

$$\iint\limits_{S} \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\;\; dS = \iiint\limits_{R} \text{div }\ \mathbf{F}\;\; dV - \iint\limits_{S_0} \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\;\; dS.$$



Ví dụ 13.7.3. Tính $\iint\limits_{S} \mathbf{F}\cdot\mathbf{F}\, dS$, trong đó $\mathbf{F} = \langle xy, 0, -z^2\rangle$ và S là 5 mặt của hình lập phương $x \in [0,1],\ y \in [0,1],\ z \in [0,1]$ (gồm 4 mặt bên và mặt phí trên) với $\mathbf{N}$ hướng ra.

Giải Rõ ràng S không kín. Nhưng nếu thêm mặt đáy S_0 của hình lập phương đã nêu trên thì $S \cup S_0$ kín và miền R giới hạn bởi nó chính là hình lập phương.

Áp dụng định lý phân kỳ ta được

$$\iint\limits_{S\cup S_0} \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\, dS = \iiint\limits_{R} \text{div}\, \mathbf{F}\, dV$$
$$= \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 (y-2z)dz$$
$$= \int_0^1 (y-1)dy = -\frac{1}{2}$$

Sau đó, tính tích phân mặt trên S_0 với lưu ý rằng phương trình $S_0 : z = 0,\ x \in [0,1],\ y \in [0,1]$ và trên đó N hướng xuống hay $N = (0,0,-1)$:

$$\iint\limits_{S_0} \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\, dS = \iint\limits_{S_0} z^2\, dS = 0$$

Vậy chúng ta có

$$\iint\limits_{S} \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\, dS = -\frac{1}{2} - 0 = -\frac{1}{2}$$

13.7.1 Ứng dụng của định lý phân kì

Giống như định lý Stokes, định lý phân kì thường được dùng cho mục đích lý thuyết, đặc biệt nó là công cụ để suy ra tính chất tổng quát trong toán lý. Hãy xem trường vector ở hình dưới

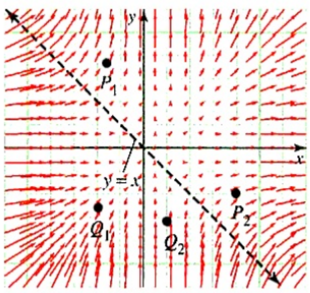


Figure 13.63 Interactive A vector field F

Chú ý rằng các vector mà kết thúc gần P_1 hoặc P_2 thì ngắn hơn các vector bắt đầu gần P_1 hoặc P_2 . Nghĩa là dòng chảy hướng ra ngoài gần những điểm này, vì vậy div $\mathbf{F}(P_k) > 0$ và P_k là một *nguồn* nếu $y > -x$. Ngược lại, ta thấy rằng những vector đi vào gần Q_1 hoặc Q_2 thì dài hơn vector từ điểm đó đi ra ngoài. Nghĩa là dòng chảy tại những điểm này hướng vào trong, tức là, div $\mathbf{F}(Q_k) < 0$ và Q_k là một điểm *rò* nếu $y < -x$. Ta có thể kiểm tra những quan sát này là đúng cho trường véc tơ $\mathbf{F} = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j}$. Ta có div $\mathbf{F} = 2x + 2y$. Vì vậy div $\mathbf{F} > 0$ nếu $2x + 2y > 0$ hoặc nếu $y > -x$.

Ví dụ sau trình bày một tính chất quan trọng của động lực học chất lỏng.

Ví dụ 13.7.4. Phương trình liên tục của động lực chât lỏng

Giả sử một chất lỏng với khối lượng riêng $\rho(x, y, z)$ chảy trong một miền thuộc không gian với vận tốc $\mathbf{F}(x, y, z, t)$ tại điểm (x, y, z) và ở thời điểm t. Giả sử không có điểm nguồn hay điểm rò, chứng minh rằng

$$\text{div } \rho\mathbf{F} = -\frac{\partial\rho}{\partial t}.$$

Giải Gọi D là miền cố định bao quanh bởi bề mặt kín S, pháp tuyến $\mathbf{N}$ của S hướng ra ngoài . Trong vật lý, khi không có điểm tháo hay nguồn, tốc độ thay đổi của tổng khối lượng m trong D bằng với tổng thông lượng chảy ra khỏi miền D qua S trong một đơn vi thời gian (trong trường hợp này, tổng thông lượng chảy ra khỏi S chính là tổng khối lượng chảy ra khỏi S) và nó được xác định bởi $\iint\limits_S \rho\mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\, dS$. Mặt khác, khối lượng lại được xác định thông qua tích phân ba lớp của khối lượng riêng trên miền D, và do đó, sự thay đổi của khối lượng theo thời gian được cho bởi công thức

$$\frac{dm}{dt} = \iiint\limits_D \frac{\partial\rho}{\partial t}\, dV.$$

Do đó

$$\iint\limits_S \rho\mathbf{F}.\mathbf{N}\, dS = -\iiint\limits_D \frac{\partial\rho}{\partial t}\, dV.$$

Dấu trừ ở vế phải là do dòng chảy hướng vào trong.
Mặt khác, theo định lý phân kì, ta có

$$\iint\limits_S \rho\mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\, dS = \iiint\limits_D \text{div } \rho\mathbf{F}\, dV.$$

Từ hai đẳng thức trên, ta có

$$\iiint\limits_D \left[\text{div } \rho\mathbf{F} + \frac{\partial\rho}{\partial t}\right] dV = 0.$$

Phương trình này đúng cho mọi miền D, nghĩa là hàm lấy tích phân phải bằng 0. Do đó

$$\text{div } \rho\mathbf{F} = -\frac{\partial\rho}{\partial t}.$$

Ngoài ra, ta biết là tổng nhiệt được chứa trong một vật thể có dạng miền D, với hàm mật độ đều ρ và nhiệt lượng riêng σ là $\iiint\limits_D \sigma\rho T\ dV$ với T là nhiệt độ. Vì vậy lượng nhiệt đi ra khỏi D trên một đơn vị thời gian được cho bởi đạo hàm

$$-\frac{\partial}{\partial t}\Big[\iiint\limits_D \sigma\rho T\ dV\Big] = \iiint\limits_D -\sigma\rho\frac{\partial T}{\partial t}\ dV$$

Trong ví dụ sau, sử dụng kết quả này chúng ta sẽ thu được một công thức quan trọng trong toán lý.

Ví dụ 13.7.5. Đạo hàm của phương trình nhiệt

Cho $T(x, y, z, t)$ là nhiệt độ tại mỗi điểm (x, y, z) trong một vật thể đặc D ở thời điểm t. Giả sử vận tốc của dòng nhiệt trong vật thể đặc là $\mathbf{F} = -K\nabla T$ với hằng số dương K (gọi là tính dẫn nhiệt), chứng tỏ rằng

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{K}{\sigma\rho}\nabla^2 T$$

với σ là nhiệt lượng riêng của vật thể và ρ là mật độ của nó.

Giải Gọi S là biên kín của D. Vì $\mathbf{F}$ là vận tốc của dòng nhiệt, lượng nhiệt đi ra khỏi D trên một đơn vị thời gian là $\iint\limits_S \mathbf{F}.\mathbf{N}\ dS$. Theo định lý phân kì

$$\begin{aligned}\iint\limits_S \mathbf{F}.\mathbf{N}\ dS &= \iiint\limits_D \text{div } (-K\nabla T)\ dV\\ &= \iiint\limits_D (-K\nabla.\nabla T)\ dV\\ &= \iiint\limits_D (-K\nabla^2 T)\ dV\end{aligned}$$

Vì đây là lượng nhiệt đi ra khỏi D trên một đơn vị thời gian, từ ví dụ trước, ta có

$$\iiint\limits_D -K\nabla^2 T dV = \iiint\limits_D -\sigma\rho\frac{\partial T}{\partial t}dV$$

Phương trình này không chỉ đúng toàn bộ vật thể, mà còn đúng với mỗi phần của vật thể, dù nó nhỏ cỡ nào. Vì vậy, ta có thể co vật thể về một điểm đơn. Do đó, hàm dưới dấu tích phân phải bằng nhau

$$\begin{aligned} -K\nabla^2 T &= -\sigma\rho\frac{\partial T}{\partial t} \\ \frac{\partial T}{\partial t} &= \frac{K}{\partial\rho}\nabla^2 T \end{aligned}$$

Nhớ lại rằng trong phần 13.4, đạo hàm pháp tuyến $\dfrac{\partial g}{\partial n}$ của hàm số thế vị g được định nghĩa trên mặt đóng S là đạo hàm có hướng của g theo hướng của vector pháp tuyến đơn vị $\mathbf{N}$ hướng ra ngoài S; tức là

$$\frac{\partial g}{\partial n} = \nabla g \cdot \mathbf{N}$$

Ta sẽ dùng phương trình này trong ví dụ sau

Ví dụ 13.7.6. Chứng minh nếu f và g là các hàm số sao cho $\mathbf{F} = f\nabla g$ khả vi liên tục trong miền đặc D với biên là mặt kín S, thì

$$\iiint\limits_D \left[f\nabla^2 g + \nabla f.\nabla g\right]\, dV = \iint\limits_S f\frac{\partial g}{\partial n}\, dS.$$

Nó được gọi là **đẳng thức Green thứ nhất**.

Giải Ta sẽ áp dụng định lý phân kì cho trường vector $\mathbf{F}$ (chú ý $\mathbf{F}$ khả vi liên tục), nhưng đầu tiên ta cần biểu diễn div $\mathbf{F}$ ở dạng tốt hơn

$$\begin{aligned} \text{div } (f\nabla g) &= \nabla.(f\nabla g) \\ &= \left[\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right].\left[f\frac{\partial g}{\partial x}\mathbf{i} + f\frac{\partial g}{\partial y}\mathbf{j} + f\frac{\partial g}{\partial z}\mathbf{k}\right] \\ &= \frac{\partial}{\partial x}\left[f\frac{\partial g}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[f\frac{\partial g}{\partial y}\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[f\frac{\partial g}{\partial z}\right] \\ &= \left[\frac{\partial f}{\partial x}.\frac{\partial g}{\partial x} + f\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}\right] + \left[\frac{\partial f}{\partial y}.\frac{\partial g}{\partial y} + f\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}\right] + \left[\frac{\partial f}{\partial z}.\frac{\partial g}{\partial z} + f\frac{\partial^2 g}{\partial z^2}\right] \\ &= \left[\frac{\partial f}{\partial x}.\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}.\frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}.\frac{\partial g}{\partial z}\right] + f\left[\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial z^2}\right] \\ &= (\nabla f).(\nabla g) + f\nabla^2 g. \end{aligned}$$

Từ công thức này ta thu được

$$\begin{aligned}\iiint\limits_D [f\nabla^2 g + \nabla f.\nabla g]\, dV &= \iiint\limits_D \text{div } (f\nabla g) dV \\ &= \iint\limits_S (f\nabla g)\cdot \mathbf{N}\, dS \\ &= \iint\limits_S f\frac{\partial g}{\partial n}\, dS.\end{aligned}$$

13.7.2 Biểu diễn vật lý của sự phân kì

Trong 13.6 ta dùng định lý Stokes để đưa ra một biểu diễn của vector xoáy như một độ đo xu hướng xoáy của dòng chất lỏng. Ví dụ cuối của chúng ta sẽ trình bày một biểu diễn tương tự cho định lý phân kì. Đặc biệt, ta chỉ ra tỉ lệ thực của khối chất lỏng chảy xa điểm P_0 cho bởi div $\mathbf{F}_0$. Đây là lí do P_0 là nguồn nếu div $\mathbf{F}_0 > 0$ (khối lượng ra ngoài khỏi điểm P_0) và một điểm rò nếu div $\mathbf{F}_0 < 0$ (khối lượng chảy về lại P_0).

Ví dụ 13.7.7. Giải thích vật lý của sự phân kì
Cho $\mathbf{F} = \rho\mathbf{V}$ là mật độ thông lượng, ρ là khối lượng riêng và $\mathbf{V}$ là vận tốc của dòng chất lỏng. Gọi P_0 là một điểm trong một miền đặc mà những điều kiện của định lý phân kì thỏa. Chứng minh rằng

$$\text{div } \mathbf{F}_0 = \lim_{r\to 0}\frac{1}{V(r)}\iint\limits_{S(r)} \mathbf{F}.\mathbf{N}\, dS$$

với div $\mathbf{F}_0$ là giá trị của div $\mathbf{F}$ tại điểm P_0, và $S(r)$ là hình cầu có tâm tại P_0 với thể tích $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$.
Giải Áp dụng định lý phân kì cho hình cầu đặc $B(r)$ với bề mặt $S(r)$, ta được

$$\iint\limits_{S(r)} \mathbf{F}.\mathbf{N}\, dS = \iiint\limits_{B(r)} \text{div } \mathbf{F}\, dV$$

Định lý giá trị trung bình cho ta

$$\frac{1}{V(r)}\iiint\limits_{B(r)} \text{div } \mathbf{F}\, dV = \text{div } \mathbf{F}^*$$

với div $\mathbf{F}^*$ kí hiệu cho giá trị của div $\mathbf{F}$ tại điểm P^*, ta có

$$\iint\limits_{S(r)} \mathbf{F}.\mathbf{N}\, dS = \iiint\limits_{B(r)} \text{div } \mathbf{F}\, dV = V(r)\text{div } \mathbf{F}^*$$

Hay

$$\frac{1}{V(r)} \iint\limits_{S(r)} \mathbf{F}.\mathbf{N}\, dS = \text{div } \mathbf{F}^*$$

Vì điểm P^* nằm trong mặt cầu $B(r)$ có tâm P_0, suy ra $P^* \to P_0$ khi $r \to 0$. Do đó div $\mathbf{F}^* \to$ div $\mathbf{F}_0$ và ta có

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{V(r)} \iint\limits_{S(r)} \mathbf{F}.\mathbf{N}\, dS = \lim_{r\to 0} \text{div } \mathbf{F}^* = \text{div } \mathbf{F}_0.$$