CHƯƠNG 11. HÀM NHIỀU BIẾN

BỘ MÔN TOÁN - KHOA KHƯD - HCMUTE

Quy tắc dây chuyền một biến

Định lý 11.4

Cho $f(x, y)$ là một hàm khả vi của hai biến x và y, và $x = x(t)$ và $y = y(t)$ là hàm khả vi của biến t, khi đó $z = f(x, y)$ là một hàm khả vi của t và

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

Ví dụ. (Kiểm tra quy tắc dây chuyền) Cho $z = x^2 + y^2$, với $x = \frac{1}{t}$ và $y = t^2$. Tính $\frac{dz}{dt}$ theo hai cách:

Quy tắc dây chuyền một biến

Định lý 11.4

Cho $f(x,y)$ là một hàm khả vi của hai biến x và y, và $x = x(t)$ và $y = y(t)$ là hàm khả vi của biến t, khi đó $z = f(x,y)$ là một hàm khả vi của t và

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

Ví dụ. (Kiểm tra quy tắc dây chuyền) Cho $z = x^2 + y^2$, với $x = \frac{1}{t}$ và $y = t^2$. Tính $\frac{dz}{dt}$ theo hai cách:

1. biểu diễn tường minh z theo t rồi tính đạo hàm.

Quy tắc dây chuyền một biến

Định lý 11.4

Cho $f(x, y)$ là một hàm khả vi của hai biến x và y, và $x = x(t)$ và $y = y(t)$ là hàm khả vi của biến t, khi đó $z = f(x, y)$ là một hàm khả vi của t và

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

Ví dụ. (Kiểm tra quy tắc dây chuyền) Cho $z = x^2 + y^2$, với $x = \frac{1}{t}$ và $y = t^2$. Tính $\frac{dz}{dt}$ theo hai cách:

1. biểu diễn tường minh z theo t rồi tính đạo hàm.
2. sử dụng quy tắc dây chuyền.

Quy tắc dây chuyền một biến

Định lý 11.4

Cho $f(x, y)$ là một hàm khả vi của hai biến x và y, và $x = x(t)$ và $y = y(t)$ là hàm khả vi của biến t, khi đó $z = f(x, y)$ là một hàm khả vi của t và

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

Ví dụ. (Kiểm tra quy tắc dây chuyền) Cho $z = x^2 + y^2$, với $x = \frac{1}{t}$ và $y = t^2$. Tính $\frac{dz}{dt}$ theo hai cách:

1. biểu diễn tường minh z theo t rồi tính đạo hàm.
2. sử dụng quy tắc dây chuyền.

Ví dụ. (Quy tắc dây chuyền cho một tham biến độc lập) Cho $z = \sqrt{x^2 + 2xy}$, trong đó $x = \cos\theta, y = \sin\theta$. Tìm $\frac{dz}{d\theta}$ theo x, y, θ.

Ví dụ. (Quy tắc dây chuyền cho một tham biến độc lập) Cho $z = \sqrt{x^2 + 2xy}$, trong đó $x = \cos\theta, y = \sin\theta$. Tìm $\frac{dz}{d\theta}$ theo x, y, θ.

Ví dụ. (Ứng dụng về quan hệ giữa các tỷ lệ sử dụng quy tắc dây chuyền) Một hình trụ tròn đứng được thay đổi bằng cách tăng bán kính r của nó với tốc độ 3 in./min và giảm chiều cao h của nó với tốc độ 5 in./min. Thể tích của hình trụ thay đổi theo tốc độ nào nếu bán kính của nó là 10 in. và chiều cao là 8 in.?

Định lý 11.5 (Định lý hàm ẩn)

Cho F được xác định trên một đĩa tròn chứa (a, b) như một điểm trong, sao cho $F(a, b) = 0$, và giả sử rằng F_x, F_y cùng liên tục trên đĩa này, với $F_y(a, b) \neq 0$. Khi đó tồn tại một khoảng I trên đường thẳng thực chứa a như một điểm trong và một hàm duy nhất $y = y(x)$ được xác định trên khoảng I, sao cho $y(a) = b$ và $F(x, y(x)) = 0$,với mọi giá trị x trong khoảng I. Hơn nữa, đạo hàm của y được xác định bởi

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}.$$

Định lý 11.5 (Định lý hàm ẩn)

Cho F được xác định trên một đĩa tròn chứa (a,b) như một điểm trong, sao cho $F(a,b)=0$, và giả sử rằng F_x, F_y cùng liên tục trên đĩa này, với $F_y(a,b)\neq 0$. Khi đó tồn tại một khoảng I trên đường thẳng thực chứa a như một điểm trong và một hàm duy nhất $y=y(x)$ được xác định trên khoảng I, sao cho $y(a)=b$ và $F(x,y(x))=0$,với mọi giá trị x trong khoảng I. Hơn nữa, đạo hàm của y được xác định bởi

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}.$$

Ví dụ. Nếu y là một hàm khả vi của x sao cho $\sin(x+y)+\cos(x-y)=y$,tìm $\frac{dy}{dx}$.

Định lý 11.6 (Quy tắc dây chuyền cho hai tham biến)

Giả sử $z = f(x, y)$ *khả vi tại* (x, y) *và các đạo hàm riêng của* $x = x(u, v)$ *và* $y = y(u, v)$ *tồn tại tại* (u, v). *Khi đó hàm hợp* $z = F(x(u, v), y(u, v))$ *là khả vi tại* (u, v) *với*

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} \text{ và } \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}.$$

Định lý 11.6 (Quy tắc dây chuyền cho hai tham biến)

Giả sử $z = f(x, y)$ *khả vi tại* (x, y) *và các đạo hàm riêng của* $x = x(u, v)$ *và* $y = y(u, v)$ *tồn tại tại* (u, v)*. Khi đó hàm hợp* $z = F(x(u, v), y(u, v))$ *là khả vi tại* (u, v) *với*

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} \text{ và } \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}.$$

Ví dụ. Cho $z = 4x - y^2$, trong đó $x = uv^2$ và $y = u^3v$. Tìm $\frac{\partial z}{\partial u}$ và $\frac{\partial y}{\partial v}$.

Mở rộng quy tắc dây chuyền cho hàm nhiều hơn hai biến

Các quy tắc dây chuyền có thể được mở rộng tới các hàm ba biến hay nhiều hơn. Chẳng hạn, nếu $w = f(x, y, z)$ là một hàm khả vi ba biến và $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$ là các hàm khả vi của t, thì w là một hàm hợp khả vi của t và

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{dz}{dt}.$$

Mở rộng quy tắc dây chuyền cho hàm nhiều hơn hai biến

Các quy tắc dây chuyền có thể được mở rộng tới các hàm ba biến hay nhiều hơn. Chẳng hạn, nếu $w = f(x, y, z)$ là một hàm khả vi ba biến và $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$ là các hàm khả vi của t, thì w là một hàm hợp khả vi của t và

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{dz}{dt}.$$

Tương tự, quy tắc dây chuyền cũng có thể mở rộng cho hàm nhiều hơn hai biến và phụ thuộc nhiều tham biến.

Mở rộng quy tắc dây chuyền cho hàm nhiều hơn hai biến

Các quy tắc dây chuyền có thể được mở rộng tới các hàm ba biến hay nhiều hơn. Chẳng hạn, nếu $w = f(x, y, z)$ là một hàm khả vi ba biến và $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$ là các hàm khả vi của t, thì w là một hàm hợp khả vi của t và

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{dz}{dt}.$$

Tương tự, quy tắc dây chuyền cũng có thể mở rộng cho hàm nhiều hơn hai biến và phụ thuộc nhiều tham biến.
Ví dụ. Tìm $\frac{\partial w}{\partial s}$ nếu $w = 4x + y^2 + z^3$, trong đó $x = e^{rs^2}, y = \ln \frac{r+s}{t}$ và $z = rst^2$.

Đạo hàm theo hướng

Định nghĩa 1

Cho f là một hàm hai biến, và cho $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j}$ là một véctơ đơn vị. Đạo hàm theo hướng của f tại $P_0\left(x_0, y_0\right)$ theo hướng của $\mathbf{u}$ cho bởi
$D_{\mathbf{u}}f\left(x_0, y_0\right) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x_0+hu_1, y_0+hu_2)-f(x_0, y_0)}{h}$ miễn là giới hạn này tồn tại.

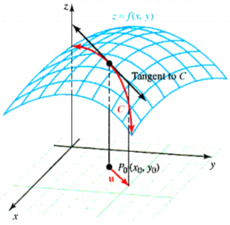


Figure 11.24 The directional derivative

Đạo hàm theo hướng

Định nghĩa 1

Cho f là một hàm hai biến, và cho $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j}$ là một véctơ đơn vị. Đạo hàm theo hướng của f tại $P_0(x_0, y_0)$ theo hướng của $\mathbf{u}$ cho bởi $D_{\mathbf{u}}f(x_0, y_0) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0+hu_1, y_0+hu_2) - f(x_0, y_0)}{h}$ miễn là giới hạn này tồn tại.

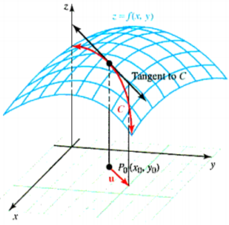


Figure 11.24 The directional derivative

Định lý 11.7

Cho $f(x, y)$ là một hàm khả vi tại $P_0(x_0, y_0)$. Khi đó f có đạo hàm theo hướng của véctơ đơn vị $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j}$ xác định bởi $D_{\mathbf{u}}f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)u_1 + f_y(x_0, y_0)u_2$.

Tính đạo hàm theo hướng

Ví dụ. Tìm đạo hàm theo hướng của $f(x, y) = 3 - 2x^2 + y^3$ tại điểm $P(1, 2)$ theo hướng

1. véctơ đơn vị $\mathbf{u} = \frac{1}{2}\mathbf{i} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{j}$.

Tính đạo hàm theo hướng

Ví dụ. Tìm đạo hàm theo hướng của $f(x, y) = 3 - 2x^2 + y^3$ tại điểm $P(1, 2)$ theo hướng

1. véctơ đơn vị $\mathbf{u} = \frac{1}{2}\mathbf{i} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{j}$.
2. hợp với trục x một góc 30° theo chiều dương.

Tính đạo hàm theo hướng

Ví dụ. Tìm đạo hàm theo hướng của $f(x, y) = 3 - 2x^2 + y^3$ tại điểm $P(1, 2)$ theo hướng

1. véctơ đơn vị $\mathbf{u} = \frac{1}{2}\mathbf{i} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{j}$.
2. hợp với trục x một góc $30°$ theo chiều dương.
3. véctơ $\mathbf{v} = \mathbf{i} - 3\mathbf{j}$.

Định nghĩa 2 (Gradient)

Cho f là một hàm khả vi tại (x, y) và cho $f(x, y)$ có các đạo hàm riêng $f_x(x, y)$ và $f_y(x, y)$. Khi đó gradient của f, được ký hiệu bởi ∇f (đọc là del eff) hoặc **grad**$f(x, y)$, là một véctơ xác định bởi

$$\nabla f(x, y) = f_x(x, y)\,\mathbf{i} + f_y(x, y)\,\mathbf{j}.$$

Giá trị của gradient tại điểm $P_0(x_0, y_0)$ được xác định bởi

$$\nabla f_0 = f_x(x_0, y_0)\,\mathbf{i} + f_y(x_0, y_0)\,\mathbf{j}.$$

Định nghĩa 2 (Gradient)

Cho f là một hàm khả vi tại (x, y) và cho $f(x, y)$ có các đạo hàm riêng $f_x(x, y)$ và $f_y(x, y)$. Khi đó gradient của f, được ký hiệu bởi ∇f (đọc là del eff) hoặc **grad**$f(x, y)$, là một véctơ xác định bởi

$$\nabla f(x, y) = f_x(x, y)\,\mathbf{i} + f_y(x, y)\,\mathbf{j}.$$

Giá trị của gradient tại điểm $P_0(x_0, y_0)$ được xác định bởi

$$\nabla f_0 = f_x(x_0, y_0)\,\mathbf{i} + f_y(x_0, y_0)\,\mathbf{j}.$$

Ví dụ. Tìm $\nabla f(x, y)$ với $f(x, y) = x^2 y + y^3$.

Định lý 11.8 (Công thức Gradient cho đạo hàm theo hướng)

*Nếu f là một hàm khả vi của x và y, khi đó đạo hàm theo hướng của f tại điểm $P_0(x_0, y_0)$ theo hướng của véctơ đơn vị **u** là*

$$D_{\mathbf{u}} f(x_0, y_0) = \nabla f_0 \cdot \mathbf{u}.$$

Định lý 11.8 (Công thức Gradient cho đạo hàm theo hướng)

*Nếu f là một hàm khả vi của x và y, khi đó đạo hàm theo hướng của f tại điểm $P_0(x_0, y_0)$ theo hướng của véctơ đơn vị **u** là*

$$D_{\mathbf{u}} f(x_0, y_0) = \nabla f_0 \cdot \mathbf{u}.$$

Ví dụ. (Sử dụng công thức gradient để tính đạo hàm theo hướng)
Tìm đạo hàm theo hướng của $f(x, y) = \ln(x^2 + y^3)$ tại $P_0(1, -3)$ theo hướng của $\mathrm{v} = 2\mathrm{i} - 3\mathrm{j}$.

Các tính chất cơ bản của gradient

Định lý 11.9 (Các tính chất cơ bản của gradient)

Cho f và g là các hàm khả vi. Khi đó

Quy tắc hằng	$\nabla c = 0$ *với mọi hằng số c*
Quy tắc tuyến tính	$\nabla(af + bg) = a\nabla f + b\nabla g$ *với các hằng số* a *và* b
Quy tắc nhân	$\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$
Quy tắc thương	$\nabla\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{f\nabla g - f\nabla g}{g^2}$, $g \neq 0$
Quy tắc mũ	$\nabla(f^n) = nf^{n-1}\nabla f$

Tính chất cực đại của Gradient

Định lý 11.10

Giả sử f *khả vi tại điểm* P_0 *và gradient của* f *tại* P_0 *thỏa mãn* $\nabla f_0 \neq 0$. *Khi đó*

- (a) *Giá trị lớn nhất của đạo hàm theo hướng* $D_u f$ *tại* P_0 *là* $\|\nabla f_0\|$ *và xuất hiện khi véctơ đơn vị u chỉ hướng của* ∇f_0.

Tính chất cực đại của Gradient

Định lý 11.10

Giả sử f *khả vi tại điểm* P_0 *và gradient của* f *tại* P_0 *thỏa mãn* $\nabla f_0 \neq 0$. *Khi đó*

a. *Giá trị lớn nhất của đạo hàm theo hướng* $D_u f$ *tại* P_0 *là* $\|\nabla f_0\|$ *và xuất hiện khi véctơ đơn vị u chỉ hướng của* ∇f_0.
b. *Giá trị nhỏ nhất của* $D_u f$ *tại* P_0 *là* $-\|\nabla f_0\|$ *và xuất hiện khi véctơ đơn vị u chỉ hướng của* $-\nabla f_0$.

Tính chất cực đại của Gradient

Định lý 11.10

Giả sử f khả vi tại điểm P_0 và gradient của f tại P_0 thỏa mãn $\nabla f_0 \neq 0$. Khi đó

- (a) *Giá trị lớn nhất của đạo hàm theo hướng $D_u f$ tại P_0 là $\|\nabla f_0\|$ và xuất hiện khi véctơ đơn vị u chỉ hướng của ∇f_0.*
- (b) *Giá trị nhỏ nhất của $D_u f$ tại P_0 là $-\|\nabla f_0\|$ và xuất hiện khi véctơ đơn vị u chỉ hướng của $-\nabla f_0$.*

Ví dụ. (Tỷ lệ tăng và giảm cực đại) Theo hướng nào thì hàm được xác định $f(x, y) = xe^{2y-x}$ tăng nhanh nhất tại điểm $P_0(2, 1)$, và tỷ lệ tăng cực đại là bao nhiêu? Theo hướng nào thì f là giảm nhanh nhất?

Đạo hàm theo hướng và gradient của hàm ba biến

Với hàm ba biến, $f(x, y, z)$:

- gradient ∇f được xác định bởi $\nabla f = f_x \mathsf{i} + f_y \mathsf{j} + f_z \mathsf{k}$

Đạo hàm theo hướng và gradient của hàm ba biến

Với hàm ba biến, $f(x, y, z)$:

- gradient ∇f được xác định bởi $\nabla f = f_x \mathrm{i} + f_y \mathrm{j} + f_z \mathrm{k}$
- đạo hàm theo hướng $D_{\mathrm{u}} f$ của $f(x, y, z)$ tại $P_0(x_0, y_0, z_0)$ theo hướng của véctơ đơn vị u cho bởi $D_{\mathrm{u}} f = \nabla f_0 \cdot \mathrm{u}$, trong đó ∇f_0 là gradient ∇f tại P_0.

Đạo hàm theo hướng và gradient của hàm ba biến

Với hàm ba biến, $f(x, y, z)$:

- gradient ∇f được xác định bởi $\nabla f = f_x \mathsf{i} + f_y \mathsf{j} + f_z \mathsf{k}$
- đạo hàm theo hướng $D_{\mathsf{u}} f$ của $f(x, y, z)$ tại $P_0(x_0, y_0, z_0)$ theo hướng của véctơ đơn vị u cho bởi $D_{\mathsf{u}} f = \nabla f_0 \cdot \mathsf{u}$, trong đó ∇f_0 là gradient ∇f tại P_0.
- Các tính chất của gradient cũng như hướng cực đại vẫn đúng cho hàm 3 biến.

Đạo hàm theo hướng và gradient của hàm ba biến

Với hàm ba biến, $f(x, y, z)$:

- gradient ∇f được xác định bởi $\nabla f = f_x\mathsf{i} + f_y\mathsf{j} + f_z\mathsf{k}$
- đạo hàm theo hướng $D_{\mathsf{u}}f$ của $f(x, y, z)$ tại $P_0(x_0, y_0, z_0)$ theo hướng của véctơ đơn vị u cho bởi $D_{\mathsf{u}}f = \nabla f_0 \cdot \mathsf{u}$, trong đó ∇f_0 là gradient ∇f tại P_0.
- Các tính chất của gradient cũng như hướng cực đại vẫn đúng cho hàm 3 biến.

Ví dụ. (Đạo hàm theo hướng của hàm ba biến) Cho $f(x, y, z) = xy\sin(xz)$. Tìm ∇f_0 tại điểm $P_0(1, -2, \pi)$ và sau đó tính đạo hàm theo hướng (được làm tròn đến phần trăm) của f tại P_0 theo hướng của véctơ $\mathsf{v} = -2\mathsf{i} + 3\mathsf{j} - 5\mathsf{k}$.

Tiếp diện và pháp tuyến

Định lý 11.11 (Tính vuông góc của Gradient)

Giả sử hàm f là khả vi tại điểm P_0 và gradient tại P_0 thỏa mãn $\nabla f_0 \neq 0$. Khi đó ∇f_0 là trực giao với mặt mức của f qua P_0.

Tiếp diện và pháp tuyến

Định lý 11.11 (Tính vuông góc của Gradient)

Giả sử hàm f là khả vi tại điểm P_0 và gradient tại P_0 thỏa mãn $\nabla f_0 \neq 0$. Khi đó ∇f_0 là trực giao với mặt mức của f qua P_0.

Gradient ∇f_0 tại điểm P_0 trên mặt $f(x, y, z) = K$ là trực giao tại P_0 với véctơ tiếp xúc $\mathbf{T} = \frac{d\mathbf{R}}{dt}$ của mỗi đường cong C: $\mathbf{R} = \mathbf{R}(t)$ trên mặt cong đi qua P_0. Do đó, tất cả những véctơ tiếp xúc này nằm trên một mặt phẳng đơn đi qua P_0. Do đó, tất cả các véctơ tiếp xúc này nằm trên một mặt phẳng đơn đi qua P_0 với véctơ pháp tuyến $\mathbf{N} = \nabla f_0$. Mặt phẳng này là *mặt phẳng tiếp xúc* (hay *tiếp diện*) với mặt cong tại P_0.

Tiếp diện và pháp tuyến

Định lý 11.11 (Tính vuông góc của Gradient)

Giả sử hàm f là khả vi tại điểm P_0 và gradient tại P_0 thỏa mãn $\nabla f_0 \neq 0$. Khi đó ∇f_0 là trực giao với mặt mức của f qua P_0.

Gradient ∇f_0 tại điểm P_0 trên mặt $f(x, y, z) = K$ là trực giao tại P_0 với véctơ tiếp xúc $\mathbf{T} = \frac{d\mathbf{R}}{dt}$ của mỗi đường cong C: $\mathbf{R} = \mathbf{R}(t)$ trên mặt cong đi qua P_0. Do đó, tất cả những véctơ tiếp xúc này nằm trên một mặt phẳng đơn đi qua P_0. Do đó, tất cả các véctơ tiếp xúc này nằm trên một mặt phẳng đơn đi qua P_0 với véctơ pháp tuyến $\mathbf{N} = \nabla f_0$. Mặt phẳng này là *mặt phẳng tiếp xúc* (hay *tiếp diện*) với mặt cong tại P_0.

Ví dụ. (Tìm véctơ vuông góc với mặt mức) Tìm véctơ vuông góc với mặt mức $x^2 + 2xy - yz + 3z^2 = 7$ tại điểm $P_0(1, 1, -1)$.

Tiếp diện và pháp tuyến

Giả sử mặt cong S có một véctơ pháp tuyến khác không N tại P_0. Khi đó đường thẳng đi qua P_0 song song với N được gọi là **pháp tuyến** với S tại P_0, và mặt phẳng qua P_0 với véctơ pháp tuyến **N** là **tiếp diện** với S tại P_0.

Tiếp diện và pháp tuyến

Giả sử mặt cong S có một véctơ pháp tuyến khác không N tại P_0. Khi đó đường thẳng đi qua P_0 song song với N được gọi là **pháp tuyến** với S tại P_0, và mặt phẳng qua P_0 với véctơ pháp tuyến **N** là **tiếp diện** với S tại P_0.

Giả sử S là một mặt cong có phương trình $F(x, y, z) = C$ là $P_0(x_0, y_0, z_0)$ là một điểm trên S với F là hàm khả vi có $\nabla F_0 \neq 0$. Khi đó phương trình tiếp diện với S tại P_0 là

$$F_x(P_0)(x - x_0) + F_y(P_0)(y - y_0) + F_z(P_0)(z - z_0) = 0$$

Tiếp diện và pháp tuyến

Giả sử mặt cong S có một véctơ pháp tuyến khác không N tại P_0. Khi đó đường thẳng đi qua P_0 song song với N được gọi là **pháp tuyến** với S tại P_0, và mặt phẳng qua P_0 với véctơ pháp tuyến **N** là **tiếp diện** với S tại P_0.

Giả sử S là một mặt cong có phương trình $F(x, y, z) = C$ là $P_0(x_0, y_0, z_0)$ là một điểm trên S với F là hàm khả vi có $\nabla F_0 \neq 0$. Khi đó phương trình tiếp diện với S tại P_0 là

$$F_x(P_0)(x - x_0) + F_y(P_0)(y - y_0) + F_z(P_0)(z - z_0) = 0$$

và pháp tuyến với S tại P_0 có phương trình tham số là

$$\begin{cases} x = x_0 + F_x(x_0, y_0, z_0)\, t \\ y = y_0 + F_y(x_0, y_0, z_0)\, t \\ z = z_0 + F_z(x_0, y_0, z_0)\, t \end{cases}$$

Tìm tiếp diện và pháp tuyến của một mặt cong

Ví dụ. Tìm phương trình của tiếp diện và pháp tuyến tại điểm $P_0\,(1, -1.2)$ trên mặt cong S xác định bởi $x^2y + y^2z + z^2x = 5$.

Tìm tiếp diện và pháp tuyến của một mặt cong

Ví dụ. Tìm phương trình của tiếp diện và pháp tuyến tại điểm $P_0\,(1,-1.2)$ trên mặt cong S xác định bởi $x^2y + y^2z + z^2x = 5$.

Ví dụ. Tìm phương trình của tiếp diện và pháp tuyến với mặt nón $z^2 = x^2 + y^2$ tại điểm có $x = 3, y = 4$ và $z > 0$.

Ví dụ. Tìm phương trình của tiếp diện và pháp tuyến với mặt paraboloid $z = x^2 + y^2$ tại điểm có $x = 3, y = 4$.

Hàm $f(x, y)$ được gọi là đạt **cực đại tuyệt đối** (absolute maximum) tại (x_0, y_0) nếu $f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$ với mọi (x, y) trong miền xác định D của f. Tương tự, f được gọi là đạt **cực tiểu tuyệt đối** (absolute minimum) tại (x_0, y_0) nếu $f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$ với mọi (x, y) trong D. Cực đại tuyệt đối và cực tiểu tuyệt đối được gọi chung là cực trị tuyệt đối (absolute extrema).

Cho f là một hàm xác định trên một miền chứa (x_0, y_0).

- $f(x_0, y_0)$ là một **cực đại tương đối** (relative maximum) nếu $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ với mọi (x, y) nằm trong một đĩa mở chứa (x_0, y_0).
- $f(x_0, y_0)$ là một **cực tiểu tương đối** (relative minimum) nếu $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$ với mọi (x, y) nằm trong một đĩa mở chứa (x_0, y_0).

Định lý 11.12 (Tiêu chuẩn đạo hàm riêng cho cực trị tương đối)

Nếu f có một cực trị tương đối (cực đại hoặc cực tiểu) tại $P_0\left(x_0, y_0\right)$ và các đạo hàm riêng f_x và f_y đều tồn tại tại $\left(x_0, y_0\right)$ thì

$$f_x\left(x_0, y_0\right) = f_y\left(x_0, y_0\right) = 0.$$

Định lý 11.12 (Tiêu chuẩn đạo hàm riêng cho cực trị tương đối)

Nếu f có một cực trị tương đối (cực đại hoặc cực tiểu) tại $P_0\left(x_0, y_0\right)$ và các đạo hàm riêng f_x và f_y đều tồn tại tại $\left(x_0, y_0\right)$ thì

$$f_x\left(x_0, y_0\right)=f_y\left(x_0, y_0\right)=0.$$

Một điểm tới hạn (critical point) của hàm f xác định trên một đĩa mở tại một điểm $\left(x_0, y_0\right)$ trong D khi hoặc một trong các điều sau đây xảy ra:

1. $f_x\left(x_0, y_0\right)=f_y\left(x_0, y_0\right)=0.$

Định lý 11.12 (Tiêu chuẩn đạo hàm riêng cho cực trị tương đối)

Nếu f có một cực trị tương đối (cực đại hoặc cực tiểu) tại $P_0\left(x_0, y_0\right)$ và các đạo hàm riêng f_x và f_y đều tồn tại tại $\left(x_0, y_0\right)$ thì

$$f_x\left(x_0, y_0\right) = f_y\left(x_0, y_0\right) = 0.$$

Một điểm tới hạn (critical point) của hàm f xác định trên một đĩa mở tại một điểm $\left(x_0, y_0\right)$ trong D khi hoặc một trong các điều sau đây xảy ra:

1. $f_x\left(x_0, y_0\right) = f_y\left(x_0, y_0\right) = 0.$
2. Ít nhất một trong các $f_x\left(x_0, y_0\right)$ hoặc $f_y\left(x_0, y_0\right)$ không tồn tại.

Phân biệt các điểm tới hạn

Ví dụ. Thảo luận về bản chất của điểm tới hạn $(0, 0)$ của các mặt bậc hai

a. $z = x^2 + y^2$ b. $z + x^2 + y^2 = 1$ c. $z = y^2 - x^2$

Phân biệt các điểm tới hạn

Ví dụ. Thảo luận về bản chất của điểm tới hạn $(0,0)$ của các mặt bậc hai

a. $z = x^2 + y^2$ b. $z + x^2 + y^2 = 1$ c. $z = y^2 - x^2$

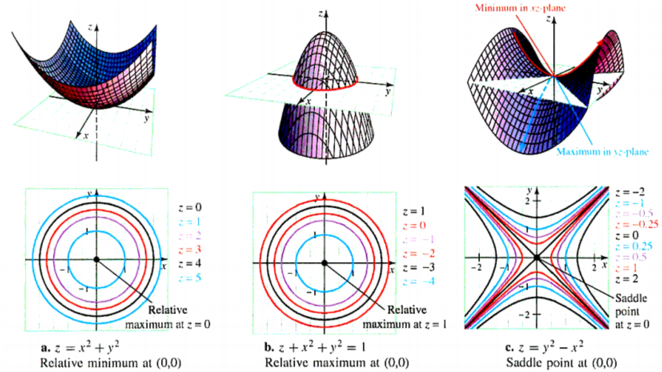


Figure 11.36 Interactive Classification of critical points

Định lý 11.13 (Tiêu chuẩn đạo hàm riêng cấp hai)

Cho $f(x, y)$ *có điểm tới hạn* $P(x_0, y_0)$ *và giả sử rằng* f *có các đạo hàm riêng cấp hai liên tục trong một đĩa tròn có tâm tại* (x_0, y_0). **Biệt thức** *của* f *là biểu thức* $D = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$. *Khi đó:*

Định lý 11.13 (Tiêu chuẩn đạo hàm riêng cấp hai)

Cho $f(x,y)$ có điểm tới hạn $P(x_0,y_0)$ và giả sử rằng f có các đạo hàm riêng cấp hai liên tục trong một đĩa tròn có tâm tại (x_0,y_0). **Biệt thức** *của f là biểu thức $D = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$. Khi đó:*
Hàm f đạt **cực đại tương đối** *tại P_0 nếu $D(x_0,y_0) > 0$ và $f_{xx}(x_0,y_0) < 0$ (hoặc tương đương $D(x_0,y_0) > 0$ và $f_{yy}(x_0,y_0) < 0$).*

Định lý 11.13 (Tiêu chuẩn đạo hàm riêng cấp hai)

Cho $f(x, y)$ có điểm tới hạn $P(x_0, y_0)$ và giả sử rằng f có các đạo hàm riêng cấp hai liên tục trong một đĩa tròn có tâm tại (x_0, y_0). **Biệt thức** *của f là biểu thức $D = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$. Khi đó:*

Hàm f đạt **cực đại tương đối** *tại P_0 nếu $D(x_0, y_0) > 0$ và $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$ (hoặc tương đương $D(x_0, y_0) > 0$ và $f_{yy}(x_0, y_0) < 0$).*

Hàm f đạt **cực tiểu tương đối** *tại P_0 nếu $D(x_0, y_0) > 0$ và $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$ (hoặc tương đương $D(x_0, y_0) > 0$ và $f_{yy}(x_0, y_0) > 0$).*

Định lý 11.13 (Tiêu chuẩn đạo hàm riêng cấp hai)

Cho $f(x, y)$ *có điểm tới hạn* $P(x_0, y_0)$ *và giả sử rằng* f *có các đạo hàm riêng cấp hai liên tục trong một đĩa tròn có tâm tại* (x_0, y_0). **Biệt thức** *của* f *là biểu thức* $D = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$. *Khi đó:*

Hàm f *đạt* **cực đại tương đối** *tại* P_0 *nếu* $D(x_0, y_0) > 0$ *và* $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$ *(hoặc tương đương* $D(x_0, y_0) > 0$ *và* $f_{yy}(x_0, y_0) < 0$*).*

Hàm f *đạt* **cực tiểu tương đối** *tại* P_0 *nếu* $D(x_0, y_0) > 0$ *và* $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$ *(hoặc tương đương* $D(x_0, y_0) > 0$ *và* $f_{yy}(x_0, y_0) > 0$*).*

Điểm P_0 *là* **điểm yên ngựa** *nếu* $D(x_0, y_0) < 0$.

Định lý 11.13 (Tiêu chuẩn đạo hàm riêng cấp hai)

Cho $f(x, y)$ có điểm tới hạn $P(x_0, y_0)$ và giả sử rằng f có các đạo hàm riêng cấp hai liên tục trong một đĩa tròn có tâm tại (x_0, y_0). **Biệt thức** *của f là biểu thức $D = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$. Khi đó:*

Hàm f đạt **cực đại tương đối** *tại P_0 nếu $D(x_0, y_0) > 0$ và $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$ (hoặc tương đương $D(x_0, y_0) > 0$ và $f_{yy}(x_0, y_0) < 0$).*

Hàm f đạt **cực tiểu tương đối** *tại P_0 nếu $D(x_0, y_0) > 0$ và $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$ (hoặc tương đương $D(x_0, y_0) > 0$ và $f_{yy}(x_0, y_0) > 0$).*

Điểm P_0 là **điểm yên ngựa** *nếu $D(x_0, y_0) < 0$.*

Nếu $D(x_0, y_0) = 0$, khi đó tiêu chuẩn là không xác định. Chúng ta không thể nói được gì về bản chất của mặt cong tại (x_0, y_0) mà không có thêm sự phân tích nào.

Ví dụ. Tìm tất cả các cực trị tương đối và điểm yên ngựa của hàm

$$f(x, y) = 2x^2 + 2xy + y^2 - 2x - 2y + 5.$$

Ví dụ. Tìm tất cả các cực trị tương đối và điểm yên ngựa của hàm

$$f(x, y) = 2x^2 + 2xy + y^2 - 2x - 2y + 5.$$

Ví dụ. Tìm tất cả các điểm tới hạn trên đồ thị của $f(x, y) = 8x^3 - 24xy + y^3$, và sử dụng tiêu chuẩn đạo hàm riêng cấp hai để phân loại các điểm là cực trị tương đối hay điểm yên ngựa.

Ví dụ. Tìm tất cả các cực trị tương đối và điểm yên ngựa của hàm

$$f(x,y) = 2x^2 + 2xy + y^2 - 2x - 2y + 5.$$

Ví dụ. Tìm tất cả các điểm tới hạn trên đồ thị của $f(x,y) = 8x^3 - 24xy + y^3$, và sử dụng tiêu chuẩn đạo hàm riêng cấp hai để phân loại các điểm là cực trị tương đối hay điểm yên ngựa.

Ví dụ. (Tiêu chuẩn đạo hàm riêng cấp hai không sử dụng được) Tìm tất cả cực trị tương đối và điểm yên ngựa trên đồ thị của $f(x,y) = x^2y^4$.

Ví dụ. Tìm tất cả các cực trị tương đối và điểm yên ngựa của hàm

$$f(x, y) = 2x^2 + 2xy + y^2 - 2x - 2y + 5.$$

Ví dụ. Tìm tất cả các điểm tới hạn trên đồ thị của $f(x, y) = 8x^3 - 24xy + y^3$, và sử dụng tiêu chuẩn đạo hàm riêng cấp hai để phân loại các điểm là cực trị tương đối hay điểm yên ngựa.

Ví dụ. (Tiêu chuẩn đạo hàm riêng cấp hai không sử dụng được) Tìm tất cả cực trị tương đối và điểm yên ngựa trên đồ thị của $f(x, y) = x^2y^4$.

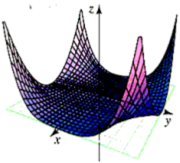


Figure 11.38 Interactive
Graph of $f(x, y) = x^2y^4$

Cực trị tuyệt đối của hàm liên tục

Định lý 11.14

Một hàm hai biến $f(x, y)$ *nhận giá trị cực đại tuyệt đối và cực tiểu tuyệt đối trên bất kỳ một tập đóng và bị chặn nào khi nó liên tục.*

Cực trị tuyệt đối của hàm liên tục

Định lý 11.14

Một hàm hai biến $f(x, y)$ nhận giá trị cực đại tuyệt đối và cực tiểu tuyệt đối trên bất kỳ một tập đóng và bị chặn nào khi nó liên tục.

Cách tìm: (f là hàm liên tục trên tập compact S)

Bước 1 Tìm tất cả các điểm tới hạn của f trên S.

Cực trị tuyệt đối của hàm liên tục

Định lý 11.14

Một hàm hai biến $f(x, y)$ nhận giá trị cực đại tuyệt đối và cực tiểu tuyệt đối trên bất kỳ một tập đóng và bị chặn nào khi nó liên tục.

Cách tìm: (f là hàm liên tục trên tập compact S)

Bước 1 Tìm tất cả các điểm tới hạn của f trên S.

Bước 2 Tìm tất cả các điểm trên biên của S mà cực trị tuyệt đối có thể xuất hiện (các điểm biên, điểm tới hạn, điểm mút,. . .)

Cực trị tuyệt đối của hàm liên tục

Định lý 11.14

Một hàm hai biến $f(x, y)$ nhận giá trị cực đại tuyệt đối và cực tiểu tuyệt đối trên bất kỳ một tập đóng và bị chặn nào khi nó liên tục.

Cách tìm: (f là hàm liên tục trên tập compact S)

Bước 1 Tìm tất cả các điểm tới hạn của f trên S.

Bước 2 Tìm tất cả các điểm trên biên của S mà cực trị tuyệt đối có thể xuất hiện (các điểm biên, điểm tới hạn, điểm mút,...)

Bước 3 Tính giá trị $f(x_0, y_0)$ tại mỗi điểm (x_0, y_0) đã tìm thấy ở Bước 1 và Bước 2.

Cực trị tuyệt đối của hàm liên tục

Định lý 11.14

Một hàm hai biến $f(x, y)$ nhận giá trị cực đại tuyệt đối và cực tiểu tuyệt đối trên bất kỳ một tập đóng và bị chặn nào khi nó liên tục.

Cách tìm: (f là hàm liên tục trên tập compact S)

Bước 1 Tìm tất cả các điểm tới hạn của f trên S.

Bước 2 Tìm tất cả các điểm trên biên của S mà cực trị tuyệt đối có thể xuất hiện (các điểm biên, điểm tới hạn, điểm mút,. . .)

Bước 3 Tính giá trị $f(x_0, y_0)$ tại mỗi điểm (x_0, y_0) đã tìm thấy ở Bước 1 và Bước 2.

Bước 4 Giá trị cực đại (cực tiểu) tuyệt đối của f trên S là giá trị lớn nhất (nhỏ nhất) tính được ở Bước 3.

Ví dụ về tìm cực trị tuyệt đối

Ví dụ. (Tìm cực trị tuyệt đối) Tìm cực trị tuyệt đối của hàm $f(x, y) = e^{x^2-y^2}$ trên đĩa $x^2 + y^2 \leq 1$.

Giải.

Ví dụ về tìm cực trị tuyệt đối

Ví dụ. (Tìm cực trị tuyệt đối) Tìm cực trị tuyệt đối của hàm $f(x, y) = e^{x^2 - y^2}$ trên đĩa $x^2 + y^2 \leq 1$.

Giải.

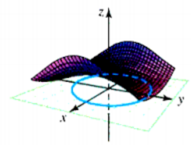


Figure 11.39 Graph of f over a disk

Ví dụ về tìm cực trị tuyệt đối

Ví dụ. (Tìm cực trị tuyệt đối) Tìm cực trị tuyệt đối của hàm $f(x,y) = e^{x^2-y^2}$ trên đĩa $x^2+y^2 \le 1$.

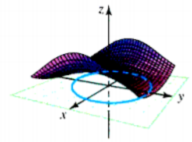


Figure 11.39 Graph of f over a disk

Giải.

Bước 1 $f_x(x,y) = 2xe^{x^2-y^2}$ và $f_y(x,y) = -2ye^{x^2-y^2}$.
$f_x(x,y) = f_y(x,y) = 0$ chỉ khi $x = y = 0$.

Ví dụ về tìm cực trị tuyệt đối

Ví dụ. (Tìm cực trị tuyệt đối) Tìm cực trị tuyệt đối của hàm $f(x,y) = e^{x^2-y^2}$ trên đĩa $x^2+y^2 \leq 1$.

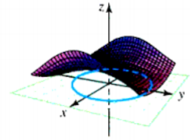


Figure 11.39 Graph of *f* over a disk

Giải.

Bước 1 $f_x(x,y) = 2xe^{x^2-y^2}$ và $f_y(x,y) = -2ye^{x^2-y^2}$.
$f_x(x,y) = f_y(x,y) = 0$ chỉ khi $x = y = 0$.

Bước 2 Trên biên $x^2+y^2 = 1$:
$f(x,y) = e^{x^2-y^2} = e^{x^2-(1-x^2)} = e^{2x^2-1} = F(x)$,
$-1 \leq x \leq 1$.

Ví dụ về tìm cực trị tuyệt đối

Ví dụ. (Tìm cực trị tuyệt đối) Tìm cực trị tuyệt đối của hàm $f(x,y) = e^{x^2-y^2}$ trên đĩa $x^2+y^2 \leq 1$.

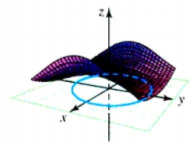


Figure 11.39 Graph of f over a disk

Giải.

Bước 1 $f_x(x,y) = 2xe^{x^2-y^2}$ và $f_y(x,y) = -2ye^{x^2-y^2}$.
$f_x(x,y) = f_y(x,y) = 0$ chỉ khi $x = y = 0$.

Bước 2 Trên biên $x^2+y^2 = 1$:
$f(x,y) = e^{x^2-y^2} = e^{x^2-(1-x^2)} = e^{2x^2-1} = F(x)$, $-1 \leq x \leq 1$.
$F'(x) = 0$ chỉ khi $x = 0$, khi đó $y = \pm 1$. Vậy $(0,1)$ và $(0,-1)$ là điểm tới hạn trên biên. Tại mút của đoạn $-1 \leq x \leq 1$, các điểm tới hạn tương ứng là $(-1,0)$ và $(1,0)$.

Ví dụ về tìm cực trị tuyệt đối

Ví dụ. (Tìm cực trị tuyệt đối) Tìm cực trị tuyệt đối của hàm $f(x, y) = e^{x^2-y^2}$ trên đĩa $x^2 + y^2 \leq 1$.

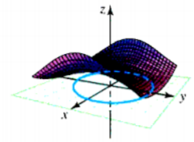


Figure 11.39 Graph of f over a disk

Giải.

Bước 1 $f_x(x, y) = 2xe^{x^2-y^2}$ và $f_y(x, y) = -2ye^{x^2-y^2}$.
$f_x(x, y) = f_y(x, y) = 0$ chỉ khi $x = y = 0$.

Bước 2 Trên biên $x^2 + y^2 = 1$:
$f(x, y) = e^{x^2-y^2} = e^{x^2-(1-x^2)} = e^{2x^2-1} = F(x)$,
$-1 \leq x \leq 1$.
$F'(x) = 0$ chỉ khi $x = 0$, khi đó $y = \pm 1$. Vậy $(0, 1)$ và $(0, -1)$ là điểm tới hạn trên biên. Tại mút của đoạn $-1 \leq x \leq 1$, các điểm tới hạn tương ứng là $(-1, 0)$ và $(1, 0)$.

Ví dụ về tìm cực trị tuyệt đối

Bước 3 Tính giá trị của f tại những điểm đã tìm được trong Bước 1 và 2.

Ví dụ về tìm cực trị tuyệt đối

Bước 3 Tính giá trị của f tại những điểm đã tìm được trong Bước 1 và 2.

Points to check	Compute $f(x_0, y_0) = e^{x_0^2 - y_0^2}$	
$(0,0)$	$f(0,0) = e^0 = 1$	
$(0,1)$	$f(0,1) = e^{-1}$;	minimum
$(0,-1)$	$f(0,-1) = e^{-1}$;	minimum
$(1,0)$	$f(1,0) = e$;	maximum
$(-1,0)$	$f(-1,0) = e$;	maximum

Ví dụ về tìm cực trị tuyệt đối

Bước 3 Tính giá trị của f tại những điểm đã tìm được trong Bước 1 và 2.

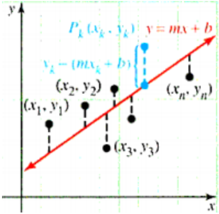
Points to check	Compute $f(x_0, y_0) = e^{x_0^2 - y_0^2}$	
$(0,0)$	$f(0,0) = e^0 = 1$	
$(0,1)$	$f(0,1) = e^{-1}$;	minimum
$(0,-1)$	$f(0,-1) = e^{-1}$;	minimum
$(1,0)$	$f(1,0) = e$;	maximum
$(-1,0)$	$f(-1,0) = e$;	maximum

Bước 4 Như đã được chỉ ra trong bảng trên, giá trị cực đại tuyệt đối của f trên đĩa là e, xuất hiện tại $(-1,0)$ và $(1,0)$, và giá trị nhỏ nhất là e^{-1}, xuất hiện tại $(0,-1)$ và $(0,1)$.

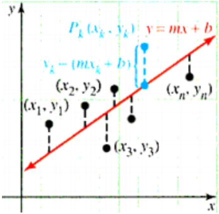
Ví dụ. (Khoảng cách nhỏ nhất từ một điểm trên một mặt phẳng) Tìm điểm trên mặt phẳng $x + 2y + z = 5$ gần nhất với điểm $P(0,3,4)$.

Xấp xỉ bình phương tối thiểu: Giả sử dữ liệu bao gồm n điểm $P_1, ..., P_n$ được biết, ta cần tìm một đường thẳng $y = mx + b$ mà "phù hợp nhất" với dữ liệu theo nghĩa là tổng các bình phương của các khoảng cách thẳng đứng từ mỗi điểm dữ liệu đến đường thẳng đó là nhỏ nhất: **Đường hồi quy tuyến tính của dữ liệu.**

Xấp xỉ bình phương tối thiểu: Giả sử dữ liệu bao gồm n điểm $P_1, ..., P_n$ được biết, ta cần tìm một đường thẳng $y = mx + b$ mà "phù hợp nhất" với dữ liệu theo nghĩa là tổng các bình phương của các khoảng cách thẳng đứng từ mỗi điểm dữ liệu đến đường thẳng đó là nhỏ nhất: **Đường hồi quy tuyến tính của dữ liệu.**

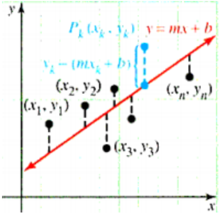


Xấp xỉ bình phương tối thiểu: Giả sử dữ liệu bao gồm n điểm $P_1, ..., P_n$ được biết, ta cần tìm một đường thẳng $y = mx + b$ mà "phù hợp nhất" với dữ liệu theo nghĩa là tổng các bình phương của các khoảng cách thẳng đứng từ mỗi điểm dữ liệu đến đường thẳng đó là nhỏ nhất: **Đường hồi quy tuyến tính của dữ liệu.**



Xét cực trị của $F(m, b) = \sum_{k=1}^{n} [y_k - (mx_k + b)]^2$, ta tìm được:

Xấp xỉ bình phương tối thiểu: Giả sử dữ liệu bao gồm n điểm $P_1, ..., P_n$ được biết, ta cần tìm một đường thẳng $y = mx + b$ mà "phù hợp nhất" với dữ liệu theo nghĩa là tổng các bình phương của các khoảng cách thẳng đứng từ mỗi điểm dữ liệu đến đường thẳng đó là nhỏ nhất: **Đường hồi quy tuyến tính của dữ liệu.**



Xét cực trị của $F(m,b) = \sum\limits_{k=1}^{n} \left[y_k - (mx_k + b)\right]^2$, ta tìm được:

$$m = \frac{n\sum\limits_{k=1}^{n} x_k y_k - \left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k\right)\left(\sum\limits_{k=1}^{n} y_k\right)}{n\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2 - \left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k\right)^2}, \text{ và}$$

$$b = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2 \sum\limits_{k=1}^{n} y_k - \left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k\right)\left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k y_k\right)}{n\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2 - \left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k\right)^2}.$$

Định lý 11.15 (Lagrange)

Giả sử rằng f và g có các đạo hàm riêng cấp một liên tục và f đạt cực trị tại $P_0(x_0, y_0)$ khi hạn chế lên đường cong ràng buộc trơn $g(x, y) = c$. Nếu $\nabla g(x_0, y_0) \neq 0$, tồn tại một số λ sao cho

$$\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0).$$

PHƯƠNG PHÁP NHÂN TỬ LAGRANGE

Giả sử f và g thỏa mãn các điều kiện của định lý Lagrange, và $f(x, y)$ có cực trị phụ thuộc vào ràng buộc $g(x, y) = c$.

Định lý 11.15 (Lagrange)

Giả sử rằng f và g có các đạo hàm riêng cấp một liên tục và f đạt cực trị tại $P_0\left(x_0, y_0\right)$ khi hạn chế lên đường cong ràng buộc trơn $g\left(x, y\right) = c$. Nếu $\nabla g\left(x_0, y_0\right) \neq 0$, tồn tại một số λ sao cho

$$\nabla f\left(x_0, y_0\right) = \lambda \nabla g\left(x_0, y_0\right).$$

PHƯƠNG PHÁP NHÂN TỬ LAGRANGE

Giả sử f và g thỏa mãn các điều kiện của định lý Lagrange, và $f\left(x, y\right)$ có cực trị phụ thuộc vào ràng buộc $g\left(x, y\right) = c$.

Bước 1. Giải đồng thời ba phương trình sau đây với x, y và λ:

$f_x\left(x, y\right) = \lambda g_x\left(x, y\right), f_y\left(x, y\right) = \lambda g_y\left(x, y\right), g\left(x, y\right) = c$

Định lý 11.15 (Lagrange)

Giả sử rằng f và g có các đạo hàm riêng cấp một liên tục và f đạt cực trị tại $P_0(x_0, y_0)$ khi hạn chế lên đường cong ràng buộc trơn $g(x, y) = c$. Nếu $\nabla g(x_0, y_0) \neq 0$, tồn tại một số λ sao cho

$$\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0).$$

PHƯƠNG PHÁP NHÂN TỬ LAGRANGE

Giả sử f và g thỏa mãn các điều kiện của định lý Lagrange, và $f(x, y)$ có cực trị phụ thuộc vào ràng buộc $g(x, y) = c$.

Bước 1. Giải đồng thời ba phương trình sau đây với x, y và λ:

$f_x(x, y) = \lambda g_x(x, y), f_y(x, y) = \lambda g_y(x, y), g(x, y) = c$

Bước 2. Tính giá trị f tại tất cả các điểm tìm được ở Bước 1 và tất cả các điểm trên biên của ràng buộc. Giá trị cực trị mà chúng ta cần tìm phải nằm trong các giá trị này.

Ví dụ. Biết rằng giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$ phụ thuộc vào điều kiện $x + y = 1$ với $x \geq 0, y \geq 0$ tồn tại, sử dụng phương pháp nhân tử Lagrange để tìm những cực trị này.

Ví dụ. Biết rằng giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$ phụ thuộc vào điều kiện $x + y = 1$ với $x \geq 0, y \geq 0$ tồn tại, sử dụng phương pháp nhân tử Lagrange để tìm những cực trị này.

Giải.

- Giải hệ $f_x(x, y) = \lambda g_x(x, y), f_y(x, y) = \lambda g_y(x, y), g(x, y) = c$ được nghiệm duy nhất $x = \frac{1}{2} = y$.

Ví dụ. Biết rằng giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $f(x,y) = 1 - x^2 - y^2$ phụ thuộc vào điều kiện $x + y = 1$ với $x \geq 0, y \geq 0$ tồn tại, sử dụng phương pháp nhân tử Lagrange để tìm những cực trị này.

Giải.

- Giải hệ $f_x(x,y) = \lambda g_x(x,y), f_y(x,y) = \lambda g_y(x,y), g(x,y) = c$ được nghiệm duy nhất $x = \frac{1}{2} = y$.
- Điểm mút của đoạn thẳng $x + y = 1$ với $x \geq 0, y \geq 0$ là $(1,0)$ và $(0,1)$ và $f(1,0) = 0 = f(0,1)$

Ví dụ. Biết rằng giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$ phụ thuộc vào điều kiện $x + y = 1$ với $x \geq 0, y \geq 0$ tồn tại, sử dụng phương pháp nhân tử Lagrange để tìm những cực trị này.

Giải.

- Giải hệ $f_x(x, y) = \lambda g_x(x, y), f_y(x, y) = \lambda g_y(x, y), g(x, y) = c$ được nghiệm duy nhất $x = \frac{1}{2} = y$.
- Điểm mút của đoạn thẳng $x + y = 1$ với $x \geq 0, y \geq 0$ là $(1, 0)$ và $(0, 1)$ và $f(1, 0) = 0 = f(0, 1)$
- Giá trị cực đại là $\frac{1}{2}$ tại $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, và giá trị cực tiểu là 0 tại $(1, 0)$ và$(0, 1)$.

Mở rộng phương pháp Lagrange cho hàm ba biến

Nếu một hàm $f(x, y, z)$ có một giá trị cực trị phụ thuộc vào điều kiện $g(x, y, z) = c$, thì giá trị cực trị xuất hiện tại điểm (x_0, y_0, z_0) sao cho $g(x_0, y_0, z_0) = c$ và $\nabla f(x_0, y_0, z_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0, z_0)$ với số λ nào đó.

Mở rộng phương pháp Lagrange cho hàm ba biến

Nếu một hàm $f(x, y, z)$ có một giá trị cực trị phụ thuộc vào điều kiện $g(x, y, z) = c$, thì giá trị cực trị xuất hiện tại điểm (x_0, y_0, z_0) sao cho $g(x_0, y_0, z_0) = c$ và $\nabla f(x_0, y_0, z_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0, z_0)$ với số λ nào đó.

PHƯƠNG PHÁP NHÂN TỬ LAGRANGE

Tương tự như đối với hàm hai biến, ta tìm cực trị có điều kiện của hàm ba biến theo hai bước:

Mở rộng phương pháp Lagrange cho hàm ba biến

Nếu một hàm $f(x, y, z)$ có một giá trị cực trị phụ thuộc vào điều kiện $g(x, y, z) = c$, thì giá trị cực trị xuất hiện tại điểm (x_0, y_0, z_0) sao cho $g(x_0, y_0, z_0) = c$ và $\nabla f(x_0, y_0, z_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0, z_0)$ với số λ nào đó.

PHƯƠNG PHÁP NHÂN TỬ LAGRANGE

Tương tự như đối với hàm hai biến, ta tìm cực trị có điều kiện của hàm ba biến theo hai bước:

Bước 1. Giải đồng thời bốn phương trình sau đây với x, y, z và λ:

$f_x(x, y, z) = \lambda g_x(x, y, z), f_y(x, y, z) = \lambda g_y(x, y, z), f_z(x, y, z) = \lambda g_z(x, y, z), g(x, y, z) = c$

Mở rộng phương pháp Lagrange cho hàm ba biến

Nếu một hàm $f(x, y, z)$ có một giá trị cực trị phụ thuộc vào điều kiện $g(x, y, z) = c$, thì giá trị cực trị xuất hiện tại điểm (x_0, y_0, z_0) sao cho $g(x_0, y_0, z_0) = c$ và $\nabla f(x_0, y_0, z_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0, z_0)$ với số λ nào đó.

PHƯƠNG PHÁP NHÂN TỬ LAGRANGE

Tương tự như đối với hàm hai biến, ta tìm cực trị có điều kiện của hàm ba biến theo hai bước:

Bước 1. Giải đồng thời bốn phương trình sau đây với x, y, z và λ:

$f_x(x, y, z) = \lambda g_x(x, y, z), f_y(x, y, z) = \lambda g_y(x, y, z), f_z(x, y, z) = \lambda g_z(x, y, z), g(x, y, z) = c$

Bước 2. Tính giá trị f tại tất cả các điểm tìm được ở Bước 1 và tất cả các điểm trên biên của ràng buộc. Giá trị cực trị mà chúng ta cần tìm phải nằm trong các giá trị này.

Ví dụ. (Điểm nóng nhất và lạnh nhất của một cái đĩa) Một cái thùng trong $\mathbb{R}^3$ có hình dạng một khối lập phương cho bởi $0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1, 0 \le z \le 1$. Một bản phẳng kim loại được đặt trong thùng theo cách nó chiếm một phần của mặt phẳng $x + y + z = 1$ nằm trong thùng hình lập phương. Nếu cái thùng này được đốt nóng sao cho nhiệt độ tại mỗi điểm (x, y, z) cho bởi $T(x, y, z) = 4 - 2x^2 - y^2 - z^2$, theo phần trăm của nhiệt độ Celsius, thì nhiệt độ nóng nhất và lạnh nhất trên bản kim loại là ở đâu và bằng bao nhiêu. Bạn có thể giả thiết những nhiệt độ cực trị này tồn tại.

Giải. $\begin{cases} T_x = \lambda g_x \\ T_y = \lambda g_y \\ T_z = \lambda g_z \\ g(x, y, z) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4x = \lambda \\ -2y = \lambda \\ -2z = \lambda \\ x + y + z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{5} \\ y = \frac{2}{5} \\ z = \frac{2}{5} \end{cases}$

Ví dụ. (Điểm nóng nhất và lạnh nhất của một cái đĩa) Một cái thùng trong $\mathbb{R}^3$ có hình dạng một khối lập phương cho bởi $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1$. Một bản phẳng kim loại được đặt trong thùng theo cách nó chiếm một phần của mặt phẳng $x + y + z = 1$ nằm trong thùng hình lập phương. Nếu cái thùng này được đốt nóng sao cho nhiệt độ tại mỗi điểm (x, y, z) cho bởi $T(x, y, z) = 4 - 2x^2 - y^2 - z^2$, theo phần trăm của nhiệt độ Celsius, thì nhiệt độ nóng nhất và lạnh nhất trên bản kim loại là ở đâu và bằng bao nhiêu. Bạn có thể giả thiết những nhiệt độ cực trị này tồn tại.

Giải. $\begin{cases} T_x = \lambda g_x \\ T_y = \lambda g_y \\ T_z = \lambda g_z \\ g(x, y, z) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4x = \lambda \\ -2y = \lambda \\ -2z = \lambda \\ x + y + z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{5} \\ y = \frac{2}{5} \\ z = \frac{2}{5} \end{cases}$

- Dọc theo các cạnh

- Dọc theo các cạnh
  - AC: $x + z = 1, y = 0$, $T(x, y, z) = T_1(x) = 3 - 3x^2 + 2x$, $0 \leq x \leq 1$. Điểm tới hạn tìm được là $\left(\frac{1}{3}, 0, \frac{2}{3}\right)$.

- Dọc theo các cạnh
  - AC: $x + z = 1, y = 0$, $T(x, y, z) = T_1(x) = 3 - 3x^2 + 2x$, $0 \leq x \leq 1$. Điểm tới hạn tìm được là $\left(\frac{1}{3}, 0, \frac{2}{3}\right)$.
  - AB: $x + y = 1, z = 0$, $T(x, y, z) = T_2(x) = 3 - 3x^2 + 2x$, $0 \leq x \leq 1$. Điểm tới hạn tìm được là $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0\right)$.

- Dọc theo các cạnh
  - AC: $x+z=1, y=0$, $T(x,y,z)=T_1(x)=3-3x^2+2x$, $0\le x\le 1$. Điểm tới hạn tìm được là $\left(\frac{1}{3},0,\frac{2}{3}\right)$.
  - AB: $x+y=1, z=0$, $T(x,y,z)=T_2(x)=3-3x^2+2x$, $0\le x\le 1$. Điểm tới hạn tìm được là $\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},0\right)$.
  - BC: $y+z=1, x=0$, $T(x,y,z)=T_3(y)=3+2y-2y^2$, $0\le x\le 1$. Điểm tới hạn tìm được là $\left(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

- Dọc theo các cạnh
  - AC: $x+z=1, y=0$, $T(x,y,z)=T_1(x)=3-3x^2+2x$, $0\le x\le 1$. Điểm tới hạn tìm được là $\left(\frac{1}{3},0,\frac{2}{3}\right)$.
  - AB: $x+y=1, z=0$, $T(x,y,z)=T_2(x)=3-3x^2+2x$, $0\le x\le 1$. Điểm tới hạn tìm được là $\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},0\right)$.
  - BC: $y+z=1, x=0$, $T(x,y,z)=T_3(y)=3+2y-2y^2$, $0\le x\le 1$. Điểm tới hạn tìm được là $\left(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.
- Các điểm mút các đoạn (cũng chính là biên của bản phẳng tam giác) là các đỉnh là $A(1,0,0), B(0,1,0), C(0,0,1)$.

- Dọc theo các cạnh
  - AC: $x+z=1, y=0$, $T(x,y,z)=T_1(x)=3-3x^2+2x$, $0\le x\le 1$. Điểm tới hạn tìm được là $\left(\frac{1}{3},0,\frac{2}{3}\right)$.
  - AB: $x+y=1, z=0$, $T(x,y,z)=T_2(x)=3-3x^2+2x$, $0\le x\le 1$. Điểm tới hạn tìm được là $\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},0\right)$.
  - BC: $y+z=1, x=0$, $T(x,y,z)=T_3(y)=3+2y-2y^2$, $0\le x\le 1$. Điểm tới hạn tìm được là $\left(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.
- Các điểm mút các đoạn (cũng chính là biên của bản phẳng tam giác) là các đỉnh là $A\left(1,0,0\right), B\left(0,1,0\right), C\left(0,0,1\right)$.
- Tính giá trị tại các điểm tới hạn: $T\left(\frac{1}{5},\frac{2}{5},\frac{2}{5}\right)=3\frac{3}{5}, T\left(\frac{1}{3},0,\frac{2}{3}\right)=3\frac{1}{3}, T\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},0\right)=3\frac{1}{3}, T\left(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=3\frac{1}{2}, T\left(1,0,0\right)=2, T\left(0,1,0\right)=3, T\left(0,0,1\right)=3.$

- Dọc theo các cạnh
  - AC: $x + z = 1, y = 0$, $T(x, y, z) = T_1(x) = 3 - 3x^2 + 2x$, $0 \leq x \leq 1$. Điểm tới hạn tìm được là $\left(\frac{1}{3}, 0, \frac{2}{3}\right)$.
  - AB: $x + y = 1, z = 0$, $T(x, y, z) = T_2(x) = 3 - 3x^2 + 2x$, $0 \leq x \leq 1$. Điểm tới hạn tìm được là $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0\right)$.
  - BC: $y + z = 1, x = 0$, $T(x, y, z) = T_3(y) = 3 + 2y - 2y^2$, $0 \leq x \leq 1$. Điểm tới hạn tìm được là $\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.
- Các điểm mút các đoạn (cũng chính là biên của bản phẳng tam giác) là các đỉnh là $A\left(1, 0, 0\right), B\left(0, 1, 0\right), C\left(0, 0, 1\right)$.
- Tính giá trị tại các điểm tới hạn: $T\left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{2}{5}\right) = 3\frac{3}{5}, T\left(\frac{1}{3}, 0, \frac{2}{3}\right) = 3\frac{1}{3}, T\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0\right) = 3\frac{1}{3}, T\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 3\frac{1}{2}, T\left(1, 0, 0\right) = 2, T\left(0, 1, 0\right) = 3, T\left(0, 0, 1\right) = 3$. Vậy nhiệt độ cao nhất là $360°C$ đạt tại $\left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{2}{5}\right)$, nhiệt độ thấp nhất là $200°C$ đạt tại $(1, 0, 0)$.