CHƯƠNG 12. TÍCH PHÂN BỘI

BỘ MÔN TOÁN - KHOA KHƯD - HCMUTE

Tích phân trên hình chữ nhật $R : a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d$

Tích phân trên hình chữ nhật $R: a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d$

- Bước 1. Phân hoạch R thành mn hình chữ nhật con, gọi phân hoạch này là P.

Tích phân trên hình chữ nhật $R : a \le x \le b,\ c \le y \le d$

- Bước 1. Phân hoạch R thành mn hình chữ nhật con, gọi phân hoạch này là P.
- Bước 2. Trên mỗi hình chữ nhật con chọn một điểm đại diện (x_k^*, y_k^*). Gọi ΔA_k là diện tích của hình chữ nhật con thứ k.

  Lập tổng $\sum\limits_{k=1}^{N} f\left(x_k^*, y_k^*\right) \Delta A_k$ (gọi là tổng Riemann của hàm f trên miền R).

Tích phân trên hình chữ nhật $R : a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d$

- Bước 1. Phân hoạch R thành mn hình chữ nhật con, gọi phân hoạch này là P.
- Bước 2. Trên mỗi hình chữ nhật con chọn một điểm đại diện (x_k^*, y_k^*). Gọi ΔA_k là diện tích của hình chữ nhật con thứ k. Lập tổng $\sum\limits_{k=1}^{N} f\left(x_k^*, y_k^*\right) \Delta A_k$ (gọi là tổng Riemann của hàm f trên miền R).
- Bước 3. Gọi $\|P\|$ là đường kính của phân hoạch,

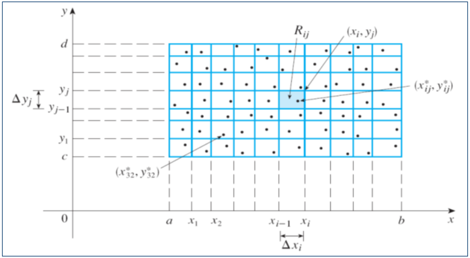
Tích phân trên hình chữ nhật $R : a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d$

- Bước 1. Phân hoạch R thành mn hình chữ nhật con, gọi phân hoạch này là P.
- Bước 2. Trên mỗi hình chữ nhật con chọn một điểm đại diện (x_k^*, y_k^*). Gọi ΔA_k là diện tích của hình chữ nhật con thứ k. Lập tổng $\sum_{k=1}^{N} f\left(x_k^*, y_k^*\right) \Delta A_k$ (gọi là tổng Riemann của hàm f trên miền R).
- Bước 3. Gọi $\|P\|$ là đường kính của phân hoạch, giới hạn (nếu tồn tại)

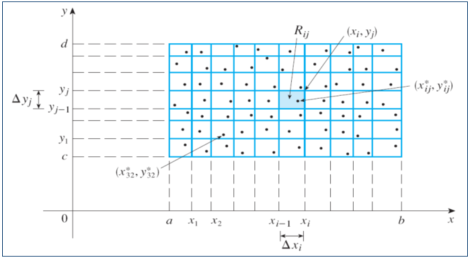
$$\iint_R f(x,y)dA := \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{N} f\left(x_k^*, y_k^*\right) \Delta A_k$$

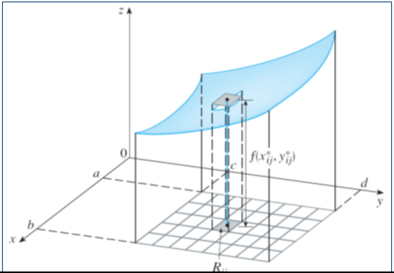
được gọi là tích phân bội hai của hàm f trên miền R.

Minh họa

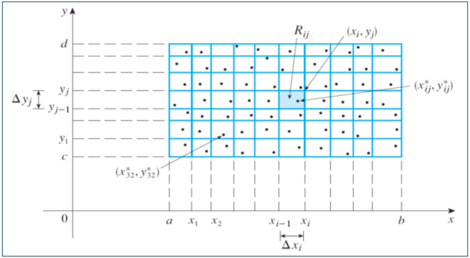

y
d
R_{ij}
(x_i, y_j)
(x^*_{ij}, y^*_{ij})
Δy_j
y_j
y_{j-1}
y_1
c
(x^*_{32}, y^*_{32})
0
a
x_1
x_2
x_{i-1}
x_i
b
x
Δx_i

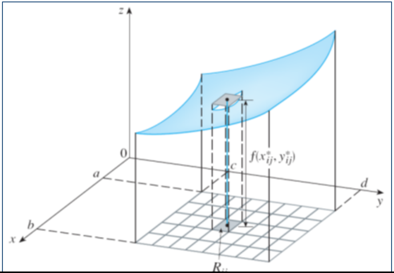
Minh họa

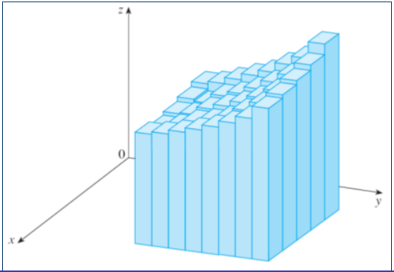

y
d
R_{ij}
(x_i, y_j)
(x_{ij}^*, y_{ij}^*)
Δy_j
y_j
y_{j-1}
y_1
c
(x_{32}^*, y_{32}^*)
0
a
x_1
x_2
x_{i-1}
x_i
b
x
Δx_i


z
0
a
b
x
c
d
y
$f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)$

Minh họa


y
d
y_j
Δy_j
y_{j-1}
y_1
c
0
R_{ij}
(x_i, y_j)
(x_{ij}^*, y_{ij}^*)
(x_{32}^*, y_{32}^*)
a
x_1
x_2
x_{i-1}
x_i
b
x
Δx_i


z
0
a
b
x
c
d
y
$f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)$


z
0
x
y

Định lý 12.1 (Các tính chất của tích phân bội hai)

Luật tuyến tính: *Với hằng số a và b,*

$$\iint\limits_R [a\, f(x,y) + bg(x,y)]\, dA = a \iint\limits_R f(x,y)\, dA + b \iint\limits_R g(x,y)\, dA.$$

Định lý 12.1 (Các tính chất của tích phân bội hai)

Luật tuyến tính: *Với hằng số* a *và* b*,*

$$\iint\limits_R [a\,f(x,y) + bg(x,y)]\,dA = a\iint\limits_R f(x,y)\,dA + b\iint\limits_R g(x,y)\,dA.$$

Luật trội: *Nếu* $f(x,y) \geq g(x,y)$ *trên một miền chữ nhật* R *thì*

$$\iint\limits_R f(x,y)\,dA \geq \iint\limits_R g(x,y)\,dA.$$

Định lý 12.1 (Các tính chất của tích phân bội hai)

Luật tuyến tính: *Với hằng số a và b,*

$$\iint\limits_R \left[a\, f(x,y) + bg(x,y)\right] dA = a \iint\limits_R f(x,y)\, dA + b \iint\limits_R g(x,y)\, dA.$$

Luật trội: *Nếu $f(x,y) \geq g(x,y)$ trên một miền chữ nhật R thì*

$$\iint\limits_R f(x,y)\, dA \geq \iint\limits_R g(x,y)\, dA.$$

Luật chia nhỏ: *Nếu miền chữ nhật R được chia làm hai hình chữ nhật con R_1 và R_2 thì*

$$\iint f(x,y)\, dA = \iint f(x,y)\, dA + \iint f(x,y)\, dA.$$

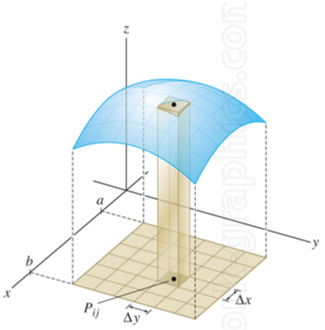
Tích phân bội hai như là thể tích

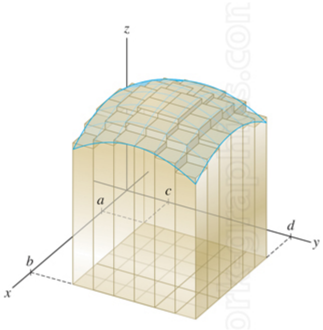
Tích phân bội hai như là thể tích

Tính thể tích của vật thể phía dưới $z = f(x, y)$ trên R:

Tích phân bội hai như là thể tích

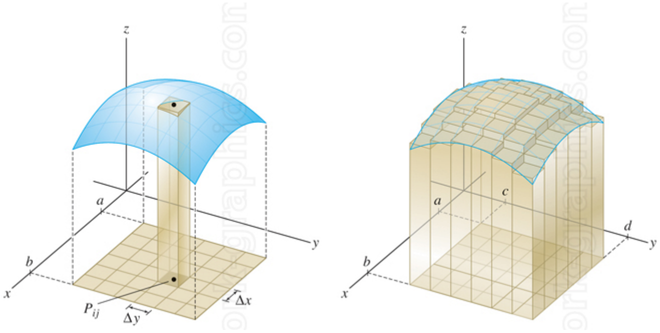
Tính thể tích của vật thể phía dưới $z = f(x, y)$ trên R:





Tích phân bội hai như là thể tích

Tính thể tích của vật thể phía dưới $z = f(x, y)$ trên R:



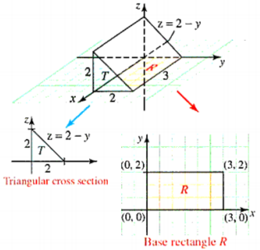
$$V = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{N} f\left(x_k^*, y_k^*\right) \Delta A_k = \iint\limits_{R} f\left(x, y\right) dA$$

Ví dụ

Ví dụ. Tính $\iint\limits_R (2-y)\,dA$ trong đó R là một hình chữ nhật trong mặt phẳng Oxy với các đỉnh $(0,0),(3,0),(3,2)$ và $(0,2)$.

Ví dụ

Ví dụ. Tính $\iint\limits_R (2-y)\,dA$ trong đó R là một hình chữ nhật trong mặt phẳng Oxy với các đỉnh $(0,0),(3,0),(3,2)$ và $(0,2)$.



Định lí Fubini trên một miền chữ nhật

Định lí Fubini trên một miền chữ nhật

Định lý 12.2

Nếu $f(x,y)$ *liên tục trên hình chữ nhật* $R : a \le x \le b,\ c \le y \le d$ *thì tích phân bội hai* $\iint\limits_R f(x,y)\,dA$ *có thể được tính bởi một trong hai tích phân lặp, đó là*

$$\iint\limits_R f(x,y)\,dA = \int\limits_c^d \int\limits_a^b f(x,y)\,dxdy = \int\limits_a^b \int\limits_c^d f(x,y)\,dydx.$$

Định lí Fubini trên một miền chữ nhật

Định lý 12.2

Nếu $f(x,y)$ *liên tục trên hình chữ nhật* $R : a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d$ *thì tích phân bội hai* $\iint\limits_R f(x,y)\,dA$ *có thể được tính bởi một trong hai tích phân lặp, đó là*

$$\iint\limits_R f(x,y)\,dA = \int\limits_c^d \int\limits_a^b f(x,y)\,dx dy = \int\limits_a^b \int\limits_c^d f(x,y)\,dy dx.$$

Trong trường hợp $f(x,y) = g(x)\,h(y)$, Định lí Fubini cho phép tích phân được viết dưới dạng $\int\limits_a^b g(x)\,dx \int\limits_c^d h(y)\,dy$.

Ví dụ

Ví dụ. Tính $\iint\limits_R (2-y)\, dA$ trong đó R là một hình chữ nhật trong mặt phẳng Oxy với các đỉnh $(0,0), (3,0), (3,2)$ và $(0,2)$.

Ví dụ

Ví dụ. Tính $\iint\limits_R (2-y)\,dA$ trong đó R là một hình chữ nhật trong mặt phẳng Oxy với các đỉnh $(0,0),(3,0),(3,2)$ và $(0,2)$.

Ví dụ. Tính $\iint\limits_R x^2y^5dA$, trong đó R là hình chữ nhật $1 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 1$, dùng tích phân lặp với

a. Lấy tích phân theo y trước.

Ví dụ

Ví dụ. Tính $\iint\limits_R (2-y)\, dA$ trong đó R là một hình chữ nhật trong mặt phẳng Oxy với các đỉnh $(0,0),(3,0),(3,2)$ và $(0,2)$.

Ví dụ. Tính $\iint\limits_R x^2y^5 dA$, trong đó R là hình chữ nhật $1 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 1$, dùng tích phân lặp với

a. Lấy tích phân theo y trước.
b. Lấy tích phân theo x trước.

Ví dụ

Ví dụ. Tính $\iint\limits_R (2-y)\,dA$ trong đó R là một hình chữ nhật trong mặt phẳng Oxy với các đỉnh $(0,0),(3,0),(3,2)$ và $(0,2)$.

Ví dụ. Tính $\iint\limits_R x^2y^5dA$, trong đó R là hình chữ nhật $1\le x\le 2,\ 0\le y\le 1$, dùng tích phân lặp với

a. Lấy tích phân theo y trước.
b. Lấy tích phân theo x trước.

Ví dụ. (Chọn thứ tự lấy tích phân) Tính $\iint\limits_R x\cos(xy)\,dA$ với $R: 0\le x\le \frac{\pi}{2},\ 0\le y\le 1.$

Định lý Fubini tổng quát

Định lý 12.3

Nếu $D_1 : a \leq x \leq b,\ g_1(x) \leq y \leq g_2(x)$ *(loại I) thì*

$$\iint\limits_{D_1} f(x,y)\,dA = \int\limits_a^b \int\limits_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dydx.$$

Định lý Fubini tổng quát

Định lý 12.3

Nếu $D_1 : a \le x \le b,\ g_1(x) \le y \le g_2(x)$ *(loại I) thì*

$$\iint\limits_{D_1} f(x,y)\,dA = \int\limits_a^b \int\limits_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dydx.$$

Nếu $D_2 : c \le y \le d,\ h_1(y) \le x \le h_2(y)$ *(loại II) thì*

$$\iint\limits_{D_2} f(x,y)\,dA = \int\limits_c^d \int\limits_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,dxdy.$$

Ví dụ

Ví dụ. Tính $\int\limits_0^1 \int\limits_{x^2}^{\sqrt{x}} 160xy^3 dydx$.

Ví dụ

Ví dụ. Tính $\int\limits_0^1 \int\limits_{x^2}^{\sqrt{x}} 160xy^3 dydx$.

Ví dụ. Cho T là một miền tam giác giới hạn bởi các đường thẳng $y = 0$, $y = 2x$, và $x = 1$. Tính tích phân bội hai $\iint\limits_T (x + y)\, dA$ bằng cách dùng tích phân lặp với

a. Lấy tích phân theo y trước.

Ví dụ

Ví dụ. Tính $\int\limits_0^1 \int\limits_{x^2}^{\sqrt{x}} 160xy^3 dydx$.

Ví dụ. Cho T là một miền tam giác giới hạn bởi các đường thẳng $y = 0$, $y = 2x$, và $x = 1$. Tính tích phân bội hai $\iint\limits_T (x + y)\, dA$ bằng cách dùng tích phân lặp với

a. Lấy tích phân theo y trước.
b. Lấy tích phân theo x trước.

Tích phân bội hai như là diện tích và thể tích

Diện tích của miền D trong mặt phẳng xy được cho bởi

$$A = \iint_D dA.$$

Tích phân bội hai như là diện tích và thể tích

Diện tích của miền D trong mặt phẳng xy được cho bởi

$$A = \iint\limits_{D} dA.$$

Nếu f liên tục và $f(x, y) \geq 0$ trên miền D, thể tích của khối bên dưới mặt $z = f(x, y)$ bên trên miền D được cho bởi

$$V = \iint\limits_{D} f(x, y)\, dA.$$

Các ví dụ

Các ví dụ

Ví dụ. Tìm diện tích của miền D giữa $y = \cos x$ và $y = \sin x$ trên đoạn $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ dùng

a. một tích phân đơn;

Các ví dụ

Ví dụ. Tìm diện tích của miền D giữa $y = \cos x$ và $y = \sin x$ trên đoạn $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ dùng

a. một tích phân đơn;
b. một tích phân bội hai.

Các ví dụ

Ví dụ. Tìm diện tích của miền D giữa $y = \cos x$ và $y = \sin x$ trên đoạn $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ dùng

a. một tích phân đơn;
b. một tích phân bội hai.

Ví dụ. Tìm thể tích của khối bị chặn trên bởi mặt phẳng $z = y$ và bị chặn dưới trong mặt phẳng Oxy bởi phần nằm trong góc phần tư thứ nhất của đĩa $x^2 + y^2 \leq 1$.

Các ví dụ

Ví dụ. Tìm diện tích của miền D giữa $y = \cos x$ và $y = \sin x$ trên đoạn $0 \le x \le \frac{\pi}{4}$ dùng

a. một tích phân đơn;
b. một tích phân bội hai.

Ví dụ. Tìm thể tích của khối bị chặn trên bởi mặt phẳng $z = y$ và bị chặn dưới trong mặt phẳng Oxy bởi phần nằm trong góc phần tư thứ nhất của đĩa $x^2 + y^2 \le 1$.

Ví dụ. Tính $\iint\limits_{x^2+y^2 \le 4} \sqrt{4 - x^2 - y^2}\, dA$.

Đổi thứ tự lấy tích phân

Ví dụ. Đổi thứ tự lấy tích phân $\int_0^2 \int_1^{e^x} f(x,y)\,dydx$.

Đổi thứ tự lấy tích phân

Ví dụ. Đổi thứ tự lấy tích phân $\int\limits_0^2 \int\limits_1^{e^x} f(x,y)\, dy dx$.

Ví dụ. Miền D bị chặn bởi parabol $y = x^2 - 2$ và đường thẳng $y = x$ đơn cả theo chiều dọc và theo chiều ngang. Để tìm diện tích của D, bạn thích dùng mô tả loại I hay loại II hơn?

Đổi thứ tự lấy tích phân

Ví dụ. Đổi thứ tự lấy tích phân $\int_0^2 \int_1^{e^x} f(x,y)\,dydx$.

Ví dụ. Miền D bị chặn bởi parabol $y = x^2 - 2$ và đường thẳng $y = x$ đơn cả theo chiều dọc và theo chiều ngang. Để tìm diện tích của D, bạn thích dùng mô tả loại I hay loại II hơn?

Ví dụ. Tính $\int_0^1 \int_x^1 e^{y^2}\,dydx$.

Ví dụ. Tính $\iint\limits_{x^2+y^2\le 4} (x^2+y^2+1)\,dA$.

Giải. $\iint\limits_{D} (x^2+y^2+1)\,dA = \int\limits_{-2}^{2} \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-y^2}} (x^2+y^2+1)\,dydx.$

Ví dụ. Tính $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2\leq 4} \left(x^2+y^2+1\right) dA.$

Giải. $\displaystyle\iint\limits_{D} \left(x^2+y^2+1\right) dA = \int\limits_{-2}^{2} \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-y^2}} \left(x^2+y^2+1\right) dydx.$

Định lý 12.4

Nếu f liên tục trong miền cực D được mô tả bởi $0 \leq r_1(\theta) \leq r \leq r_2(\theta)$, $\alpha \leq \theta \leq \beta$ trong đó $0 \leq \beta - \alpha \leq 2\pi$ thì

$$\iint\limits_{D} f(r,\theta)\, dA = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \int\limits_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r,\theta)\, r dr d\theta.$$

Tính diện tích và thể tích ở dạng cực

Ví dụ. Tính diện tích của miền D bị chặn trên bởi đường thẳng $y = x$ và bị chặn dưới bởi đường tròn $x^2 + y^2 - 2y = 0$.

Tính diện tích và thể tích ở dạng cực

Ví dụ. Tính diện tích của miền D bị chặn trên bởi đường thẳng $y = x$ và bị chặn dưới bởi đường tròn $x^2 + y^2 - 2y = 0$.

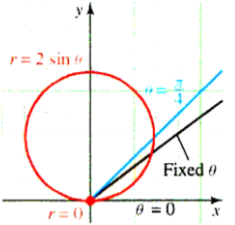
Tính diện tích và thể tích ở dạng cực

Ví dụ. Tính diện tích của miền D bị chặn trên bởi đường thẳng $y = x$ và bị chặn dưới bởi đường tròn $x^2 + y^2 - 2y = 0$.

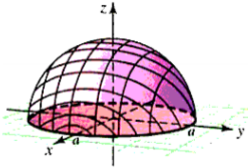
Ví dụ. Dùng tích phân bội hai ở dạng cực để chứng minh rằng một khối cầu bán kính a có thể tích $\frac{4}{3}\pi a^3$.

Tính diện tích và thể tích ở dạng cực

Ví dụ. Tính diện tích của miền D bị chặn trên bởi đường thẳng $y = x$ và bị chặn dưới bởi đường tròn $x^2 + y^2 - 2y = 0$.

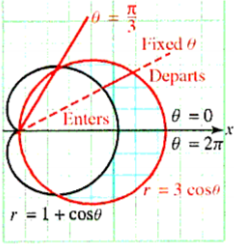


Ví dụ. Dùng tích phân bội hai ở dạng cực để chứng minh rằng một khối cầu bán kính a có thể tích $\frac{4}{3}\pi a^3$.

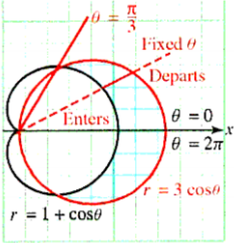


Ví dụ. Tính $\iint\limits_D \frac{1}{x} dA$, trong đó D là miền nằm bên trong đường tròn $r = 3\cos\theta$ và bên ngoài đường cardioid $r = 1 + \cos\theta$.

Ví dụ. Tính $\iint\limits_D \frac{1}{x} dA$, trong đó D là miền nằm bên trong đường tròn $r = 3\cos\theta$ và bên ngoài đường cardioid $r = 1 + \cos\theta$.

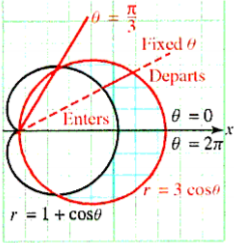


Ví dụ. Tính $\iint\limits_{D} \frac{1}{x} dA$, trong đó D là miền nằm bên trong đường tròn $r = 3\cos\theta$ và bên ngoài đường cardioid $r = 1 + \cos\theta$.

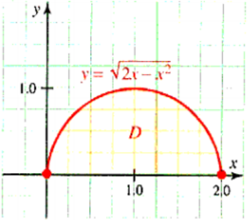


Ví dụ. Tính $\int\limits_0^2 \int\limits_0^{\sqrt{2x-x^2}} y\sqrt{x^2+y^2}\,dydx$ bằng việc chuyển sang tọa độ cực.

Ví dụ. Tính $\iint\limits_D \frac{1}{x} dA$, trong đó D là miền nằm bên trong đường tròn $r = 3\cos\theta$ và bên ngoài đường cardioid $r = 1 + \cos\theta$.



Ví dụ. Tính $\int\limits_0^2 \int\limits_0^{\sqrt{2x-x^2}} y\sqrt{x^2+y^2}\,dydx$ bằng việc chuyển sang tọa độ cực.



Định lý 12.5

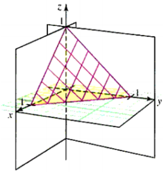
Giả sử hàm $f(x, y)$ có các đạo hàm riêng f_x và f_y liên tục trên một miền R của mặt phẳng Oxy. Khi đó, phần mặt $z = f(x, y)$ nằm trên R có diện tích mặt

$$S = \iint\limits_R \sqrt{[f_x(x, y)]^2 + [f_y(x, y)]^2 + 1}\, dA.$$

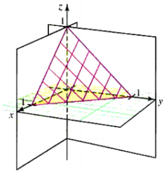
Chú ý rằng $dS = \sqrt{[f_x(x, y)]^2 + [f_y(x, y)]^2 + 1}\, dA$ và nó được gọi là **thành phần diện tích mặt** *hay* **vi phân mặt**.

Ví dụ. Tìm diện tích mặt của phần mặt phẳng $x + y + z = 1$ nằm trong phần tám thứ nhất $(x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0)$.

Ví dụ. Tìm diện tích mặt của phần mặt phẳng $x + y + z = 1$ nằm trong phần tám thứ nhất $(x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0)$.

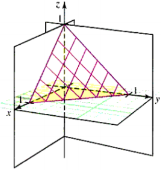


Ví dụ. Tìm diện tích mặt của phần mặt phẳng $x + y + z = 1$ nằm trong phần tám thứ nhất $(x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0)$.



Ví dụ. Tìm diện tích mặt (đến phần trăm gần nhất của đơn vị diện tích) của phần paraboloid $x^2 + y^2 + z = 5$ nằm phía trên mặt phẳng $z = 1$.

Ví dụ. Tìm diện tích mặt của phần mặt phẳng $x + y + z = 1$ nằm trong phần tám thứ nhất $(x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0)$.



Ví dụ. Tìm diện tích mặt (đến phần trăm gần nhất của đơn vị diện tích) của phần paraboloid $x^2 + y^2 + z = 5$ nằm phía trên mặt phẳng $z = 1$.