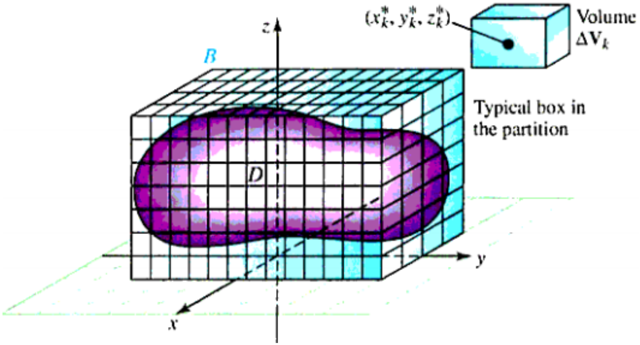
CHƯƠNG 12. TÍCH PHÂN BỘI

BỘ MÔN TOÁN - KHOA KHƯD - HCMUTE

Định nghĩa tích phân bội ba

Giả sử $f(x, y, z)$ xác định trên miền đóng, bị chặn D, chứa trong một " hình hộp" B trong không gian.

- Chia B thành một số hữu hạn các hình hộp nhỏ bằng các mặt phẳng song song với các mặt phẳng tọa độ. Chúng ta không xét đến các hình hộp chứa các điểm bên ngoài D.



Định nghĩa tích phân bội ba

- Gọi $\Delta V_1,\ \Delta V_2,\ \ldots,\ \Delta V_n$ và ký hiệu cho thể tích của các hình hộp còn lại, và định nghĩa chuẩn $\|P\|$ của việc chia D là đường kính dài nhất của hình hộp bất kỳ có trong sự phân chia đó.
- Chọn một điểm tùy ý $(x_k^*,\ y_k^*,\ z_k^*)$ trong mỗi hình hộp ΔV_k, lập tổng Riemann:

$$\sum_{k=1}^{n} f\,(x_k^*,\ y_k^*,\ z_k^*)\Delta V_k.$$

- Tích phân bội ba của f trên D được định nghĩa bởi giới hạn:

$$\iiint\limits_D f\,(x, y, z)\,dV = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f\,(x_k^*,\ y_k^*,\ z_k^*)\Delta V_k.$$

Tính chất của tích phân ba lớp

1. Với a, b là các hằng số thì

$$\iiint\limits_D [af(x,y,z) + bg(x,y,z)]\, dV =$$

$$= a\iiint\limits_D f(x,y,z)\, dV + b\iiint\limits_D g(x,y,z)\, dV.$$

2. Nếu $f(x,y,z) \geq g(x,y,z)$ trên D, thì

$$\iiint\limits_D f(x,y,z)\, dV \geq \iiint\limits_D g(x,y,z)\, dV.$$

3. Nếu miền lấy tích phân D chia thành hai miền D_1 và D_2 thì

$$\iiint\limits_D f(x,y,z)\, dV = \iiint\limits_{D_1} f(x,y,z)\, dV + \iiint\limits_{D_2} f(x,y,z)\, dV.$$

Định lý Fubini cho tích phân ba lớp

Định lý 12.6

Nếu hàm $f(x, y, z)$ liên tục trong hình hộp chữ nhật B:
$a \le x \le b,\ c \le y \le d, r \le z \le s,$*thì tích phân bội ba có thể tính bởi tích phân lặp sau:*

$$\iiint\limits_B f(x,y,z)\,dV = \int\limits_r^s \int\limits_c^d \int\limits_a^b f(x,y,z)\,dxdydz$$

Chú ý: Tích phân lặp này có thể tính theo thứ tự bất kỳ, với sự điều chỉnh thích hợp với các cận lấy tích phân

$$dxdydz, dxdzdy, ..., dzdydx.$$

Tích phân của hàm tách biến trên hình hộp

Nếu hàm $f(x,y,z) = f_1(x).\ f_2(y).\ f_3(z)$ thì tích phân có thể được viết

$$\iiint\limits_B f(x,y,z)\,dV = \int_a^b f_1(x)dx \int_c^d f_2(y)dy \int_r^s f_3(z)dz.$$

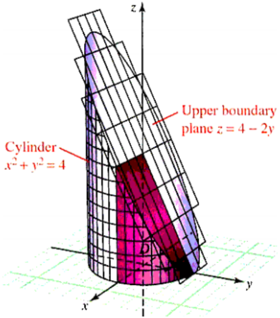
Ví dụ. Tính $\iiint\limits_B z^2 y e^x dV$, trong đó B là hình hộp xác định bởi $0 \le x \le 1,\ 1 \le y \le 2,\ -1 \le z \le 1.$

Tích phân bội ba trên miền z-đơn

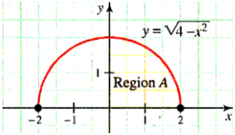
Định lý 12.7

Giả sử D là miền giới hạn dưới bởi mặt $z = u(x,y)$ và giới hạn trên bởi $z = v(x,y)$ có hình chiếu A lên mặt phẳng $0xy$. Nếu A là loại I hay loại II, thì tích phân của hàm liên tục $f(x,y,z)$ trên miền D là

$$\iiint\limits_D f(x,y,z)dV = \iint\limits_A \int\limits_{u(x,y)}^{v(x,y)} f(x,y,z)dzdydx$$



Ví dụ. Tính $\iiint\limits_D xdV$, trong đó D là khối trong góc phần tám thứ nhất giới hạn bởi mặt trụ $x^2 + y^2 = 4$ và mặt phẳng $2y + z = 4$

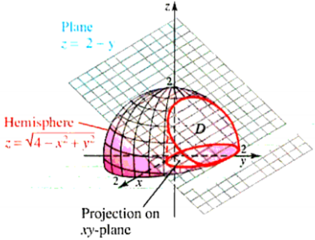


Tính thể tích nhờ các tích phân bội ba $V = \iiint\limits_D dV$

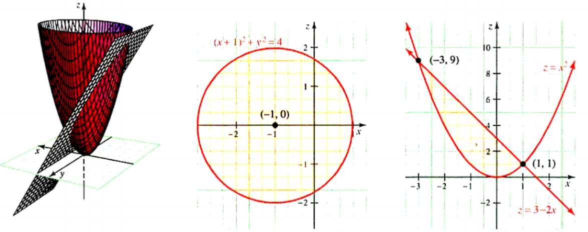
VÍ DỤ. Tính thể tích của tứ diện T giới hạn bởi mặt phẳng $2x + y + 3z = 6$ và các mặt phẳng tọa độ $x = 0$, $y = 0$ và $z = 0$.

VÍ DỤ. Tính thể tích của tứ diện T giới hạn bởi và các mặt phẳng tọa độ và mặt phẳng $2x + y + 3z = 6$ trong góc phần tám thứ nhất bằng cách chiếu lên mặt phẳng $0yz$.

VÍ DỤ. Thiết lập (không cần tính) một tích phân bội ba để tính thể tích của khối D giới hạn trên bởi mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ và dưới bởi mặt phẳng $y + z = 2$. Hình chiếu lên mặt phẳng $0xy$ được biểu diễn như hình bên.



VÍ DỤ. Tính thể tích của vật thể D giới hạn bên dưới bởi mặt paraboloid $z = x^2 + y^2$ và giới hạn trên bởi mặt phẳng $2x + z = 3$.



a. The solid D **b.** The projection of D on the xy-plane **c.** The projection of D on the xz-plane

VÍ DỤ. Thiết lập công thức (biểu diễn qua tích phân hai lớp) để tính $\iiint\limits_D f(x,y)dV$, trong đó D là miền giới hạn bởi:

1. mặt nón $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ và mặt cầu $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$.
2. mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ và nằm trong mặt trụ $x^2 + y^2 = 2y$.

Khối lượng và khối tâm

Nếu $\rho(x,y)$ là hàm khối lượng riêng liên tục trên bản phẳng ứng với miền phẳng R, thì khối lượng m của bản phẳng được xác định bởi

$$m = \iint\limits_R \rho(x,y)dA.$$

Ví dụ. Tìm khối lượng của bản mỏng có khối lượng riêng $\rho(x,y) = x^2$ tương ứng với miền R giới hạn bởi parabol $y = 2 - x^2$ và đường thẳng $y = x$.

Nhận xét. Nếu bản phẳng R là đồng chất có khối lượng riêng là ρ thì khối lượng m của bản phẳng được xác định bởi

$$m = \rho \iint\limits_R dA = \rho \times (\text{diện tích của } R) = \rho A_R.$$

- **Mômen khối lượng bản phẳng:** Nếu $\rho(x, y)$ là hàm khối lượng riêng liên tục trên bản phẳng ứng với miền phẳng R, thì mô men khối lượng của hàm khối lượng riêng quanh các trục 0x và 0y, lần lượt là

$$M_x = \iint_R y\rho(x, y)dA \text{ và } M_y = \iint_R x\rho(x, y)dA.$$

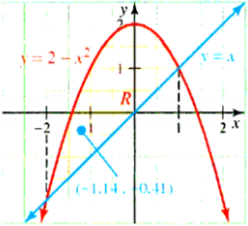
- **Tâm khối:** Nếu m là khối lượng của bản mỏng, khối tâm là $(\overline{x}, \overline{y})$, trong đó

$$\overline{x} = \frac{M_y}{m} \text{ và } \overline{y} = \frac{M_x}{m}.$$

- **Trọng tâm:** Nếu trọng lượng riêng ρ là hằng số, điểm $(\overline{x}, \overline{y})$ được là trọng tâm của miền.

Ví dụ

VÍ DỤ. Xác định khối tâm của bản phẳng có khối lượng riêng là $\rho(x, y) = x^2$ ứng với miền R giới hạn bởi parabol $y = 2 - x^2$ và đường thẳng $y = x$.



GIẢI.

- Theo ví dụ trước, $m = \frac{63}{20}$.
- $M_x = \iint\limits_R y(x^2)dA = -\frac{9}{7}$.
- $M_y = \iint\limits_R x(x^2)dA = -\frac{18}{5}$.

Khối lượng và khối tâm của vật thể trong $\mathbb{R}^3$

- **Khối lượng:** $m = \iiint\limits_R \rho(x,y,z)dV.$
- **Mômen:**

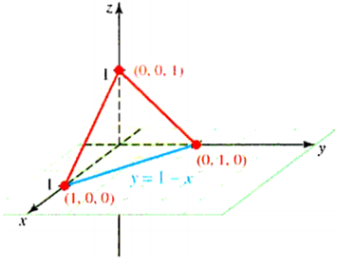
$$M_{yz} = \iiint\limits_R x\rho(x,y,z)dV,$$

$$M_{xz} = \iiint\limits_R y\rho(x,y,z)dV,$$

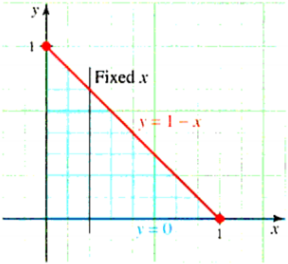
$$M_{xy} = \iiint\limits_R z\rho(x,y,z)dV.$$

- **Trọng tâm:** $(\overline{x},\overline{y},\overline{z}) = \left(\frac{M_{yz}}{x}, \frac{M_{xz}}{y}, \frac{M_{xy}}{z}\right).$

Ví dụ. Một khối tứ diện có các đỉnh $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, và $(0,0,1)$, hằng số khối lượng riêng $\rho = 6$. Tìm trọng tâm của khối tứ diện.



a. A tetrahedron



b. Projection on the xy-plane

Mô men quán tính

Một bản mỏng có khối lượng riêng $\rho(x, y)$ ứng với miền R trong góc phần tư thứ nhất của mặt phẳng có mô men (thứ nhất) đối với một đường thẳng L xác định bởi tích phân

$$M_L = \iint\limits_R s dm,$$

trong đó $dm = \rho(x, y)dA$ và $s = s(x, y)$ là khoảng cách từ điểm đặt $P(x, y)$ trong R đến L. Tương tự, mô men thứ hai, hay mô men quán tính, của R quanh L được định nghĩa là

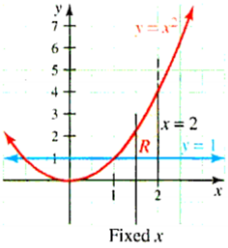
$$I_L = \iint\limits_R s^2 dm.$$

Mô men quán tính

Các mô men quán tính của bản phẳng có khối lượng riêng $\rho(x, y)$ ứng với miền phẳng R, quanh các trục x, y và z, lần lượt là

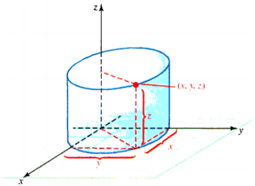
- $I_x = \iint\limits_R y^2 \rho(x, y)dA$
- $I_x = \iint\limits_R x^2 \rho(x, y)dA$
- $I_x = \iint\limits_R (x^2 + y^2)\rho(x, y)dA$

Ví dụ. Một bản phẳng ứng với miền R trong mặt phẳng được giới hạn bởi đường parabol $y = x^2$ và các đường thẳng $x = 2$ và $y = 1$. Khối lượng riêng của bản phẳng tại mỗi điểm (x, y) là $\rho(x, y) = x^2 y$. Tìm các mômen quán tính (làm tròn đến phần trăm) của bản phẳng quanh các trục x và y.



Mômen quán tính của một vật thể quanh trục L tùy ý

Giả sử vật ứng với miền R và khối lượng riêng tại mỗi điểm (x, y, z) trên R được cho bởi $\rho(x, y, z)$. Các mômen quán tính quanh trục x, y và z lần lượt là:



$$I_x = \iiint\limits_R \underbrace{(y^2 + z^2)}_{\text{Square of distance to the x-axis}} \underbrace{\rho(x, y, z)\, dV}_{\text{Increment of mass}},$$

$$I_y = \iiint\limits_R \underbrace{(x^2 + z^2)}_{\text{Square of distance to the y-axis}} \underbrace{\rho(x, y, z)\, dV}_{\text{Increment of mass}},$$

$$I_z = \iiint\limits_R \underbrace{(x^2 + y^2)}_{\text{Square of distance to the z-axis}} \underbrace{\rho(x, y, z)\, dV}_{\text{Increment of mass}}.$$

VÍ DỤ. Xác định I_z của khối tứ diện S với các đỉnh $(0, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 0, 1)$ và khối lượng riêng $\rho(x, y, z) = x$

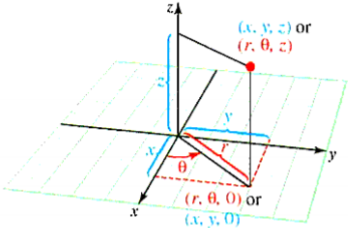
Đổi biến sang hệ tọa độ trụ

Tọa độ trụ sang tọa độ Descates $(r, \theta, z) \to (x, y, z)$:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

Tọa độ Descartes sang tọa độ trụ $(x, y, z) \to (r, \theta, z)$:

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \tan\theta = \frac{y}{x} \\ z = z \end{cases}$$

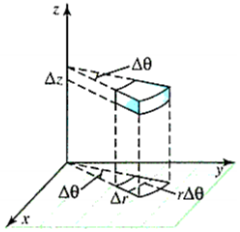


VÍ DỤ. Tìm phương trình trong tọa độ trụ của elliptic paraboloid $z = x^2 + 3y^2$.

Tính tích phân trong tọa độ trụ

Giả sử $f(x,y,z)$ liên tục trên miền lấy tích phân D, với $D = \{(x,y,z) : u(x,y) \le z \le v(x,y), \forall (x,y) \in A\}$.

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dV = \iint_A \left[\int_{u(x,y)}^{v(x,y)} f(x,y,z)dz \right] dA$$



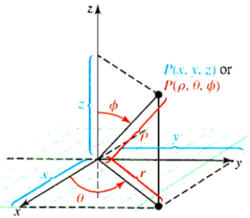
$$= \iint_A \int_{u(x,y)}^{v(x,y)} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\, r dz dr d\theta.$$

$$= \iint_{A_{r\theta}} \int_{u(r\cos\theta, r\sin\theta)}^{v(r\cos\theta, r\sin\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\, r dz dr d\theta.$$

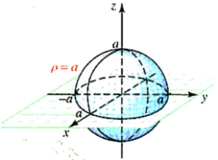
VÍ DỤ. Tính thể tích của vật thể trong góc phần tám thứ nhất giới hạn bởi mặt trụ $x^2 + y^2 = 2y$, mặt nón $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ và mặt phẳng 0xy.

VÍ DỤ. Một khối đồng chất D với khối lượng riêng là hằng số ρ giới hạn dưới bởi mặt phẳng xy, xung quanh bởi mặt trụ $x^2 + y^2 = a^2 \ (a > 0)$, và giới hạn trên bởi mặt paraboloid $z = x^2 + y^2$. Tìm khối tâm của khối.

Tọa độ cầu

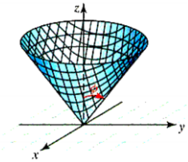


- ρ là khoảng cách từ gốc tọa độ đến P, $\rho \geq 0$.
- θ là góc cực (như trong tọa độ cực), $0 \leq \theta \leq 2\pi$.
- ϕ là góc được đo từ chiều dương của trục z xuống tia từ gốc tọa độ qua P, $0 \leq \phi \leq \pi$.



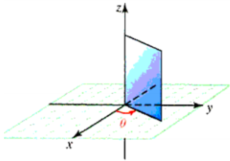
a. Sphere, $\rho = a$

$a > 0$



b. Half-cone, $\phi = a$

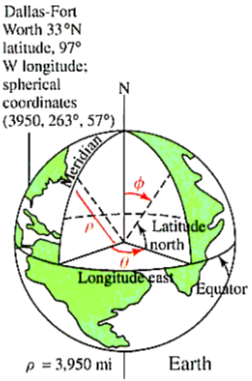
$0 < a < \frac{\pi}{2}$



c. Vertical half-plane, $\theta = a$

$0 \leq \theta < 2\pi$

Ứng dụng tọa độ cầu trong định vị



Xét hệ tọa độ vuông góc với gốc tọa độ là tâm của trái đất, với chiều dương của trục 0z đi qua cực bắc và mặt phẳng 0xz đi qua kinh tuyến gốc. Khi đó một vị trí cụ thể trên bề mặt được ký hiệu là $(\rho,\ \theta,\ \phi)$, trong đó ρ là khoảng cách từ tâm của trái đất, θ là kinh độ, và $\frac{\pi}{2} - \phi$ là vĩ độ (vì vĩ độ là góc tính từ đường xích đạo). Ví dụ, Dallas-Forth Worth có tọa độ $(\rho,\ \theta,\ \phi) = (3,950; 263°; 57°)$.

Tọa độ địa lý của Thành phố Hồ Chí Minh là $10°46'10"$B, $106°40'55"$Đ, nghĩa là ứng với tọa độ cầu là khoảng $(3,950; 10.5°, 106.5°)$.

Đổi biến sang hệ tọa độ cầu

Tọa độ cầu sang tọa độ Descates $(r, \theta, \phi) \rightarrow (x, y, z)$:

$$\begin{cases} x = \rho \sin\phi \cos\theta \\ y = \rho \sin\phi \sin\theta \\ z = \rho \cos\phi \end{cases}$$

Tọa độ cầu sang tọa độ trụ $(\rho, \ \theta, \ \phi)$ sang $(r, \ \theta, \ z)$

$$\begin{cases} r = \rho \sin\phi \\ \theta = \theta \\ z = \rho \cos\phi \end{cases}$$

Tọa độ Descartes sang tọa độ cầu $(x, y, z) \rightarrow (r, \theta, \phi)$:

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \tan\theta = \frac{y}{x} \\ \phi = \cos^{-1}\left(\dfrac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right) \end{cases}$$

Tọa độ trụ sang tọa độ cầu $(r, \ \theta, \ z)$ sang $(\rho, \ \theta, \ \phi)$

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{r^2 + z^2} \\ \theta = \theta \\ \phi = \cos^{-1}\left(\dfrac{z}{\sqrt{r^2 + z^2}}\right) \end{cases}$$

Biểu diễn các mặt cong trong hệ tọa độ cầu

VÍ DỤ. Viết các phương trình sau sang tọa độ cầu:

1. Mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \qquad (a > 0)$
2. Mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 2z \qquad (a > 0)$
3. Mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 4x \qquad (a > 0)$
4. Mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = -3y \qquad (a > 0)$
5. Mặt paraboloid $z = x^2 + y^2$
6. Mặt phẳng $z = 2$
7. Mặt trụ $x^2 + z^2 = 1$
8. Mặt trụ $x^2 + y^2 = 1$

Tích phân bội ba trong hệ tọa độ cầu

Nếu f là liên tục trong miền bị chặn D, thì tích phân bội ba của f trên miền D được xác định bởi

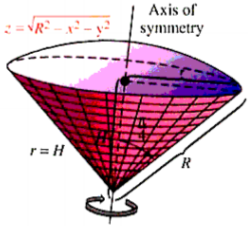
$$\iiint\limits_{D} f(x, y, z)\, dV =$$

$$= \iiint\limits_{\overline{D}} f(\rho \sin\phi \cos\theta, \rho \sin\phi \sin\theta, \rho \cos\phi)\rho^2 \sin\phi \; d\rho \; d\theta \; d\phi,$$

trong đó $\overline{D}$ là miền D được biểu diễn sang tọa độ cầu.

Ví dụ. Trong hình học, hình cầu bán kính R có thể tích là $V = \frac{4}{3}\pi R^3$. Hãy sử dụng tích phân chứng minh công thức này.

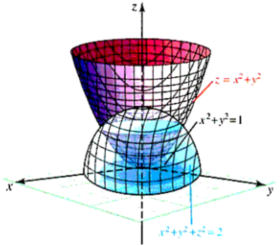
Ví dụ. Một con quay đồ chơi với khối lượng riêng là hằng số ρ_0, được làm từ một phần của nửa hình cầu (khối nón-cầu) như hình vẽ. Biết rằng tâm của chỏm cầu là tại điểm mà con quay này quay, và chiều cao của đáy hình nón bằng với bán kính của nó. Tìm mômen quán tính của con quay quanh trục đối xứng của nó.



Ví dụ. Tính tích phân

$$I = \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{x^2+y^2}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} z dz dy dx$$

sử dụng tọa độ Đề-các hoặc tọa độ trụ hoặc tọa độ cầu.



Đổi biến trong tích phân bội hai

Định lý 12.8

Giả sử f là một hàm liên tục bên trong miền D trong mặt phẳng xy và bị chặn trên miền đó, và giả sử T là hàm 1-1 ngoại trừ các điểm trên biên tương ứng miền D^* trong mặt phẳng uv sang miền D bởi cách đổi biến $x = g(u,v),\ y = h(u,v)$, trong đó g và h là các hàm khả vi liên tục trên D^*. Khi đó

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dydx = \iint\limits_{D*} f\left[g(u,v),h(u,v)\right]|J(u,v)|dudv,$$

trong đó $J(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}$ *với* $J \neq 0$ *và không phụ thuộc vào miền* D^*. *Phần tử* $J(u,v)$*được gọi là* **Jacobian** *và còn được ký hiệu là* $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$.

Phép đổi biến tổng quát:

$$T : D^* \subset Ouv \to D \subset Oxy$$

$$(u, v) \mapsto (g(u, v), h(u, v))$$

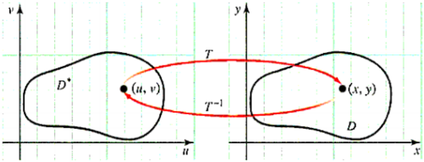


Figure 12.72 A one-to-one transformation T and its inverse T^{-1}

Đổi biến sang hệ tọa độ cực:

$x = r\cos\theta$

$y = r\sin\theta.$

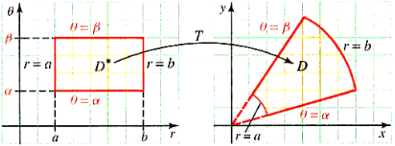


Figure 12.73 Transformation of a region D^* by $T: x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$

Các ví dụ

VÍ DỤ. Nếu $u = xy$ và $v = x^2 - y^2$, hãy biểu diễn Jacobian $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$ theo u và v.

VÍ DỤ. Tính tích phân $\iint\limits_D \left(\frac{x-y}{x+y}\right)^4 dydx$, với D là hình tam giác giới hạn bởi đường thẳng $x + y = 1$ và các trục tọa độ.

GIẢI.

- Đổi biến $u = x - y, \quad v = x + y$.
- $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = 2$
- Do $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} \cdot \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = 1$ nên $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{1}{2}$.
- $\iint\limits_D \left(\frac{x-y}{x+y}\right)^4 dydx = \iint\limits_{D^*} \left(\frac{u}{v}\right)^4 |1/2| dudv =$
  $1/2 \int_0^1 \int_{-v}^{v} u^4 v^{-4} dudv = 1/10.$

VÍ DỤ. Tìm diện tích của miền E giới hạn bởi elip $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

VÍ DỤ. Tìm trọng tâm (làm tròn đến hàng phần chục) của miền D^* trong mặt phẳng xy giới hạn bởi các đường thẳng $y = \frac{1}{4}x$ và $y = \frac{5}{2}x$ và các đường thẳng $xy = 1$ và $xy = 5$.

Đổi biến trong tích phân bội ba

$$T: \quad x = x(u,v,w) \quad y = y(u,v,w), \quad z = z(u,v,w).$$

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

$$\iiint\limits_{R} f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint\limits_{R*} f\left[x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)\right] \left| \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} \right|$$