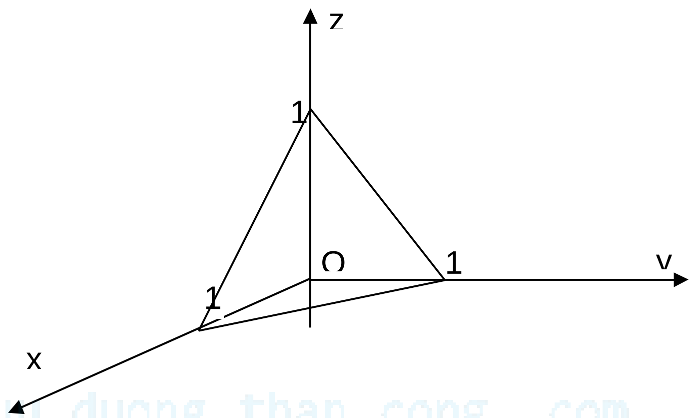
Chương 1
TÍCH PHÂN BỘI

1.1. Các mặt bậc hai chính tắc

Cho hàm 2 biến $z = f(x,y)$. Đồ thị của nó chính là một mặt cong trong không gian R^3 xác định bởi $G(f) = \{(x, y, f(x,y)) \in R^3 / (x,y) \in D_f\}$

Ví dụ 1.1 Đồ thị hàm $z = 1 - x - y$ là mặt phẳng qua 3 điểm $(1,0,0); (0,1,0); (0,0,1)$

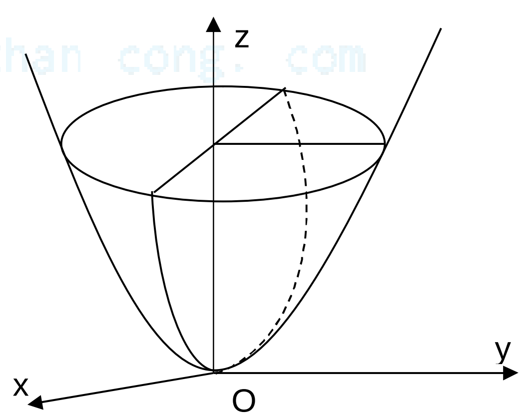


Ví dụ 1.2 Khảo sát đồ thị hàm $z = x^2 + y^2$

Nhận xét :

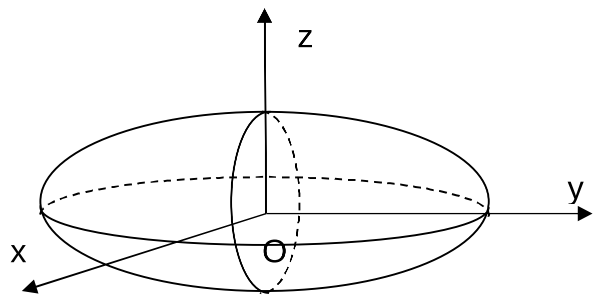
- $(x,y) \in R^2, z \geq 0$
- Đồ thị đối xứng qua 2 mặt $x = 0; y = 0$ và cắt 2 mặt này theo các parabol $z = y^2; z = x^2$
- Đồ thị cắt mặt phẳng $z = h \geq 0$ theo các đường tròn $x^2 + y^2 = h$

Như vậy khi h thay đổi từ 0 đến $+\infty$, các đường tròn trên vẽ nên đồ thị, được gọi là mặt paraboloit eliptic

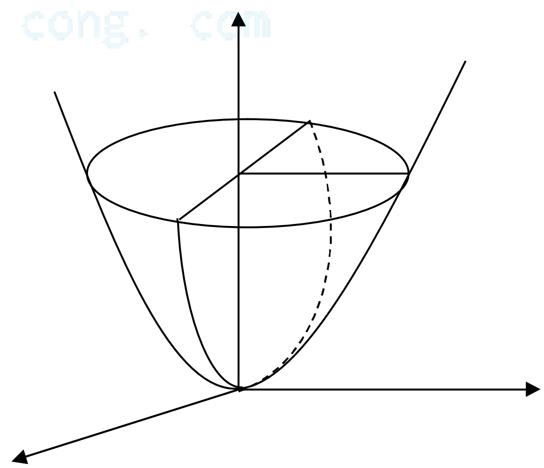


Ngoài ra chúng ta còn khảo sát một số mặt bậc hai có phương trình tổng quát là $Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Eyz + 2Fxz + Gx + Hy + Iz + K = 0$ trong đó có ít nhất một hệ số bậc hai khác không.

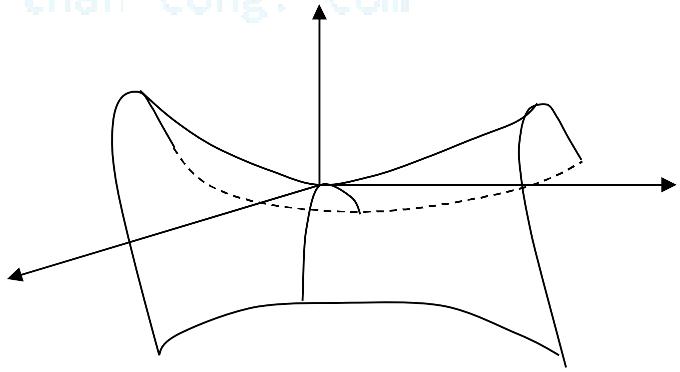
- Các trường hợp suy biến
  1. $x^2 + 1 = 0$: tập trống
  2. $x^2 + y^2 + z^2 = 0$: một điểm gốc toạ độ (0,0,0)
  3. $x = 0; y = 0; z = 0$: các mặt Oyz; Oxz; Oxy
  4. $x^2 + y^2 = 0$: đường thẳng là giao 2 mặt $x = 0; y = 0$
- Các mặt bậc hai chính tắc
  1. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$: elipxoit



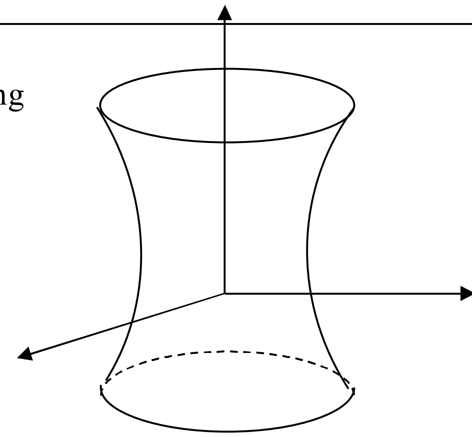
  2. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z$: paraboloit eliptic



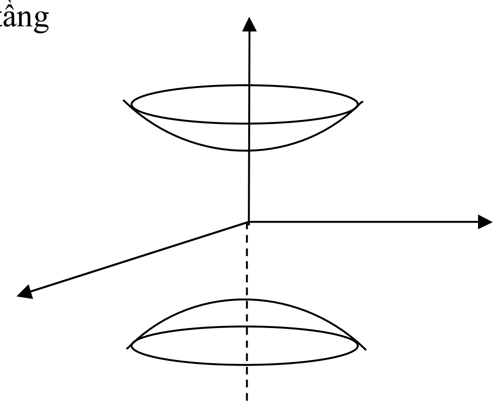
  3. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z$: paraboloit hyperbolic (mặt yên ngựa)



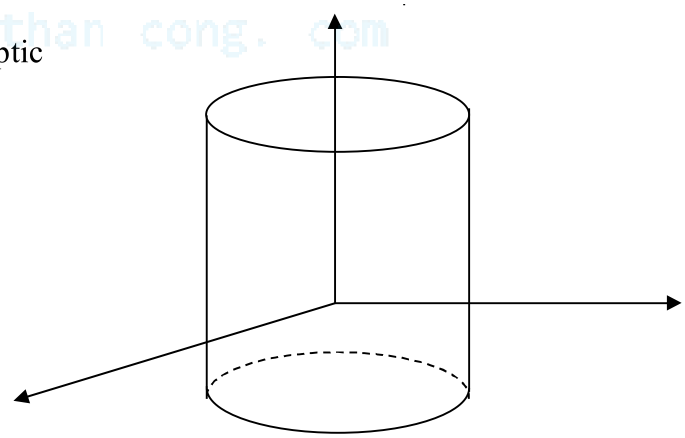
4. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$: hyperboloit một tầng



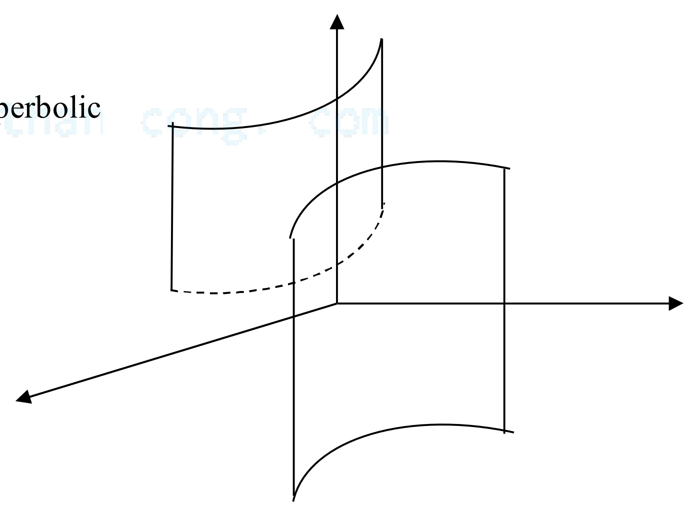
5. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=-1$: hyperboloit hai tầng



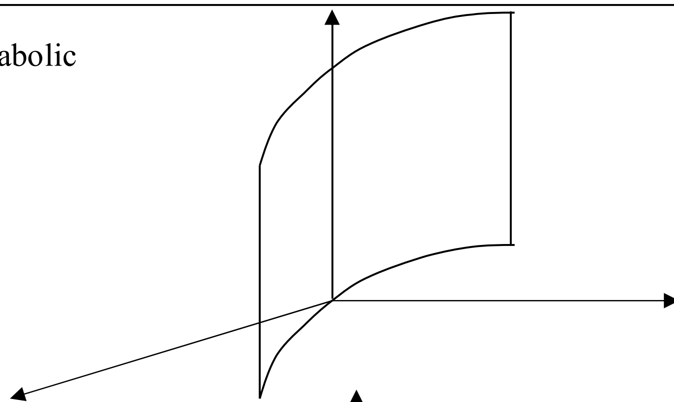
6. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$: mặt trụ eliptic



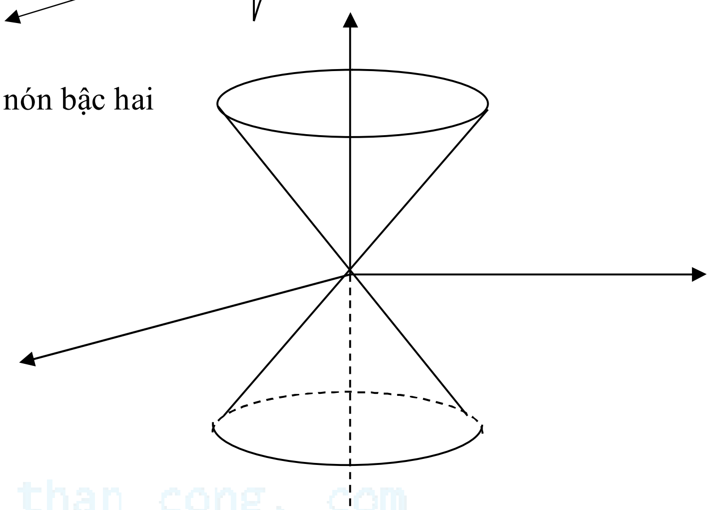
7. $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$: mặt trụ hyperbolic



8. $y^2 = 2px$: mặt trụ parabolic

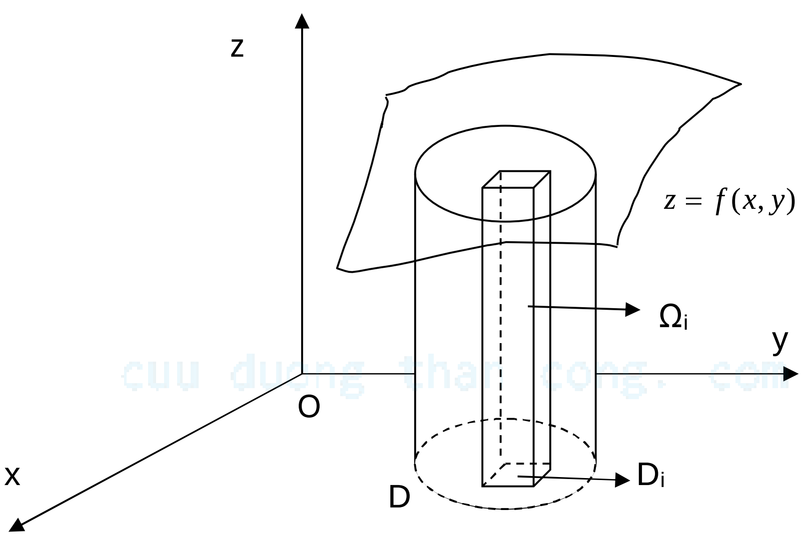


9. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0$: mặt nón bậc hai



1.2. Tích phân bội 2 (Tích phân kép)

1.2.1. Bài toán mở đầu: thể tích hình trụ cong



Xét hình trụ cong giới hạn trên bởi mặt cong $z = f(x,y) \geq 0$, giới hạn dưới bởi miền phẳng D trong mặt phẳng Oxy và giới hạn xung quanh bởi mặt trụ có đường sinh song song với trục Oz có đường chuẩn là biên của D ***(hình vẽ trên)***. Vấn đề đặt ra là hãy tính thể tích V của hình trụ cong trên?

Chia miền D thành n mảnh $D_1, D_2, ...D_n$ không dẫm lên nhau với diện tích tương ứng là $\Delta S_1, \Delta S_2, ...\Delta S_n$.

Lấy điểm $M_i(x_i, y_i)$ bất kỳ thuộc D_i, coi thể tích của hình trụ cong Ω_i gần bằng thể tích hình trụ thẳng có đáy D_i, chiều cao $f(x_i, y_i)$. Khi đó

$$V_n \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta S_i$$

Khi $n \to \infty$ sao cho $\max d(D_i) \to 0$ thì $\lim\limits_{n\to\infty} V_n = V$ là thể tích hình trụ cong cần tìm.

1.2.2. Định nghĩa

Cho hàm $f(x, y)$ xác định trên miền D đóng và bị chặn của mặt phẳng Oxy. Chia D một cách tuỳ ý thành n mảnh $D_1, D_2, ...D_n$ không dẫm lên nhau có diện tích tương ứng là $\Delta S_1, \Delta S_2, ...\Delta S_n$

Gọi $d(D_i)$ là khoảng cách lớn nhất giữa 2 điểm bất kỳ thuộc D_i và $M_i(x_i, y_i)$ là một điểm bất kỳ thuộc D_i

Lập tổng $I_n \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta S_i$ gọi là tổng tích phân của hàm $f(x, y)$ ứng với phân hoạch $\{D_1, D_2, ...D_n\}$

Nếu khi $n \to \infty$ sao cho $\max d(D_i) \to 0$ mà $I_n \to I$ hữu hạn không phụ thuộc cách chia miền D cũng như cách lấy điểm $M_i(x_i, y_i)$ thì I gọi là tích phân kép của hàm $f(x, y)$ lấy trên miền D. Ta viết $\iint\limits_D f(x, y)dS = \lim\limits_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta S_i$

Nhận xét:

- Vì giá trị của tích phân kép không phụ thuộc cách chia miền D nên ta có thể chia miền D theo những đường thẳng song song với 2 trục toạ độ. Khi đó $\Delta S_i = dx_i.dy_i$ hay $dS = dx.dy$ $\Rightarrow$ Tích phân kép của hàm $f(x, y)$ lấy trên miền D sẽ được viết dưới dạng $\iint\limits_D f(x, y)dxdy$

- Ký hiệu biến tích phân không ảnh hưởng đến giá trị của tích phân, nghĩa là $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_D f(u,v)dudv$
- Nếu $f(x,y)$ liên tục trên miền đóng , bị chặn D có biên trơn từng khúc thì $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ tồn tại và ta nói $f(x,y)$ khả tích trên D.
- Giá trị của tích phân $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ chính là thể tích hình trụ cong giới hạn bởi mặt trên là mặt cong $z = f(x,y) \geq 0$, mặt dưới là miền phẳng D trong mặt Oxy và xung quanh là mặt trụ có đường sinh song song Oz, đường chuẩn là biên của D.
- Nếu $f(x,y) = 1$ thì $\iint\limits_D dxdy$ chính là **diện tích miền D.**

1.2.3. Tính chất

1. $\iint\limits_D [f(x,y) \pm g(x,y)]dxdy = \iint\limits_D f(x,y)dxdy \pm \iint\limits_D g(x,y)dxdy$
2. $\iint\limits_D kf(x,y)dxdy = k\iint\limits_D f(x,y)dxdy$
3. Nếu $f(x,y) \geq 0, \forall (x,y) \in D$ thì $\iint\limits_D f(x,y)dxdy \geq 0$
4. Nếu $f(x,y) \geq g(x,y), \forall (x,y) \in D$ thì $\iint\limits_D f(x,y)dxdy \geq \iint\limits_D g(x,y)dxdy$
5. $\left|\iint\limits_D f(x,y)dxdy\right| \leq \iint\limits_D |f(x,y)|dxdy$
6. Nếu $D = D_1 \cup D_2$ thì $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x,y)dxdy$
7. Nếu $f(x,y)$ liên tục trong miền đóng, bị chặn và liên thông D thì tồn tại điểm $(x_0, y_0) \in D$ sao cho $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = f(x_0, y_0)S(D)$ (định lý giá trị trung bình).
8. Nếu $m \leq f(x,y) \leq M$ thì $mS(D) \leq \iint\limits_D f(x,y)dxdy \leq MS(D)$
9. Nếu hàm $f(x,y)$ lẻ theo biến x (hoặc y) và miền D đối xứng qua trục Oy (hoặc Ox) thì $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = 0$.

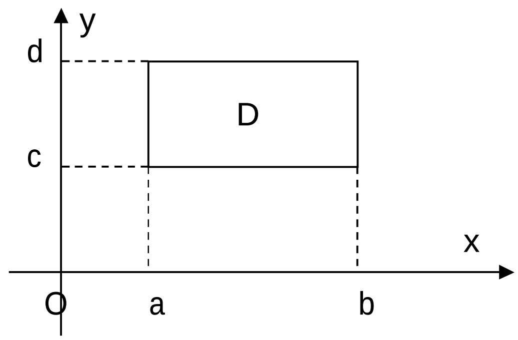
10. Nếu hàm $f(x,y)$ chẵn theo biến x (hoặc y) và miền D chia thành 2 miền không dẫm lên nhau , đối xứng nhau qua trục Oy (hoặc Ox) thì $\iint_D f(x,y)dxdy = 2\iint_{D_1} f(x,y)dxdy = 2\iint_{D_2} f(x,y)dxdy$.

1.2.4. Cách tính tích phân kép trong hệ toạ độ Decards

❖ **D là miền đơn giản**

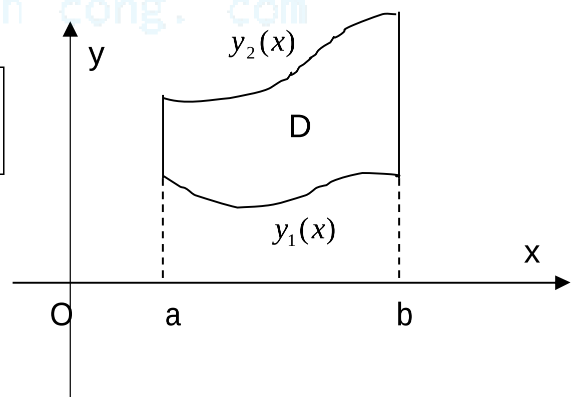
- TH1: $D = \{(x,y) \in R^2 : a \le x \le b; \quad c \le y \le d\}$

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy$$



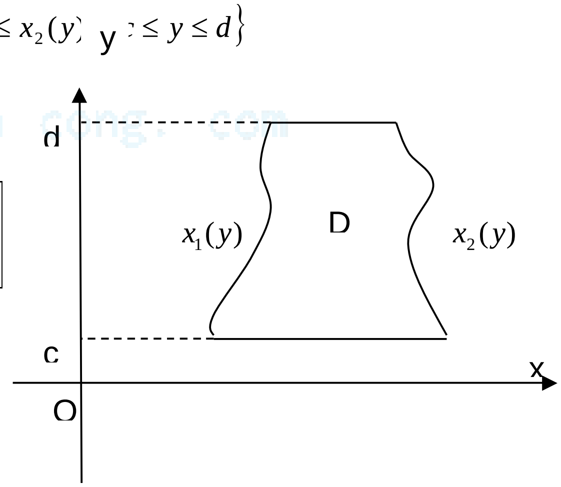
- TH2: $D = \{(x,y) \in R^2 : a \le x \le b; \quad y_1(x) \le y \le y_2(x)\}$

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy \right) dx$$



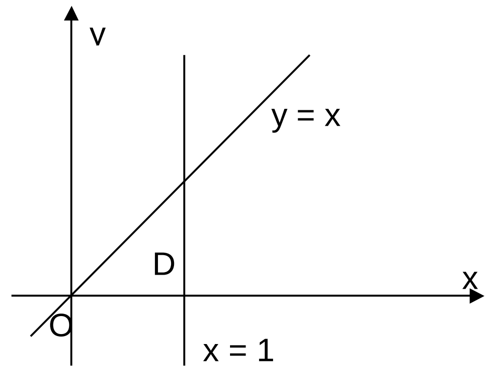
- TH3: $D = \{(x,y) \in R^2 : x_1(y) \le x \le x_2(y); \quad c \le y \le d\}$

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_c^d \left(\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx \right) dy$$



❖ **D là miền không đơn giản :** Ta tìm cách chia D thành các miền đơn giản $D_1, D_2, ..., D_n$ rời nhau và ta có $\boxed{\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \sum_{i=1}^{n}\iint\limits_{D_i} f(x,y)dxdy}$

Ví dụ 1.3: Tính $I = \iint\limits_D x^2 ydxdy$ với D là miền tam giác giới hạn bởi các đường $y = 0;\quad y = x;\quad x = 1$

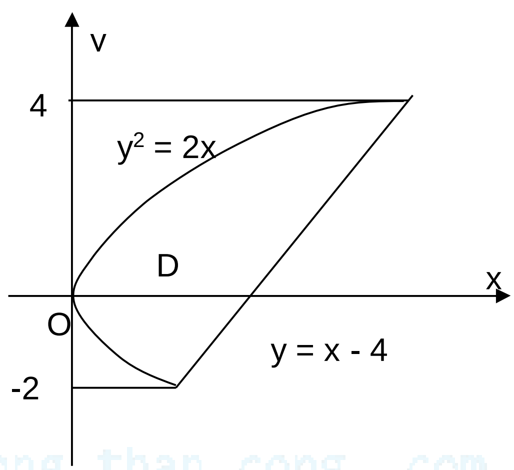


Giải

Ta thấy D là miền đơn giản $\begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le x \end{cases}$

Suy ra $I = \iint\limits_D x^2 ydxdy = \int_0^1 dx \int_0^x x^2 ydy = \int_0^1 \frac{x^4}{2}dx = \frac{1}{10}$

Ví dụ 1.4: Tính $I = \iint\limits_D xydxdy$ với D là miền giới hạn bởi các đường $y = x - 4;\quad y^2 = 2x$



Giải

Giao điểm của các đường được xác định $y + 4 = \frac{y^2}{2} \Rightarrow y = -2 \vee y = 4$

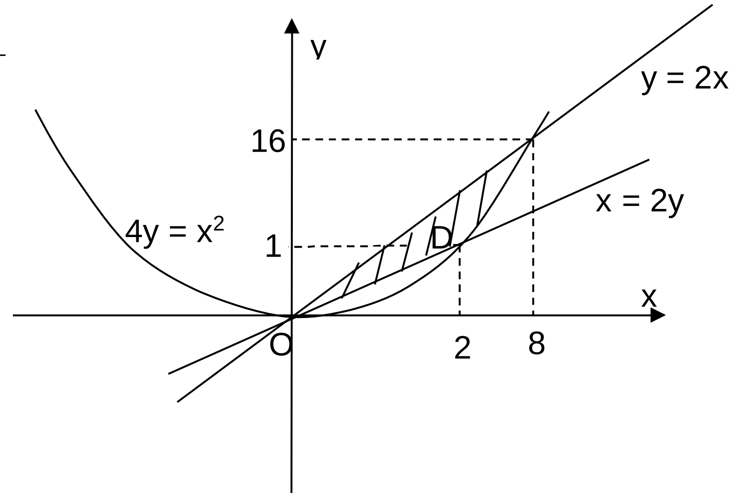
Ta thấy D là miền đơn giản $\begin{cases} \frac{y^2}{2} \le x \le y + 4 \\ -2 \le y \le 4 \end{cases}$

Suy ra $I = \iint\limits_D xydxdy = \int_{-2}^{4} dy \int_{y^2/2}^{y+4} xydx = \frac{1}{2}\int_{-2}^{4}\left(-\frac{y^5}{4} + y^3 + 8y^2 + 16y\right)dy = 90$

Ví dụ 1.5: Tính $I = \iint_D \sin y dxdy$ với D là miền giới hạn bởi các đường

$y = 2x; \quad x = 2y; \quad y = \frac{x^2}{4}$

Giải



Ta thấy D là miền không đơn giản nên nếu ta đặt $D_1: \begin{cases} 0 \le x \le 8 \\ \frac{x^2}{4} \le y \le 2x \end{cases}$ và

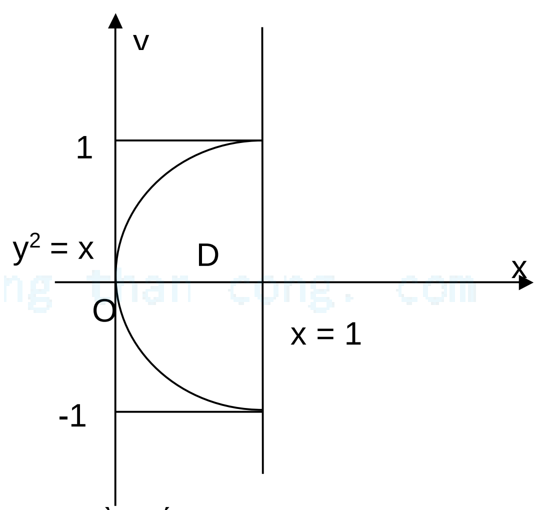
$D_2: \begin{cases} 0 \le x \le 2 \\ \frac{x^2}{4} \le y \le \frac{x}{2} \end{cases}$ thì $D = D_1 - D_2$. Do đó $I = \iint_D ydxdy = \iint_{D_1} ydxdy - \iint_{D_2} ydxdy$

$$= \int_0^8 dx \int_{x^2/4}^{2x} ydy - \int_0^2 dx \int_{x^2/4}^{x/2} ydy = \frac{1}{2}\left[\int_0^8 \left(4x^2 - \frac{x^4}{16}\right)dx - \int_0^2 \left(\frac{x^2}{4} - \frac{x^4}{16}\right)dx\right] = 0$$

Ví dụ 1.6. Tính $I = \iint_D (x^4 \sin y + 2x)dxdy$ với D là miền giới hạn bởi các đường

$y^2 = x; \quad x = 1$

Giải



Nhận thấy miền D chia thành 2 miền đối xứng nhau qua trục Ox và hàm $x^4 \sin y$ lẻ theo y nên $\iint_D x^4 \sin y dxdy = 0$

Do đó $I = \iint\limits_D (x^4 \sin y + 2x)dxdy = \int\limits_{-1}^{1} dy \int\limits_{y^2}^{1} 2xdx = \int\limits_{-1}^{1} (1-y^4)dy = \frac{8}{5}$

1.2.5. Phương pháp đổi biến trong tích phân kép

❖ **Công thức đổi biến tổng quát**

Xét 2 miền D_{xy} và D_{uv} trong mặt phẳng R². Giả sử tồn tại song ánh giữa 2 miền với hệ hàm khả vi liên tục $\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$.

Nếu định thức Jacobi $J = \frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0, \forall (u,v) \in D_{uv}$ thì với mọi hàm liên tục $f : D_{xy} \to R$ ta có công thức đổi biến sau:

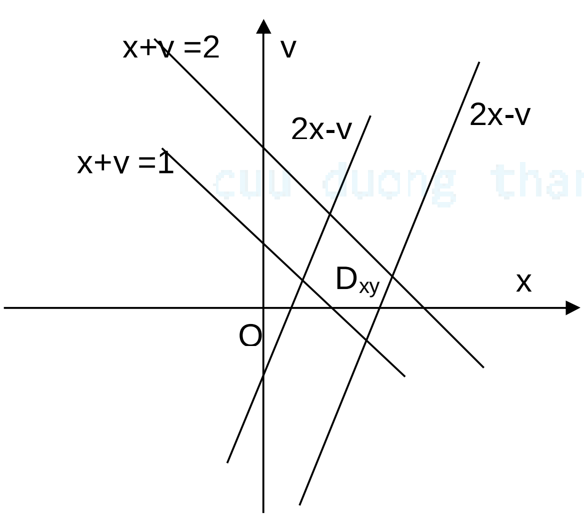
$$\boxed{\iint\limits_{D_{xy}} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D_{uv}} f\left(x(u,v), y(u,v)\right) \left| J \right| dudv}.$$

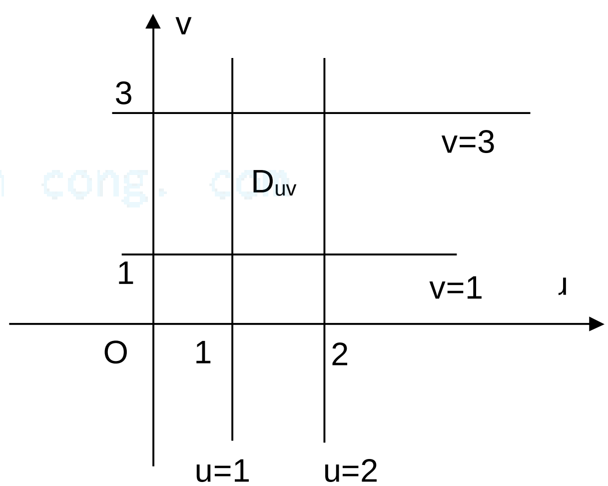
Chú ý: $\frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \frac{1}{\frac{D(u,v)}{D(x,y)}}$

Ví dụ 1.7. Tính $I = \iint\limits_D (2x-y)dxdy$ với D là miền giới hạn bởi các đường

$$\begin{cases} x+y=1; \quad x+y=2 \\ 2x-y=1; \quad 2x-y=3 \end{cases}$$

<u>Giải</u>





Đặt $\begin{cases} u = x+y \\ v = 2x-y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{3}(u+v) \\ y = \dfrac{1}{3}(2u-v) \end{cases} \Rightarrow J = \dfrac{D(x,y)}{D(u,v)} = -\dfrac{1}{3}$

Suy ra $I = \iint\limits_D (2x-y)dxdy = \int\limits_1^2 du \int\limits_1^3 \dfrac{1}{3} v dv = \dfrac{4}{3}$

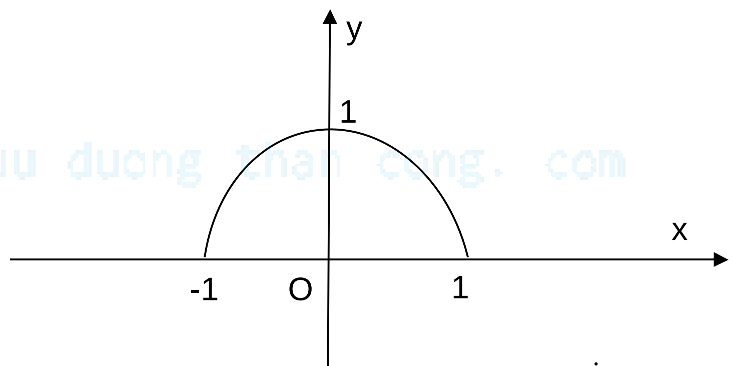
❖ **Công thức đổi biến trong tọa độ cực**

Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$, ta có $J = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r$. Vậy công thức đổi biến là

$$\boxed{\iint\limits_{D_{xy}} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D_{r\varphi}} f\left(r\cos\varphi, r\sin\varphi\right) r\, drd\varphi}$$

Ví dụ 1.8. Tính $I = \iint\limits_D \dfrac{\sin x + 1}{x^2+y^2+1}dxdy;\quad D: \begin{cases} x^2+y^2 \le 1 \\ y \ge 0 \end{cases}$

<u>Giải</u>



Nhận thấy miền D đối xứng qua trục Oy và hàm $\dfrac{\sin x}{x^2+y^2+1}$ lẻ theo x nên

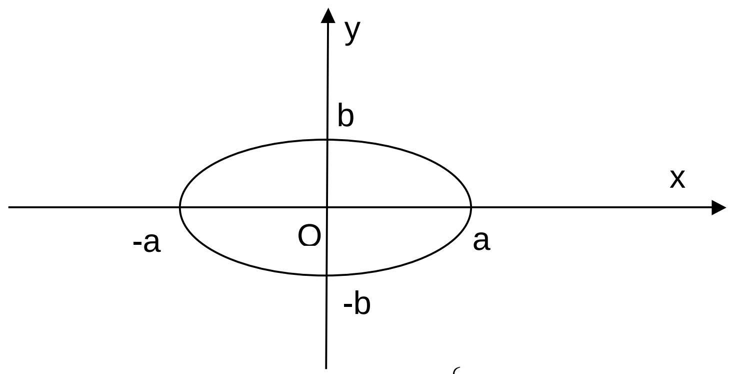
$\iint\limits_D \dfrac{\sin x}{x^2+y^2+1}dxdy = 0$. Vậy $I = \iint\limits_D \dfrac{dx}{x^2+y^2+1}$

Chuyển sang tọa độ cực $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$, $J = r$ ta có $D: \begin{cases} x^2+y^2 \le 1 \\ y \ge 0 \end{cases} \to D': \begin{cases} 0 \le r \le 1 \\ 0 \le \varphi \le \pi \end{cases}$

Suy ra $I = \iint\limits_D \dfrac{dx}{x^2+y^2+1} = \int\limits_0^\pi d\varphi \int\limits_0^1 \dfrac{r}{r^2+1}dr = \dfrac{\pi}{2}\ln 2.$

Ví dụ 1.9. Tính $I = \iint\limits_D \sqrt{1 - \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}}dxdy$ với $D: \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \le 1$

<u>Giải</u>



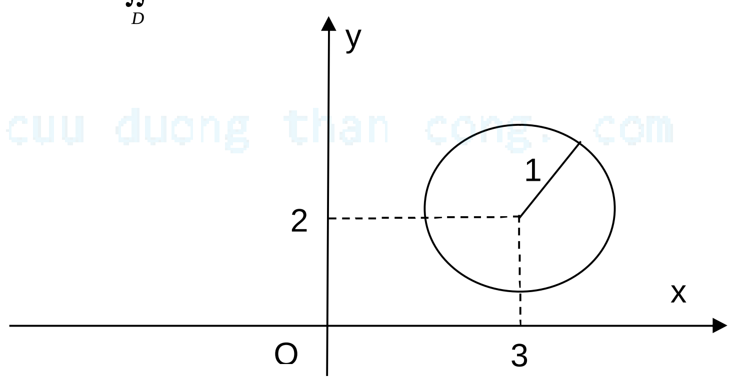
Chuyển sang tọa độ cực $\begin{cases} x = ar\cos\varphi \\ y = br\sin\varphi \end{cases}$, $J = abr$, ta có

$$D: \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} \le 1 \to D': \begin{cases} 0 \le r \le 1 \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{cases}$$

Suy ra $I = \iint\limits_D \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\, dxdy = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 abr\sqrt{1-r^2}\, dr = \frac{2}{3}\pi ab$

Ví dụ 1.10. Tính $I = \iint\limits_D x dxdy$ với $D: (x-3)^2 + (y-2)^2 \le 1$

<u>Giải</u>



Đặt $\begin{cases} x = 3 + r\cos\varphi \\ y = 2 + r\sin\varphi \end{cases}$, $J = r$ ta có $D: (x-3)^2 + (y-2)^2 \le 1 \to D': \begin{cases} 0 \le r \le 1 \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{cases}$

Suy ra $I = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 r(3 + r\cos\varphi)\, dr = 3\pi$

1.2.6. Ứng dụng của tích phân kép

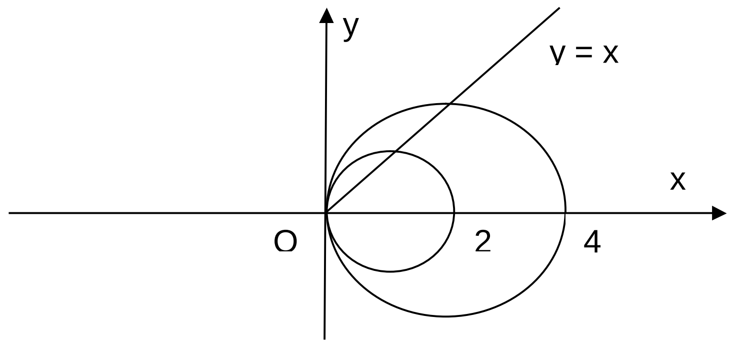
❖ **Tính diện tích hình phẳng**

Từ định nghĩa của tích phân kép ta có ngay công thức tính diện tích miền phẳng D như sau $\boxed{S(D) = \iint\limits_D dxdy}$

Ví dụ 1.11. Tính diện tích miền phẳng giới hạn bởi các đường

$(x-1)^2 + y^2 = 1$; $(x-2)^2 + y^2 = 4$; $y = x$; $y = 0$

Giải



Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$, $J = r$ ta có $D \to D': \begin{cases} 2\cos\varphi \le r \le 4\cos\varphi \\ 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$

Suy ra diện tích miền D là:

$$S(D) = \iint_D dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_{2\cos\varphi}^{4\cos\varphi} rdr = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 3(1+\cos 2\varphi)d\varphi = 3\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right)$$

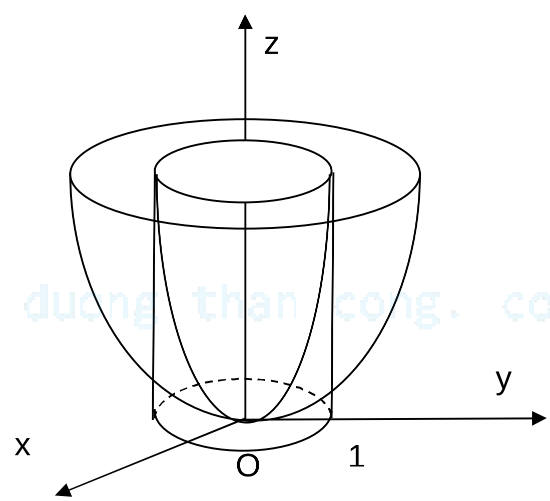
- **Tính diện tích mặt cong**

Giả sử S là mặt cong có phương trình $z = f(x, y)$ và hình chiếu xuống mặt phẳng Oxy là miền phẳng D. Khi đó diện tích mặt cong S được tính theo công thức

$$\boxed{S = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\, dxdy}$$

Ví dụ 1.12. Tính diện tích phần mặt paraboloit $z = x^2 + y^2$ nằm trong mặt trụ $x^2 + y^2 = 1$

Giải



Gọi S là phần mặt cong cần tính diện tích.

Hình chiếu của S xuống mặt phẳng Oxy là miền $D: x^2 + y^2 \le 1$

Phương trình mặt cong S là $z = x^2 + y^2 \Rightarrow 1 + z_x'^2 + z_y'^2 = 1 + 4\left(x^2 + y^2\right)$

Vậy diện tích mặt cong S là

$$s = \iint\limits_{x^2+y^2\le 1} \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}\,dxdy = \iint\limits_{x^2+y^2\le 1} \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)}\,dxdy$$

Chuyển sang tọa độ cực $D \to D' : \begin{cases} 0 \le r \le 1 \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{cases}$

$$\Rightarrow s = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r\sqrt{1 + 4r^2}\,dr = \frac{\pi}{6}\left(5\sqrt{5} - 1\right)$$

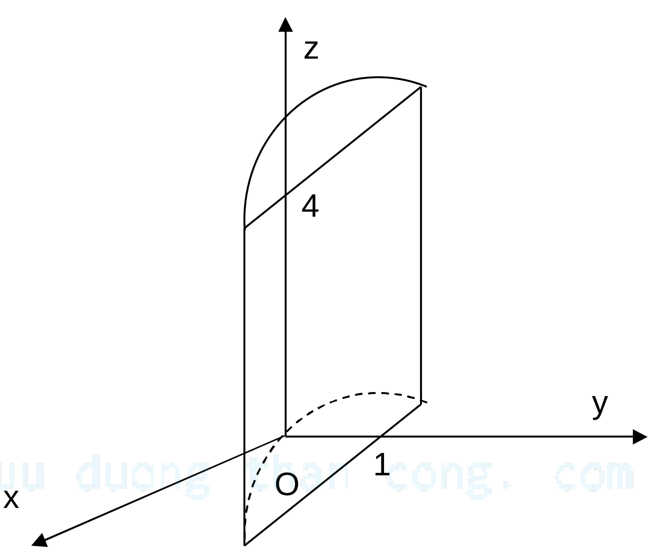
❖ **Tính thể tích hình trụ cong**

Xét hình trụ cong có mặt dưới là miền phẳng D thuộc mặt phẳng Oxy, mặt trên là mặt cong $z = f(x, y)$, xung quanh là mặt trụ có đường sinh song song với trục Oz, đường chuẩn là biên của miền D. Khi đó thể tích hình trụ cong được tính theo công thức sau:

$$\boxed{V = \iint\limits_D f(x, y)\,dxdy}$$

Ví dụ 1.13. Tính thể tích vật thể giới hạn bởi các mặt $z = 0;\quad z = 4;\quad y = x^2;\quad y = 1$

Giải



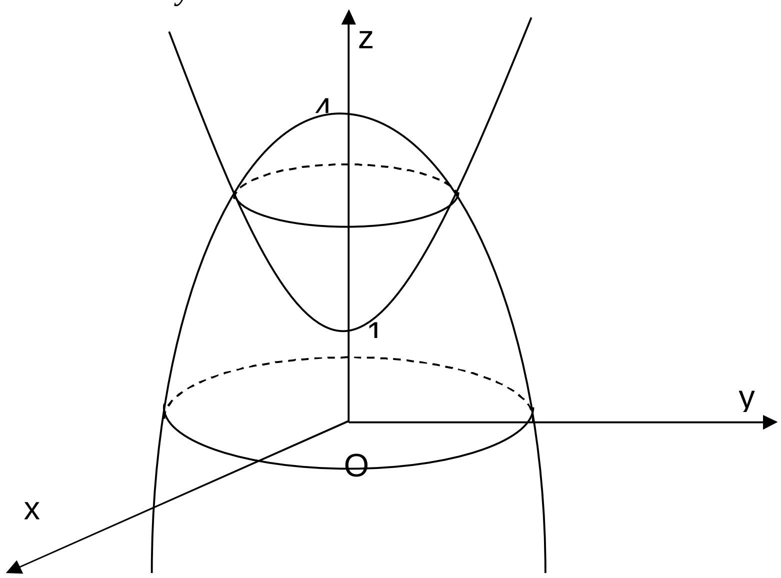
Hình chiếu của vật thể xuống mặt phẳng Oxy là miền $D : \begin{cases} -1 \le x \le 1 \\ x^2 \le y \le 1 \end{cases}$

Thể tích của vật thể $V = \iint\limits_D 4\,dxdy = \int_{-1}^{1} dx \int_{x^2}^{1} 4\,dy = \dfrac{16}{3}$

Ví dụ 1.14. Tính thể tích vật thể giới hạn bởi các mặt

$z = 4 - x^2 - y^2; \quad 2z = 2 + x^2 + y^2$

<u>Giải</u>



Hình chiếu của vật thể xuống mặt phẳng Oxy là hình chiếu của giao tuyến 2 mặt, tức là $4 - x^2 - y^2 = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} \Rightarrow x^2 + y^2 = 2$

Thể tích vật thể

$$V = \iint\limits_{x^2+y^2\le 2} \left[4 - x^2 - y^2 - \left(1 + \frac{x^2+y^2}{2} \right) \right] dxdy$$

$$= \frac{3}{2} \iint\limits_{x^2+y^2\le 2} \left(2 - x^2 - y^2 \right) dxdy = \frac{3}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} r\left(2 - r\right) dr = 3\pi$$

1.3. Tích phân bội 3

1.3.1. Định nghĩa

Cho hàm $f(x, y, z)$ xác định trong miền đóng, bị chặn V của không gian Oxyz. Chia miền V thành n miền nhỏ $V_1, V_2, ..., V_n$ không giao nhau có thể tích tương ứng là $\Delta V_1, \Delta V_2, ..., \Delta V_n$.

Lấy điểm $M_i(x_i, y_i, z_i)$ tùy ý thuộc miền V_i và lập tổng tích phân

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i) \Delta V_i$$

Nếu khi $n \to \infty$ sao cho $\max d(V_i) \to 0$ (đường kính miền V_i) mà $S_n \to S$ hữu hạn không phụ thuộc cách chia miền V cũng như cách chọn $M_i(x_i, y_i, z_i)$ thì S được gọi là tích phân bội 3 của hàm $f(x,y,z)$ trên miền V. Kí hiệu $\iiint\limits_V f(x,y,z)dV$

Ta có thể chia miền V theo các mặt phẳng song song với các mặt phẳng tọa độ và do đó $\Delta V = \Delta x.\Delta y.\Delta z = dxdydz$. Từ đó ta có $\iiint\limits_V f(x,y,z)dV = \iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz$

1.3.2. Tính chất

1. $\iiint\limits_V k.f(x,y,z)dxdydz = k.\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz$
2. $\iiint\limits_V \left[f(x,y,z) \pm g(x,y,z) \right] dxdydz = \iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz \pm \iiint\limits_V g(x,y,z)dxdydz$
3. Nếu hàm $f(x,y,z) \geq 0, \forall (x,y,z) \in V$ thì $\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz \geq 0$
4. Nếu $m \leq f(x,y,z) \leq M, \forall (x,y,z) \in V$ thì

$$m.\Delta(V) \leq \iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz \leq M.\Delta(V)$$

5. Nếu $f(x,y,z) \geq g(x,y,z), \forall (x,y,z) \in V$ thì

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz \geq \iiint\limits_V g(x,y,z)dxdydz$$

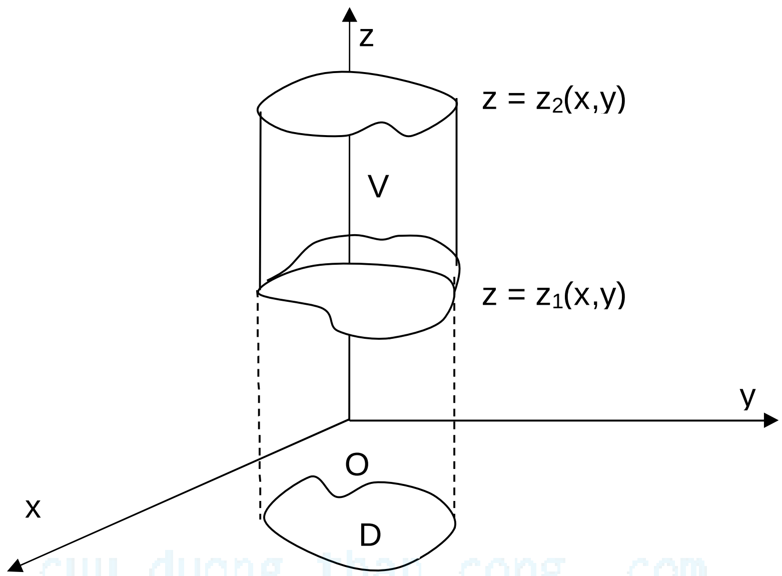
6. $\left| \iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz \right| \leq \iiint\limits_V \left| f(x,y,z) \right| dxdydz$
7. Nếu miền V chia thành 2 miền V_1, V_2 không dẫm lên nhau thì

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{V_1} f(x,y,z)dxdydz + \iiint\limits_{V_2} f(x,y,z)dxdydz$$

8. Nếu hàm $f(x,y,z)$ liên tục trên miền V đóng, bị chặn và liên thông thì tồn tại $(x_0, y_0, z_0) \in V$ sao cho $\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = f(x_0, y_0, z_0).\Delta(V)$ (định lý giá trị trung bình).
9. Nếu hàm $f(x,y,z)$ lẻ theo biến x (biến y, biến z) và miền V đối xứng nhau qua mặt Oyz (Oxz, Oxy) thì $\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = 0$

10. Nếu hàm $f(x,y,z)$ chẵn theo biến x (biến y, biến z) và miền V được chia thành 2 miền V_1, V_2 không dẫm lên nhau , đối xứng nhau qua mặt Oyz (Oxz, Oxy) thì $\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = 2\iiint\limits_{V_1} f(x,y,z)dxdydz = 2\iiint\limits_{V_2} f(x,y,z)dxdydz$

1.3.3. Cách tính tích phân bội 3 trong toạ độ Decards



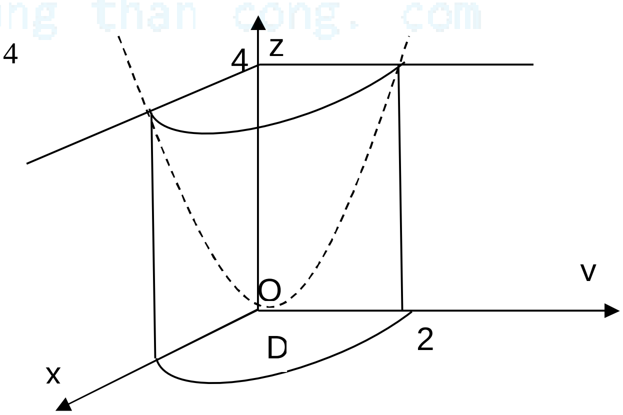
Xét tích phân bội 3: $I = \iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz$ với V là miền được giới hạn dưới bởi mặt cong $z = z_1(x,y)$, giới hạn trên bởi mặt cong $z = z_2(x,y)$ và giới hạn xung quanh bởi mặt trụ có đường sinh song song với trục Oz, đường chuẩn là biên của miền D (là hình chiếu của V xuống mặt phẳng Oxy). Khi đó

$$\boxed{\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \iint\limits_D dxdy\left(\int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz\right)}$$

Ví dụ 1.15. Tính $I = \iiint\limits_V 2xdxdydz$ với V là miền được xác định như sau

$x \geq 0;\quad y \geq 0;\quad x^2 + y^2 \leq z \leq 4$

<u>Giải</u>



Hình chiếu của V xuống mặt phẳng Oxy là $D:\begin{cases} x^2+y^2\le 4 \\ x\ge 0,\ y\ge 0 \end{cases}$

Suy ra $I=\iiint\limits_V 2x dxdydz=\iint\limits_D dxdy\left(\int\limits_{x^2+y^2}^{4} 2x dz\right)=2\iint\limits_D x(4-x^2-y^2)dxdy$

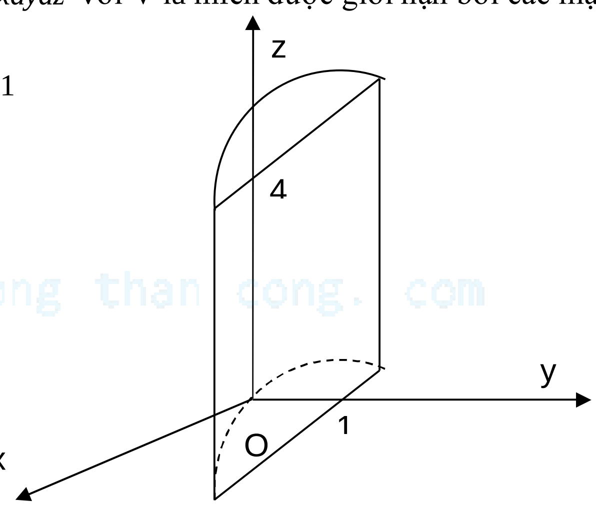
Chuyển sang tọa độ cực $D\to D':\begin{cases} 0\le r\le 2 \\ 0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{2} \end{cases},\quad J=r$

Ta có $I=2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi d\varphi\int\limits_0^2 r^2(4-r^2)dr=\dfrac{128}{15}$

Ví dụ 1.16. Tính $I=\iiint\limits_V z dxdydz$ với V là miền được giới hạn bởi các mặt

$z=0;\quad z=4;\quad y=x^2;\quad y=1$

Giải



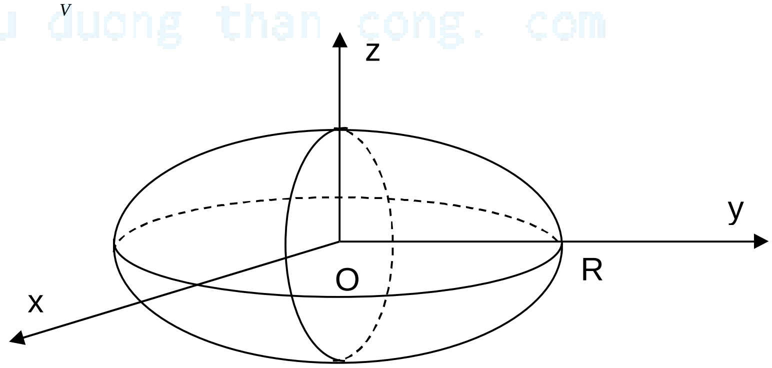
Hình chiếu của V xuống mặt phẳng Oxy là $D:\begin{cases} -1\le x\le 1 \\ x^2\le y\le 1 \end{cases}$

Suy ra $I=\iiint\limits_V z dxdydz=\iint\limits_D dxdy\left(\int\limits_0^4 z dz\right)=8\iint\limits_D dxdy=8\int\limits_{-1}^{1} dx\int\limits_{x^2}^{1} dy=8\int\limits_{-1}^{1}(1-x^2)dx=\dfrac{32}{3}$

Ví dụ 1.17. Tính $I=\iiint\limits_V\left(x^3+y^3+z^3\right)dxdydz$ với V là quả cầu được xác định

$x^2+y^2+z^2\le R^2$

Giải



Nhận xét thấy miền V đối xứng nhau qua 3 mặt phẳng tọa độ và các hàm x^3, y^3, z^3 lẻ theo các biến x, y, z nên $I = \iiint\limits_V \left(x^3 + y^3 + z^3\right) dxdydz = 0$

1.3.4. Phương pháp đổi biến trong tích phân bội 3

❖ **Công thức đổi biến tổng quát**

Giả sử miền V_{uvw} trong không gian O'uvw được ánh xạ song ánh sang miền V_{xyz} của không gian Oxy bởi hệ hàm khả vi liên tục $\begin{cases} x = x(u,v,w) \\ y = y(u,v,w) \\ z = z(u,v,w) \end{cases}$

Nếu định thức Jacobi J $= J = \dfrac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \neq 0, \forall (u,v,w) \in Vuvw$

thì ta có công thức đổi biến sau

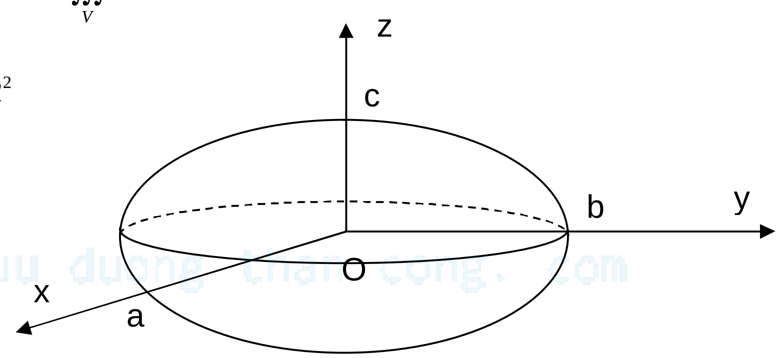
$$\boxed{\iiint\limits_{V_{xyz}} f(x,y,z) dxdydz = \iiint\limits_{V_{uvw}} f\left(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)\right) |J| dudvdw}.$$

Chú ý: $\dfrac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)} = \dfrac{1}{\dfrac{D(u,v,w)}{D(x,y,z)}}$

Ví dụ 1.18. Tính $I = \iiint\limits_V dxdydz$ với V là miền elipxoit được xác định

$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} \le R^2$

<u>Giải</u>



Đặt $\begin{cases} x = au \\ y = bv \\ z = cw \end{cases} \Rightarrow V': u^2 + v^2 + w^2 \le R^2$; $J = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = abc$

Suy ra $I = \iiint\limits_{V} dxdydz = \iiint\limits_{V'} abcdudvdw$

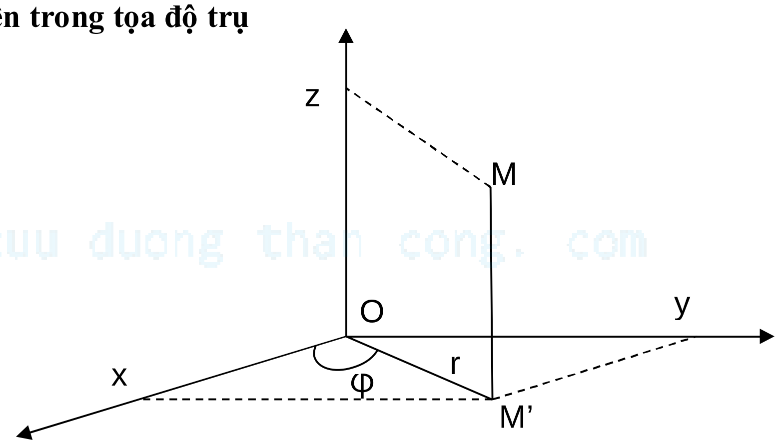
Hình chiếu của V' xuống mặt phẳng Ouv là đường tròn $D: u^2 + v^2 \le R^2$ và $-\sqrt{R^2 - u^2 - v^2} \le w \le \sqrt{R^2 - u^2 - v^2}$

Vậy $I = abc\iint\limits_{D} dudv \left(\int\limits_{-\sqrt{R^2-u^2-v^2}}^{\sqrt{R^2-u^2-v^2}} dw \right) = 2abc\iint\limits_{D} \sqrt{R^2 - u^2 - v^2}\, dudv$

Chuyển sang tọa độ cực $D \to D': \begin{cases} 0 \le r \le R \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{cases}$

Do đó $I = 2abc\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{R} r\sqrt{R^2 - r^2}\, dr = \frac{4}{3}\pi Rabc$

❖ **Đổi biến trong tọa độ trụ**



Xét điểm $M(x, y, z)$ trong không gian Oxyz có hình chiếu xuống mặt phẳng Oxy là $M'(x, y, 0)$. Gọi (r, φ) là tọa độ cực của M'. Khi đó $M(r, \varphi, z)$ được gọi là tọa độ trụ của điểm M và được xác định $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$ có $J = r$

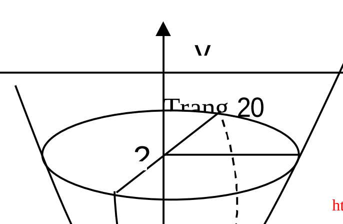
Công thức đổi biến trong tọa độ trụ là

$$\boxed{\iiint\limits_{V_{xyz}} f(x, y, z)dxdydz = \iiint\limits_{V_{r\varphi z}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)rdrd\varphi dz}$$

Ví dụ 1.19. Tính $I = \iiint\limits_{V} (x^2 + z^2)dxdydz$ với V là miền được giới hạn bởi các mặt

$x^2 + z^2 = 2y; \quad y = 2$

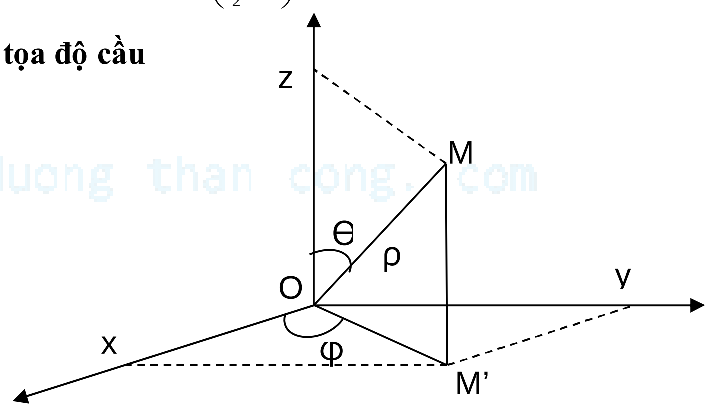
Giải



Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ z = r\sin\varphi \\ y = y \end{cases}$; $J = r$, ta có $V \to V': \begin{cases} 0 \le r \le 2 \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \\ r^2/2 \le y \le 2 \end{cases}$

Suy ra $I = \iiint\limits_V (x^2+z^2)dxdydz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 r^3 \left(\int\limits_{\frac{r^2}{2}}^2 dy \right) dr = 2\pi \int\limits_0^2 r^3 \left(2 - \frac{r^2}{2} \right) dr = \frac{16\pi}{3}$

❖ **Đổi biến trong tọa độ cầu**



Xét điểm $M(x,y,z)$ trong không gian Oxyz có hình chiếu xuống mặt phẳng Oxy là $M'(x,y,0)$.

Gọi ρ : khoảng cách từ O đến M.

φ : góc giữa $\overrightarrow{Ox}$ và $\overrightarrow{OM'}$

θ : góc giữa $\overrightarrow{Oz}$ và $\overrightarrow{OM}$

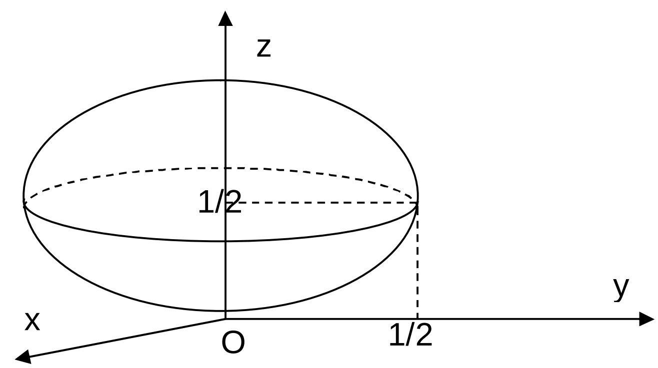
Khi đó (ρ,φ,θ) được gọi là tọa độ cầu của điểm M $\begin{cases} x = \rho\cos\varphi\sin\theta \\ y = \rho\sin\varphi\sin\theta \\ z = \rho\cos\theta \end{cases}$ có $J = \rho^2\sin\theta$

Công thức đổi biến trong tọa độ cầu là

$$\boxed{\iiint\limits_{V_{xyz}} f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{V_{\rho\varphi\theta}} f(\rho\cos\varphi\sin\theta, \rho\sin\varphi\sin\theta, \rho\cos\theta)\rho^2\sin\theta d\rho d\varphi d\theta}$$

Ví dụ 1.20. Tính $I = \iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz$ với V là quả cầu $x^2+y^2+z^2 \le z$

Giải



Đặt $\begin{cases} x = \rho\cos\varphi\sin\theta \\ y = \rho\sin\varphi\sin\theta \\ z = \rho\cos\theta \end{cases}$; $J = \rho^2\sin\theta$, từ phương trình mặt cầu $x^2+y^2+z^2 \le z$

$$\Rightarrow \rho^2 \le \rho\cos\theta \Rightarrow \rho \le \cos\theta$$

Ta có $V \to V': \begin{cases} 0 \le \rho \le \cos\theta \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le \theta \le \pi/2 \end{cases}$. Suy ra

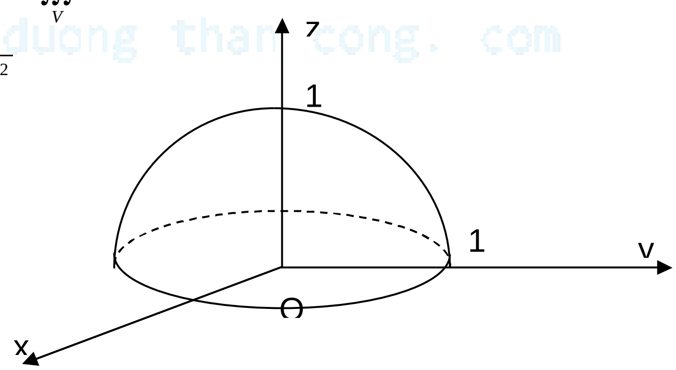
$$I = \iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta \left(\int_0^{\cos\theta} \rho.\rho^2 d\rho \right) d\theta$$

$$= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4}\sin\theta\cos^4\theta d\theta = \frac{\pi}{10}$$

Ví dụ 1.21. Tính $I = \iiint\limits_V zdxdydz$ với V là miền được giới hạn bởi các mặt

$z = 0;\quad z = \sqrt{1-x^2-y^2}$

Giải



Cách 1: Dùng tọa độ cầu

Đặt $\begin{cases} x = \rho\cos\varphi\sin\theta \\ y = \rho\sin\varphi\sin\theta \\ z = \rho\cos\theta \end{cases}$; $J = \rho^2\sin\theta$, ta có $V \to V' : \begin{cases} 0 \le \rho \le 1 \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le \theta \le \pi/2 \end{cases}$.

Suy ra $I = \iiint\limits_V zdxdydz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\cos\theta d\theta \int_0^1 \rho.\rho^2 d\rho = \dfrac{\pi}{4}$

Cách 2: Dùng tọa độ trụ

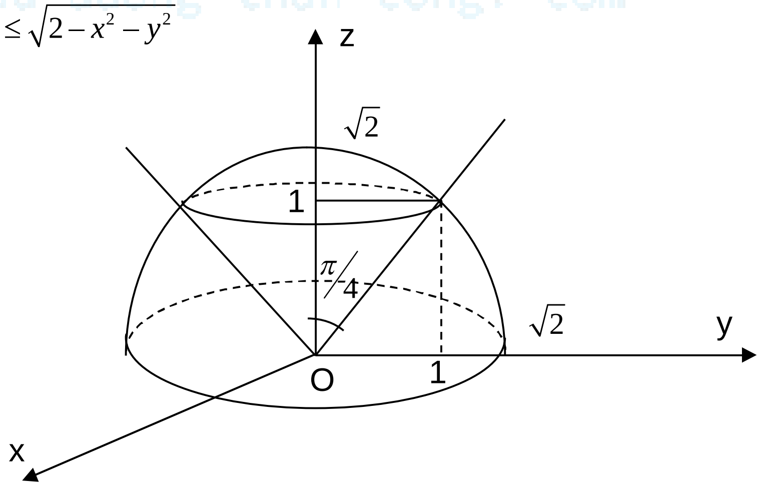
Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$; $J = r$, ta có $V \to V' : \begin{cases} 0 \le r \le 1 \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le z \le \sqrt{1-r^2} \end{cases}$.

Suy ra $I = \iiint\limits_V zdxdydz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r\left(\int_0^{\sqrt{1-r^2}} zdz \right) dr = \dfrac{\pi}{4}$

Ví dụ 1.22. Tính $I = \iiint\limits_V zdxdydz$ với V là miền được giới hạn bởi các mặt

$z \ge \sqrt{x^2+y^2}$; $z \le \sqrt{2-x^2-y^2}$

<u>Giải</u>



Cách 1: Dùng tọa độ cầu

Đặt $\begin{cases} x = \rho\cos\varphi\sin\theta \\ y = \rho\sin\varphi\sin\theta \\ z = \rho\cos\theta \end{cases}$; $J = \rho^2\sin\theta$, ta có $V \to V' : \begin{cases} 0 \le \rho \le \sqrt{2} \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le \theta \le \pi/4 \end{cases}$.

Suy ra $I = \iiint\limits_V zdxdydz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\theta\cos\theta d\theta \int_0^{\sqrt{2}} \rho.\rho^2 d\rho = \dfrac{\pi}{2}$

Cách 2: Dùng tọa độ trụ

Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$; $J = r$, ta có $V \to V': \begin{cases} 0 \le r \le 1 \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \\ r \le z \le \sqrt{2 - r^2} \end{cases}$.

Suy ra $I = \iiint\limits_V z\,dxdydz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r\left(\int_0^{\sqrt{2-r^2}} z\,dz\right)dr = 2\pi\int_0^1 \frac{1}{2}\left(2 - r^2 - r^2\right)dr = \frac{\pi}{2}$

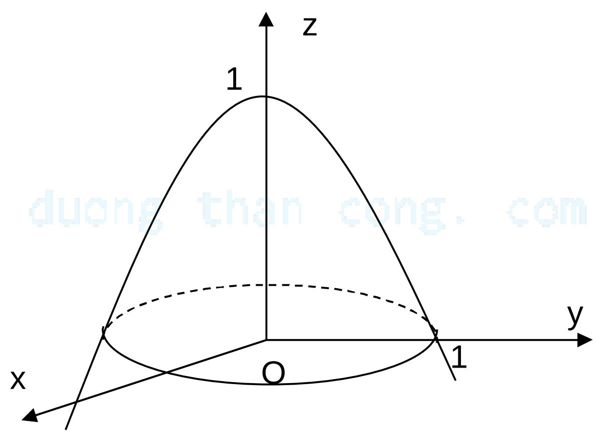
1.3.5. Ứng dụng của tích phân bội 3

Thể tích miền V trong không gian Oxyz được tính bởi công thức sau

$$\boxed{\Delta(V) = \iiint\limits_V dxdydz}$$

Ví dụ 1.23. Tính thể tích vật thể được giới hạn bởi các mặt $z = 0$; $z = 1 - x^2 - y^2$

<u>Giải</u>

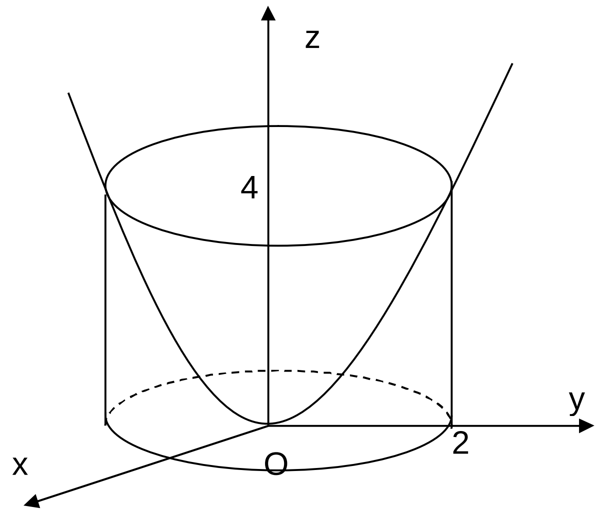


Chuyển sang tọa độ trụ $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$; $J = r$, ta có $V \to V': \begin{cases} 0 \le r \le 1 \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le z \le 1 - r^2 \end{cases}$.

Suy ra $\Delta(V) = \iiint\limits_V dxdydz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r\left(\int_0^{1-r^2} dz\right)dr = 2\pi\int_0^1 r\left(1 - r^2\right)dr = \frac{\pi}{2}$

Ví dụ 1.24. Tính thể tích vật thể được giới hạn bởi các mặt $z = 0$; $z = x^2 + y^2$; $x^2 + y^2 = 4$

<u>Giải</u>



Chuyển sang tọa độ trụ $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$; $J = r$, ta có $V \to V': \begin{cases} 0 \le r \le 2 \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le z \le r^2 \end{cases}$.

Suy ra $\Delta(V) = \iiint\limits_V dxdydz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 r\left(\int_0^{r^2} dz\right)dr = 2\pi\int_0^2 r^3 dr = 8\pi$