2.2.4. Tìm biến đổi Laplace ngược

Bài toán : Biết hàm Y(s) , tìm hàm thời gian y(t)=?

Y(s) thường có dạng tỉ số của hai đa thức:

$$Y(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \ldots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_0} \qquad (m<n)$$

- ***PP giải:*** *Phân tích Y(s) thành tổng các phân thức đơn giản, sau đó áp dụng các công thức cơ bản.*

$$y(t) = L^{-1}[Y(s)] = \sum_{i=1}^{n} L^{-1}[Y_i(s)] = \sum_{i=1}^{n} y_i(t)$$

- *Cách phân tích Y(s) phụ thuộc vào loại nghiệm của mẫu số Q(s) (nghiệm đơn/ bội/ phức).*

2.2.4. Tìm biến đổi Laplace ngược

1) Mẫu số của Y(s) chỉ có nghiệm đơn

Giả sử Q(s) có n nghiệm đơn $s_1, s_2, \ldots, s_n$

Khi đó có thể phân tích :

$$Q(s) = a_n(s - s_1)(s - s_2)\ldots(s - s_n)$$

$$Y(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{A_1}{s - s_1} + \frac{A_2}{s - s_2} + \ldots + \frac{A_i}{s - s_i} + \ldots + \frac{A_n}{s - s_n}$$

Các hệ số A_i (i=1,2,…,n) xác định bởi:

$$A_i = \lim_{s \to s_i} [(s - s_i).Y(s)] = [(s - s_i).Y(s)]\Big|_{s = s_i} = \operatorname*{Res}_{s = s_i}[Y(s)]$$

Tra bảng ta có: $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{A_i}{s - s_i}\right] = A_i e^{s_i t}$

$$\Rightarrow \quad y(t) = \sum_{i=1}^{n} A_i e^{s_i t} = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} + \ldots + A_n e^{s_n t}$$

2.2.4. Tìm biến đổi Laplace ngược

Ví dụ : *Tìm y(t) biết*

$$Y(s) = \frac{5s+3}{s(2s^2+14s+20)}$$

Giải. *Mẫu số của Y(s) có 3 nghiệm đơn s_1=0, s_2=-2 , s_3=-5 và hệ số a_n=a_3=2. Do đó có thể phân tích :*

$$Y(s) = \frac{5s+3}{2s(s+2)(s+5)} = \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{s+2} + \frac{A_3}{s+5}$$

$$A_1 = \lim_{s\to 0}[s.Y(s)] = \lim_{s\to 0}\frac{5s+3}{2(s+2)(s+5)} = \frac{3}{20}$$

$$A_2 = \lim_{s\to -2}[(s+2)Y(s)] = \lim_{s\to -2}\frac{5s+3}{2s(s+5)} = \frac{7}{12}$$

$$A_3 = \lim_{s\to -5}[(s+5)Y(s)] = \lim_{s\to -5}\frac{5s+3}{2s(s+2)} = -\frac{22}{30} = -\frac{11}{15}$$

2.2.4. Tìm biến đổi Laplace ngược

$$\Rightarrow \quad Y(s) = \frac{3}{20s} + \frac{7}{12(s+2)} - \frac{11}{15(s+5)}$$

$$y(t) = L^{-1}[Y(s)] = \frac{3}{20}.1(t) + \frac{7}{12}e^{-2t} - \frac{11}{15}e^{-5t} = \frac{3}{20} + \frac{7}{12}e^{-2t} - \frac{11}{15}e^{-5t}$$

Nhận xét: Tìm giá trị xác lập y(∞) ?

Cách 1: $y(\infty) = \lim_{t\to\infty}[y(t)] = 3/20$

Cách 2: *Dùng định lý giá trị cuối*

$$y(\infty) = \lim_{s\to 0}[s.Y(s)]$$

$$= \lim_{s\to 0}\frac{5s+3}{2s^2+14s+20} = \frac{3}{20}$$

2.2.4. Tìm biến đổi Laplace ngược

2) Mẫu số của Y(s) có nghiệm bội

Giả sử Q(s) có (n-r) nghiệm đơn s_1 , s_2 ,…, s_{n-r} và một nghiệm bội s_k lặp r lần

Khi đó có thể phân tích :

$$Q(s) = a_n(s - s_1)\ldots(s - s_{n-r})(s - s_k)^r$$

$$Y(s) = \frac{A_1}{s - s_1} + \ldots + \frac{A_{n-r}}{s - s_{n-r}} + \frac{B_r}{(s - s_k)^r} + \ldots + \frac{B_2}{(s - s_k)^2} + \frac{B_1}{s - s_k}$$

$$A_i = \lim_{s \to s_i}[(s - s_i).Y(s)] \qquad (\ i=1,2,\ldots,n-r)$$

$$B_i = \frac{1}{(r - i)!} \lim_{s \to s_k}\left\{\frac{d^{r-i}}{ds^{r-i}}\left[(s - s_k)^r.Y(s)\right]\right\} \qquad (\ i=r,r-1,\ldots,1)$$

2.2.4. Tìm biến đổi Laplace ngược

$$B_i = \frac{1}{(r-i)!} \lim_{s \to s_k} \left\{ \frac{d^{r-i}}{ds^{r-i}} \left[(s-s_k)^r . Y(s) \right] \right\} \qquad (\, i=r, r-1, \ldots, 1)$$

- *Nếu r =2 (nghiệm kép), cần tìm 2 hệ số B_2, B_1 :*

$$B_2 = \lim_{s \to s_k} \left[(s-s_k)^2 . Y(s) \right] \quad ; \quad B_1 = \lim_{s \to s_k} \left\{ \frac{d}{ds} \left[(s-s_k)^2 . Y(s) \right] \right\}$$

$$Y(s) = \frac{A_1}{s-s_1} + \ldots + \frac{A_{n-r}}{s-s_{n-r}} + \frac{B_r}{(s-s_k)^r} + \ldots + \frac{B_2}{(s-s_k)^2} + \frac{B_1}{s-s_k}$$

$$\Rightarrow \quad y(t) = \sum_{i=1}^{n-r} A_i e^{s_i t} + B_r \frac{t^{r-1}}{(r-1)!} e^{s_k t} + \ldots + B_2 t e^{s_k t} + B_1 e^{s_k t}$$

2.2.4. Tìm biến đổi Laplace ngược

Ví dụ : *Tìm y(t) biết*

$$Y(s) = \frac{5s+24}{s(s+4)(s^2+6s+9)}$$

Giải. *Mẫu số của Y(s) có 2 nghiệm đơn s_1=0 ; s_2=-4 và một nghiệm kép s_k =-3 nên có thể phân tích :*

$$Y(s) = \frac{5s+24}{s(s+4)(s+3)^2} = \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{s+4} + \frac{B_2}{(s+3)^2} + \frac{B_1}{s+3}$$

$$A_1 = \lim_{s\to 0}[s.Y(s)] = \lim_{s\to 0}\frac{5s+24}{(s+4)(s+3)^2} = \frac{24}{36} = \frac{2}{3}$$

$$A_2 = \lim_{s\to -4}[(s+4)Y(s)] = \lim_{s\to -4}\frac{5s+24}{s(s+3)^2} = \frac{4}{-4} = -1$$

$$B_2 = \lim_{s\to -3}[(s+3)^2 Y(s)] = \lim_{s\to -3}\frac{5s+24}{s(s+4)} = \frac{9}{-3} = -3$$

2.2.4. Tìm biến đổi Laplace ngược

$$B_1 = \lim_{s\to -3}\left\{\frac{d}{ds}[(s+3)^2 Y(s)]\right\} = \lim_{s\to -3}\left\{\frac{d}{ds}\left[\frac{5s+24}{s(s+4)}\right]\right\}$$

Lưu ý: $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$

$$B_1 = \lim_{s\to -3}\frac{5s(s+4)-(2s+4)(5s+24)}{s^2(s+4)^2} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \quad Y(s) = \frac{2}{3s} - \frac{1}{(s+4)} - \frac{3}{(s+3)^2} + \frac{1}{3(s+3)}$$

$$\Rightarrow \quad y(t) = L^{-1}[Y(s)] = \frac{2}{3} - e^{-4t} - 3te^{-3t} + \frac{1}{3}e^{-3t}$$

2.2.4. Tìm biến đổi Laplace ngược

3) Mẫu số của Y(s) có nghiệm phức

Giả sử Q(s) có (n-2) nghiệm đơn s_1 *,* s_2 *,…,* s_{n-2}
và 2 nghiệm phức $p_{1,2} = a \pm j\omega$

Khi đó có thể phân tích :

$$Q(s) = a_n(s - s_1)\dots(s - s_{n-2})(s - p_1)(s - p_2)$$

$$Q(s) = a_n(s - s_1)\dots(s - s_{n-2})[(s - a)^2 + \omega^2]$$

$$Y(s) = \frac{A_1}{s - s_1} + \dots + \frac{A_{n-2}}{s - s_{n-2}} + \frac{C_1(s - a) + C_2\omega}{(s - a)^2 + \omega^2}$$

Các hệ số A_i *,* C_1 *,*C_2 *xác định bằng :*

- Phương pháp đồng nhất hệ số đa thức,

- hoặc Tính theo công thức:

2.2.4. Tìm biến đổi Laplace ngược

$$A_i = \lim_{s \to s_i} [(s - s_i) Y(s)] \qquad (i=1,\dots,n-2)$$

$$C_1 = \frac{1}{\omega} \operatorname{Im} \left\{ [(s-p_1)(s-p_2)Y(s)] \Big|_{s=p_1} \right\}$$

$$C_2 = \frac{1}{\omega} \operatorname{Re} \left\{ [(s-p_1)(s-p_2)Y(s)] \Big|_{s=p_1} \right\}$$

$$Y(s) = \frac{A_1}{s - s_1} + \dots + \frac{A_{n-2}}{s - s_{n-2}} + \frac{C_1(s-a) + C_2\omega}{(s-a)^2 + \omega^2}$$

Biến đổi Laplace ngược hàm ảnh Y(s) ta được :

$$y(t) = \sum_{i=1}^{n-2} A_i e^{s_i t} + C_1 e^{at} \cos \omega t + C_2 e^{at} \sin \omega t$$

2.2.4. Tìm biến đổi Laplace ngược

Nhận xét : *Có thể đưa kết quả về dạng hàm sin hay cos của tổng/hiệu.*

$$\alpha\sin\omega t\pm\beta\cos\omega t=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\left(\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\sin\omega t\pm\frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\cos\omega t\right)$$

$$=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\left(\sin\omega t\cos\varphi\pm\cos\omega t\sin\varphi\right)$$

$$=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\,\sin(\omega t\pm\varphi)$$

Trong đó :

$$\varphi=\arccos\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}=\arcsin\frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$$

2.2.4. Tìm biến đổi Laplace ngược

Ví dụ: *Tìm y(t) biết*

$$Y(s)=\frac{2s+5}{s(s^2+6s+25)}$$

Giải. *Mẫu số của Y(s) có một nghiệm đơn s=0 và hai nghiệm phức* $p_{1,2}=-3\pm 4j$ *nên có thể phân tích :*

$$Y(s)=\frac{2s+5}{s(s^2+6s+25)}=\frac{A}{s}+\frac{C_1(s+3)+4C_2}{s^2+6s+25}$$

$$Y(s)=\frac{(A+C_1)s^2+(6A+3C_1+4C_2)s+25A}{s(s^2+6s+25)}$$

So sánh với Y(s) đã cho, ta được:

$$\begin{cases} 25A=5 \\ A+C_1=0 \\ 6A+3C_1+4C_2=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=1/5 \\ C_1=-1/5 \\ C_2=7/20 \end{cases}$$

2.2.4. Tìm biến đổi Laplace ngược

$$Y(s) = \frac{1}{5s} + \frac{-\frac{1}{5}(s+3) + \frac{7}{20}(4)}{s^2+6s+25} = \frac{1}{5s} + \frac{-\frac{1}{5}(s+3)}{(s+3)^2+4^2} + \frac{\frac{7}{20}(4)}{(s+3)^2+4^2}$$

$$y(t) = L^{-1}[Y(s)] = \frac{1}{5} - \frac{1}{5}e^{-3t}\cos 4t + \frac{7}{20}e^{-3t}\sin 4t$$

$$= \frac{1}{5} + \frac{1}{20}e^{-3t}(7\sin 4t - 4\cos 4t)$$

$$= \frac{1}{5} + \frac{\sqrt{65}}{20}e^{-3t}\left(\frac{7}{\sqrt{65}}\sin 4t - \frac{4}{\sqrt{65}}\cos 4t\right) = \frac{1}{5} + \frac{\sqrt{65}}{20}e^{-3t}\sin(4t-\varphi)$$

Vôùi $\qquad \varphi = \arccos\frac{7}{\sqrt{65}} = \arcsin\frac{4}{\sqrt{65}}$

2.2.4. Tìm biến đổi Laplace ngược

- *Cũng có thể tính A, C_1 , C_2 bằng công thức :*

$$A = \lim_{s\to 0}[sY(s)] = \lim_{s\to 0}\frac{2s+5}{s^2+6s+25} = \frac{1}{5}$$

$$D = \left[(s-p_1)(s-p_2)Y(s)\right]\Big|_{s=p_1} = \left(\frac{2s+5}{s}\right)\Big|_{s=-3+4j}$$

$$D = \frac{-1+8j}{-3+4j} = \frac{(-1+8j)(-3-4j)}{9-16j^2} = \frac{35-20j}{25} = \frac{7}{5} - \frac{4}{5}j$$

$$C_1 = \frac{1}{\omega}\operatorname{Im}\{D\} = \left(\frac{1}{4}\right)\left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{1}{5}$$

$$C_2 = \frac{1}{\omega}\operatorname{Re}\{D\} = \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{7}{5}\right) = \frac{7}{20}$$

Bài tập: Cho Y(s), tìm y(t)=?

(1) $Y(s)=\dfrac{18s+126}{s(s^2+23s+126)}$

(2) $Y(s)=\dfrac{s+20}{s(2s^2+16s+30)}$

(3) $Y(s)=\dfrac{3s+40}{s(s+5)(s+3)^2}$

(4) $Y(s)=\dfrac{6s+15}{s(s+1)(s^2+8s+16)}$

(5) $Y(s)=\dfrac{s+5}{s(s^2+4s+5)}$

(6) $Y(s)=\dfrac{15s+225}{s(s^2+18s+225)}$

$$y(t)=1+\frac{4}{5}e^{-9t}-\frac{9}{5}e^{-14t}$$

$$y(t)=\frac{2}{3}-\frac{17}{12}e^{-3t}+\frac{3}{4}e^{-5t}$$

$$y(t)=\frac{8}{9}-\frac{5}{4}e^{-5t}-\frac{31}{6}te^{-3t}+\frac{13}{36}e^{-3t}$$

$$y(t)=\frac{15}{16}-e^{-t}-\frac{3}{4}te^{-4t}+\frac{1}{16}e^{-4t}$$

$$y(t)=1-\sqrt{2}e^{-2t}\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$y(t)=1-e^{-9t}\cos 12t+\frac{1}{2}e^{-9t}\sin 12t$$