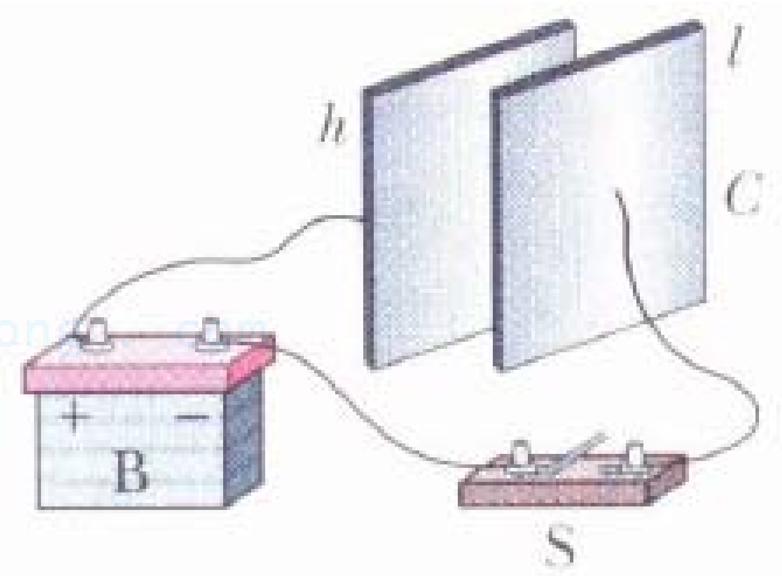
2.4 Poisson Laplace Equation :

❖ Introduction:

- Charge distribution is given, E and φ can be found : Coulomb Law or Gauss Law.

- In many practical problem, charge distribution is not known. But the potentials of conductors are measured, we can find φ and E in the surrounding space .



- And the charge disribution on the conductors can be computed by using the boundary conditions .

➡ **Poisson – Laplace Equation will be discussed !**

2.4.1 Poisson- Laplace Equation :

❖ **From:** $\operatorname{div}\vec{D} = \rho_V$ **, if ε = const :**

$$\Delta\varphi = -\frac{\rho_V}{\varepsilon}$$ ***(Poisson's equation)***

❖ **There is no free charge ($\rho_V = 0$) : free space (vacuum), air, perfect dielectric .**

$$\Delta\varphi = 0$$ ***(Laplace's equation)***

❖ **If ε ≠ const, the potential is the solution of :**

$$\operatorname{div}[\varepsilon \operatorname{grad}(\varphi)] = -\rho_V$$ ***(or)*** $$\operatorname{div}[\varepsilon \operatorname{grad}(\varphi)] = 0$$

❖ General procedure for solving P-L equ. :

i. **Solve Laplace (if $\rho_V = 0$) or Poisson (if $\rho_V \neq 0$) equation by :**

- **Direct intergration if φ : one variable.**
- **Separation variables if φ : more than one variable.**

ii. **Apply the boundary conditions to determine a unique solution.**

iii. **Having φ :** find $\vec{E} = -\mathrm{grad}(\varphi)$ and $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$.

❖ Special cases for solving Laplace equation :

$$\boxed{\Delta\varphi = 0} \quad \text{(Laplace's equation)}$$

If φ depends only on the first variable :

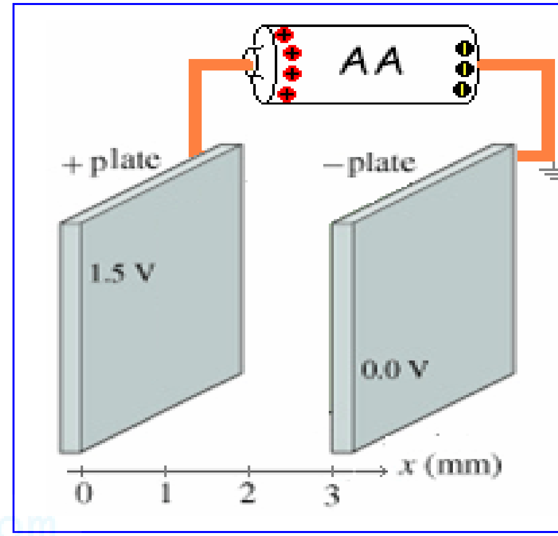
- **Cartesian:** $$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right] = 0 \longrightarrow \boxed{\varphi = \mathrm{A}x + \mathrm{B}}$$

- **Cylindrical:** $$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right] = 0 \longrightarrow \boxed{\varphi = \mathrm{A}\ln r + \mathrm{B}}$$

- **Spherical:** $$\frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2 \sin\theta\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right] = 0 \longrightarrow \boxed{\varphi = \frac{\mathrm{A}}{r} + \mathrm{B}}$$

❖Ví dụ1: Dùng đkiện biên của φ

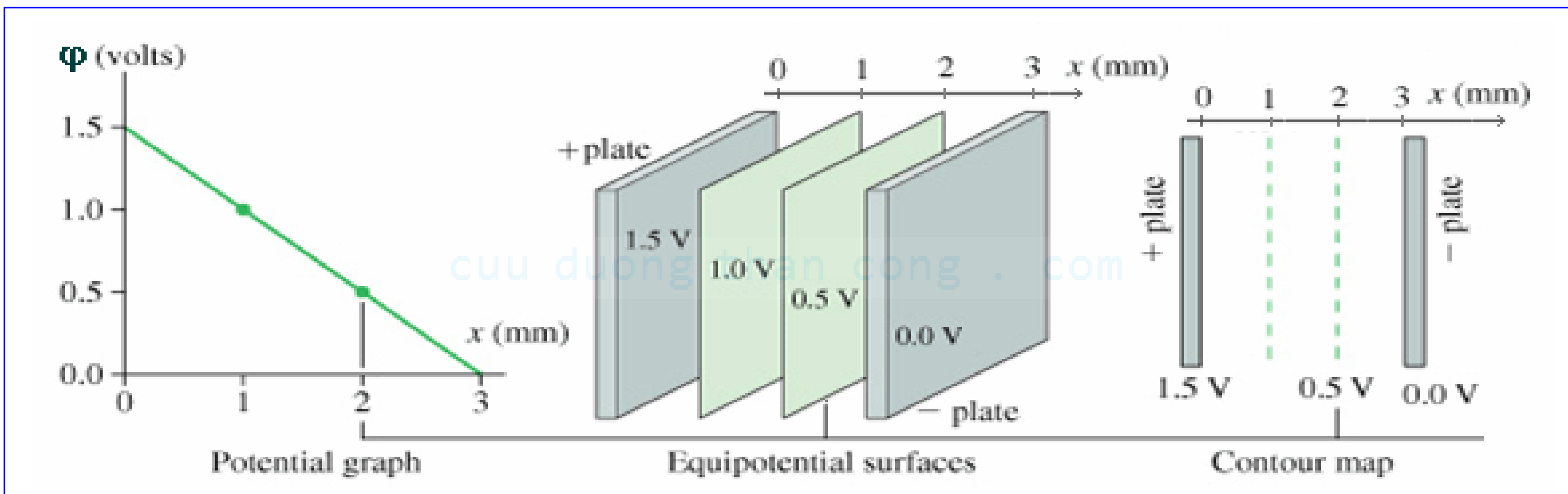
Tìm thế điện giữa 2 bản cực tụ phẳng , hiệu thế U = 1,5 V ? **Giải**



❖ Giả sử φ chỉ phụ thuộc vào x : φ = φ(x).

❖ Do: $\Delta\varphi = 0 \Rightarrow \dfrac{d^2\varphi}{dx^2} = 0 \;\rightarrow \varphi = Ax + B$

❖ Có : $\begin{cases} \varphi(0) = \mathrm{U} \\ \varphi(d) = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\varphi = -\dfrac{\mathrm{U}}{d}x + \mathrm{U}}$



2.4.2 The direct intergration on $\vec{D}$ field :

a) **Phần lớn các vật mang điện trong kỹ thuật có tính đối xứng. Khi đó thế điện chỉ phụ thuộc vào 1 biến tọa độ. Kéo theo các vectơ $\vec{D}$ và $\vec{E}$ cũng chỉ có một thành phần .**

b) **Dựa vào phương trình :** $\boxed{\operatorname{div}\vec{D} = \rho_V}$ **hay** $\boxed{\operatorname{div}\vec{D} = 0}$

$\Rightarrow$ **Biểu thức của $\vec{D}$ (và các hằng số tích phân).**

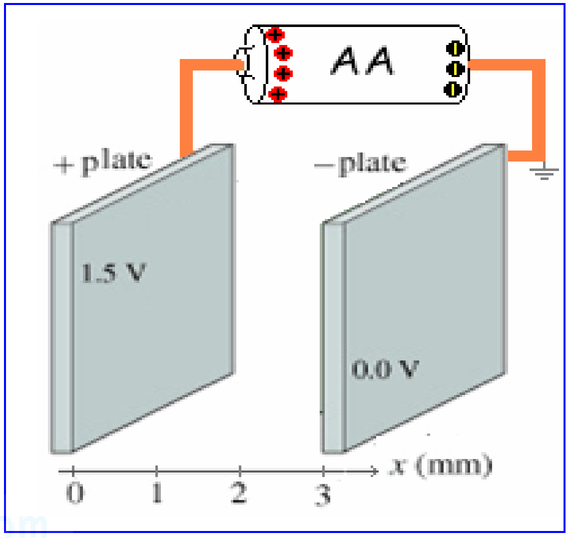
c) **Vectơ cđộ trường điện :** $\boxed{\vec{E} = \dfrac{\vec{D}}{\varepsilon}}$

d) **Áp dụng :** $\boxed{U_{ab} = \int_{a\to b}\vec{E}d\vec{l}}$ **suy ra các hằng số tích phân .**

(Dùng điều kiện biên của thế điện : suy ra trường điện)

❖Ví dụ1: Xác định φ từ vectơ $\vec{D}$

Tìm thế điện giữa 2 bản cực tụ phẳng, hiệu thế U = 1,5 V ?



Giải

❖ **Do φ = φ(x) nên : $\vec{D} = D_x.\vec{a}_x$.**

❖ **Từ: div$\vec{D}$ = 0** ➡ $\dfrac{\partial D_x}{\partial x} = 0$

➡ **D_x = A = const** ➡ $\vec{E} = \dfrac{D_x}{\varepsilon}\vec{a}_x = \dfrac{A}{\varepsilon}\vec{a}_x$

❖ **Từ :** $U = \displaystyle\int_0^d \frac{A}{\varepsilon}dx = \frac{A}{\varepsilon}d$ ➡ $A = \dfrac{\varepsilon U}{d}$ ➡ $\boxed{\vec{E} = \dfrac{U}{d}\vec{a}_x}$

❖ **Theo đnghĩa:** $\boxed{\varphi = \displaystyle\int_x^d \frac{U}{d}dx' = \frac{U}{d}x'\Big|_x^d = U - \frac{U}{d}x}$