NHỮNG TÌNH HUỐNG DẪN ĐẾN BÀI TOÁN QHTT

1.1. Bài toán lập kế hoạch

Một xí nghiệp muốn sản xuất 2 loại sản phẩm S_1, S_2 bằng 3 loại nguyên liệu N_1, N_2, N_3. Suất chi phí nguyên liệu để sản xuất sản phẩm được thống kê theo bảng:

Sản phẩm / Nguyên liệu	S_1	S_2
N_1	2	1
N_2	1	2
N_3	0	1

- Để sản xuất một sản phẩm S_1 cần 2 đơn vị nguyên liệu N_1 và 1 đơn vị nguyên liệu N_2
- Để sản xuất một sản phẩm S_2 cần 1 đơn vị nguyên liệu N_1, 2 đơn vị nguyên liệu N_2 và 1 đơn vị nguyên liệu N_3
- Để sản xuất liên tục xí nghiệp dự trữ 8 đơn vị nguyên liệu N_1, 7 đơn vị nguyên liệu N_2, 3 đơn vị nguyên liệu N_3.
- Theo thị trường tiền lãi trên 1 đơn vị sản phẩm S_1 là 4 triệu đồng, Trên đơn vị sản phẩm S_2 là 5 triệu đồng.

Yêu cầu lập kế hoạch sản xuất sao cho xí nghiệp thu được tiền lãi lớn nhất với những hạn chế về nguyê liệu

❖ **Phân tích mô hình toán:**

- Gọi x_1 là số lượng sản phẩm S_1, x_2 là số lượng sản phẩm S_2 như vậy tiền lãi mong muốn lớn nhất sẽ là: $4x_1 + 5x_2 \rightarrow \max$
- Từ bảng chi phí và dự trữ nguyên liệu ta có:
- Nguyên liệu N_1 dùng cho sản xuất sản phẩm S_1, S_2 là $2x_1 + x_2 \leq 8$
- Nguyên liệu N_2 dùng cho sản xuất sản phẩm S_1, S_2 là $x_1 + 2x_2 \leq 7$
- Nguyên liệu N_3 dùng cho sản xuất sản phẩm S_1, S_2 là $x_2 \leq 3$
- Tất nhiên x_1, x_2 số lượng sản phẩm S_1, S_2 do đó $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$
- Tổng hợp các phân tích trên ta có bài toán:

$$\langle 1 \rangle\ f(x) = 4x_1 + 5x_2 \rightarrow \max$$

$$\langle 2 \rangle \begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 8 \\ x_1 + 2x_2 \leq 7 \\ x_2 \leq 3 \end{cases}$$

$$\langle 3 \rangle\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

Dạng tổng quát bài toán lập kế hoạch tối ưu

Giả sử một đơn vị muốn sản xuất n sản phẩm ($S_1, S_2,\dots S_n$) bằng cách sử dụng m loại nguyên liệu khác nhau ($N_1, N_2,\dots N_m$)

Ta đặt các ký hiệu:

- x_j là lượng sản phẩm các loại (j= 1: n)
- c_j là tiền lãi trên một đơn vị sản phẩm
- a_{ij} là suất chi phí nguyên liệu loại i để sản xuất ra một đơn vị sản phẩm loại j
- b_i là lượng dự trữ các nguyên liệu (i = 1:m)

Hãy xác định x_j (j= 1: n) sao cho tổng tiền lãi lớn nhất trong điều kiện nguyên liệu đang có?

Mô hình bài toán dạng tổng quát như sau:

$$\langle 1\rangle f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_i \to \max$$
$$\langle 2\rangle \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i,\ j = 1:n, i = 1:n$$
$$\langle 3\rangle x_j \ge 0,\ j = 1:n$$

1.2. Bài toán sử dụng vật tư

❖ **Bài toán:**

Một nhà máy sử dụng m loại vật tư V_i (i=1:m) để sản xuất n mặt hàng H_j; gọi

- b_i là lượng vật tư thứ i
- a_{ij} là số đơn vị vật tư thứ i để sản xuất ra một đơn vị mặt hàng j
- c_j là tiền lãi trên một đơn vị sản phẩm H_j
- x_j là lượng sản phẩm của mặt hàng H_j (j= 1: n)

Yêu cầu: Hãy tìm số lượng sản phẩm sản xuất ra trong điều kiện đã cho tiền lãi thu về lớn nhất

Mô hình bài toán dạng tổng quát như sau:

$$\langle 1\rangle f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_i \to \max$$
$$\langle 2\rangle \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, i = 1:m$$
$$\langle 3\rangle x_j \ge 0,\ j = 1:n$$

❖ **Bài tập ví dụ:**

Một xí nghiệp sản xuất bốn loại mặt hàng A, B, C, D từ 3 loại vật tư I, II, III. Số lượng hạn chế của mỗi loại vật tư, định mức tiêu hao vật tư cho một đơn vị mặt hàng và lãi thu được từ một đơn vị mặt hàng được cho ở bảng sau:

Mặt hàng / Vật tư	A	B	C	D
I (300 đơn vị)	12	5	15	6
II (500 đơn vị)	14	8	7	9
III (200 đơn vị)	17	13	9	12
Tiền lãi/1ĐVSP	5	8	4	6

Hãy lập phương án sản xuất để tổng tiền lãi lớn nhất đồng thời đảm bảo chủ động về vật tư.

Bài làm:

Gọi x_1 là số lượng sản phẩm A; Gọi x_2 là số lượng sản phẩm B; Gọi x_3 là số lượng sản phẩm C; Gọi x_4 là số lượng sản phẩm D như vậy tiền lãi mong muốn lớn nhất sẽ là: $f(x) = 5x_1 + 8x_2 + 4x_3 + 6x_4 \rightarrow \max$

Từ bảng sản xuất nguyên liệu ta có:

- Nguyên liệu I dùng cho SX sản phẩm A, B, C, D là: $12x_1 + 5x_2 + 15x_3 + 6x_4 \leq 300$
- Nguyên liệu II dùng cho SX sản phẩm A, B, C, D là: $14x_1 + 8x_2 + 7x_3 + 9x_4 \leq 500$
- Nguyên liệu III dùng cho SX sản phẩm A, B, C, D là: $17x_1 + 13x_2 + 9x_3 + 12x_4 \leq 200$

Do x_1; x_2; x_3; x_4 là số lượng sản phẩm do vậy $x_i \geq 0$, i = 1: 4

Tổng hợp các phân tích trên ta có bài toán:

(1) $f(x) = 5x_1 + 8x_2 + 4x_3 + 6x_4 \rightarrow \max$

(2) $$\begin{cases} 12x_1 + 5x_2 + 15x_3 + 6x_4 \leq 300 \\ 14x_1 + 8x_2 + 7x_3 + 9x_4 \leq 500 \\ 17x_1 + 13x_2 + 9x_3 + 12x_4 \leq 200 \end{cases}$$

(3) $x_i \geq 0$, i = 1: 4

Kết quả giải bải toán tối ưu:

X1	X2	X3	X4	F(x)
0	**15**	**0**	**0**	**123**

1.3. Bài toán cái túi

❖ **Bài toán:**

Một người khách đi du lịch muốn mang theo một cái túi nặng không quá b kg. Người khách dự định mang theo n loại vật dụng, mỗi loại vật dụng j có khối lượng là a_j kg và có giá trị là c_i.

Người khách du lịch muốn chất vào túi các vật dụng sao cho tổng giá trị các đồ vật mang theo là lớn nhất.

Phân tích mô hình toán:

Gọi x_j là đồ vật loại j sẽ chất vào cái túi, ta có bài toán như sau:

$$\langle 1\rangle\ f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \rightarrow \max$$

$$\langle 2\rangle \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \leq b$$

$$\langle 3\rangle\ x_j \geq 0,\ j = 1:n,\ x_j\ nguyên$$

1.4. Bài toán pha trộn

❖ **Bài toán:**

Một nhà máy luyện kim muốn sản xuất một hợp kim với thành phần 20% bạc, 30% đồng, 50% nhôm. Họ sử dụng các loại nguyên liệu bạc, đồng, nhôm, hợp kim A, hợp kim B, hợp kim C. Hàm lượng các nguyên liệu và giá một đơn vị khối lượng mỗi loại (USD/kg) được cho ở bảng sau:

	Bạc	Đồng	Nhôm	A	B	C
Bạc	100%	0	0	30%	50%	40%
Đồng	0	100%	0	40%	20%	35%
Nhôm	0	0	100	30%	30%	25%
Đơn giá	1500	300	100	1000	1200	1100

Hãy lập phương án pha trộn thế nào để đơn giá thành sản phẩm là thấp nhất.

*** Phân tích mô hình toán:**

Đặt x_j j = 1:6 là khối lượng (kg) bạc, đồng, nhôm, hợp kim A, hợp kim B, hợp kim C tương ứng để sản xuất ra 1kg hợp kim (x_j này cũng đồng thời là tỷ lệ pha trộn các nguyên liệu khi sản xuất ra hợp kim).

Trong một kg hợp kim mới tạo ra sẽ chứa 0,2kg bạc, 0,3kg đồng, 0,5kg Nhôm. Từ bảng đã cho ta có các số liệu:

- Lượng bạc chứa trong 1kg sản phẩm là:

  $x_1 + 0{,}3x_4 + 0{,}5x_5 + 0{,}4x_6$ lượng này phải bằng 0,2kg

- Lượng đồng chứa trong 1kg sản phẩm là:

  $x_2 + 0{,}4x_4 + 0{,}2x_5 + 0{,}35x_6$ lượng này phải bằng 0,3kg

- Lượng đồng chứa trong 1kg sản phẩm là:

  $x_3 + 0{,}3x_4 + 0{,}3x_5 + 0{,}25x_6$ lượng này phải bằng 0,5kg

- Giá thành 1kg sản phẩm sẽ là:

  $1500x_1 + 300x_2 + 100x_3 + 1000x_4 + 1200x_5 + 1100x_6$ là nhỏ nhất

Tổng hợp các phân tích trên ta được bài toán tối ưu như sau:

(1) $f(x) = 1500x_1 + 300x_2 + 100x_3 + 1000x_4 + 1200x_5 + 1100x_6 \rightarrow \min$

(2) $$\begin{cases} x_1 + 0{,}3x_4 + 0{,}5x_5 + 0{,}4x_6 = 0{,}2 \\ x_2 + 0{,}4x_4 + 0{,}2x_5 + 0{,}35x_6 = 0{,}3 \\ x_3 + 0{,}3x_4 + 0{,}3x_5 + 0{,}25x_6 = 0{,}5 \end{cases}$$

(3) $x_i \geq 0,\ i = 1:6$

Giải bài toán tối ưu ta được:

X1	X2	X3	X4	X5	X6	F(x)
0.2	0.3	0.5	0	0	0	440

1.5. Bài toán vận tải

❖ Bài toán dạng tổng quát

- Có m kho hàng cùng chứa một loại hàng hóa được đánh số (i =1:m) lượng hàng hóa ở kho thứ i được kí hiệu là a_i (i =1:m). Có n địa điểm nhận tiêu thụ hàng hóa trên được đánh số (j =1:n) với nhu cầu tiêu thụ ở địa điểm j kí hiệu là b_j (j =1:n)
- Ta gọi kho i là địa điểm xuất phát, điểm tiêu thụ j là điểm đến. Gọi c_{ij} là cước phí vận chuyển một đơn vị hàng hóa từ điểm xuất phát i đến điểm đến j.
- Yêu cầu: lập kế hoạch vận chuyển hàng hóa từ điểm xuất phát tới điểm tiêu thụ sao cho tổng chi phí vận chuyển là nhỏ nhất.

*** Phân tích mô hình toán:**

- Ta đặt x_{ij} là lượng hàng hóa vận chuyển từ điểm xuất phát i đến điểm j; Vậy tổng chi phí vận chuyển là: $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$ mong muốn tổng chi phí này nhỏ nhất.
- Các điều kiện đã cho ta biểu diễn dưới dạng:
  - $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i$ là lượng hàng hóa vận chuyển khỏi kho thứ i
  - $\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = b_j$ là lượng hàng hóa chuyển đến nơi tiêu thụ
  - Vì x_{ij} là lượng hàng hóa nên $x_{ij} \geq 0$
  - Ngoài ra để cân bằng xuất nhập nên $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$

Tổng hợp các phân tích trên ta có mô hình bài toán:

$$\langle 1\rangle f(x) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \rightarrow \min$$

$$\langle 2\rangle \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = b_j \\ \sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \end{cases}$$

$$\langle 3\rangle x_{ij} \geq 0, i = 1:m, j = 1:n$$

❖ **Bài tập ví dụ:**

Có hai địa phương A_1 và A_2 chuyên cung cấp cà phê cho 3 công ty xuất khẩu B_1, B_2, B_3. Biết khả năng cung cấp của 2 địa phương A_1 là 150T và A_2 là 250T. Yêu cầu xuất khẩu của công ty B_1 là 100T, B_2 là 130T, B_3 là 170T cước phí vận chuyển (x1000đ/T) từ nơi cung cấp đến nơi nhận được cho theo bảng:

Tiêu thụ / Cung cấp	B_1 100T	B_2 130T	B_3 170T
A_1 150T	12	16	28
A_2 250T	20	31	15

Hãy lập kế hoạch vận chuyển sao cho chi phí vận chuyển là thấp nhất

Bài làm:

– Ta đặt x_{ij} là lượng hàng hóa vận chuyển từ điểm xuất phát i đến điểm j; Vậy tổng chi phí vận chuyển là: $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$ mong muốn tổng chi phí này nhỏ nhất.

$$\langle 1\rangle f(x) = 12x_{11} + 16x_{12} + 28x_{13} + 20x_{21} + 31x_{22} + 15x_{23} \rightarrow \min$$

$$\langle 2\rangle \begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} = 150 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 250 \\ x_{11} + x_{21} = 100 \\ x_{12} + x_{22} = 130 \\ x_{13} + x_{23} = 170 \end{cases}$$

$$\langle 3\rangle x_{ij} \geq 0, i = 1:2, j = 1:3$$

Kết quả giải:

X11	X12	X13	X21	X22	X23	F(x)
20.0	130.0	0.0	80.0	0.0	170.0	6470