TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM KỸ THUẬT TP.HCM
KHOA CƠ KHÍ CHẾ TẠO MÁY
BỘ MÔN CÔNG NGHỆ CHẾ TẠO MÁY

ĐỀ THI CUỐI KỲ HỌC KỲ I NĂM HỌC 2016-2017
Môn: TỐI ƯU HÓA TRONG KỸ THUẬT
Mã môn học: OTTE322925
Đề số/Mã đề: 01   Đề thi có: 01 trang.
Thời gian: 60 phút.
Được sử dụng tài liệu (trừ máy vi tính)

Câu 1: Chuyển bài toán gốc P sang bài toán đối ngẫu D (1,5 điểm)

Cho bài toán gốc P

$$\langle 1\rangle Z_p = 7x_1 + x_2 + 18x_3 \to Max$$

$$\langle 2\rangle \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 15 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 \le 6 \\ x_1 + 2x_2 + 7x_3 \ge 13 \end{cases}$$

$$\langle 3\rangle x_1 \le 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3\ tùy ý$$

Câu 2: Giải bài toán quy hoạch tuyến tính sau: (2,5 điểm)

$$\langle 1\rangle Z = x_1 + 2x_2 \to \min$$

$$\langle 2\rangle \begin{cases} 3x_1 + x_2 \ge 18 \\ x_1 + 2x_2 \ge 16 \\ x_2 \le 15 \end{cases}$$

$$\langle 3\rangle x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$$

Câu 3: Lập mô hình toán và giải bài toán quy hoạch tuyến tính (6 điểm)

Một xí nghiệp sản xuất 3 loại bánh: bánh đậu xanh, bánh thập cẩm và bánh dẻo. Để sản xuất 3 loại bánh trên, xí nghiệp cần có các loại nguyên liệu: đường, đậu xanh, bột, lạp xưởng,… Tại thời điểm đó xí nghiệp chỉ chuẩn bị được 300kg đường và 500kg đậu xanh, còn các nguyên liệu khác muốn bao nhiêu cũng có.

Biết rằng: lượng đường, lượng đậu xanh dùng để sản xuất ra 1 chiếc bánh mỗi loại, cũng như tiền lãi thu được khi bán 1 chiếc bánh mỗi loại được cho trong bảng dưới đây:

Sản phẩm / Nguyên liệu	Bánh đậu xanh (x_1)	Bánh thập cẩm(x_2)	Bánh dẻo (x_3)
Đường (300 kg)	2	5	6
Đậu xanh (500kg)	4	8	7
Lãi/1 bánh	5 (tr)	8 (tr)	4 (tr)

Hãy lập kế hoạch sản xuất các loại bánh sao cho tổng tiền lãi thu về lớn nhất; đồng thời đường phải được sử dụng hết.

Ghi chú: Cán bộ coi thi không được giải thích đề thi.

Chuẩn đầu ra của học phần (về kiến thức)	Nội dung kiểm tra
[G1.1] Có hiểu biết và có khả năng sử dụng các kiến thức cơ bản về toán cao cấp, vật lývà khoa học tự vào tính toán tối ưu bài toán kinh tế-kỹ thuật	Câu 1, câu 2
[G1.2] Phát hiện và mô hình hóa và giải được các tình huống tối ưu kinh tế- kỹ thuật [G2.1] Phát hiện, phân tích, lập luận, tính toán tối ưu, đánh giá và hiệu chỉnh tình huống thực tế liên qua đến ngành chế tạo máy	Câu 3

ĐÁP ÁN

Câu 1: CHUYỂN BÀI TOÁN GỐC (P) SANG BÀI TOÁN ĐỐI NGẪU (D)

		x_1	x_2	x_3		
		≤ 0	≥ 0	*tùyý*		
y_1	*tùyý*	2	2	1	$=$	15
y_2	$\geq$	2	1	-2	$\leq$	6
y_3	$\leq$	1	2	7	$\geq$	13
		$\leq$	$\geq$	$=$		
		7	1	18		

$$\langle 1\rangle\; Z_D = 15y_1 + 6y_2 + 13y_3 \rightarrow Min$$

$$\langle 2\rangle \begin{cases} 2y_1 - 2y_2 + y_3 \leq 7 \\ 2y_1 + y_2 + 2y_3 \geq 1 \\ y_1 - 2y_2 - 4y_3 = 18 \end{cases}$$

$$\langle 3\rangle\; (y_1\, tùyý,\; y_2 \geq 0,\; y_3 \leq 0$$

Câu 2: GIẢI BÀI TOÁN QHTT BẰNG PHƯƠNG PHÁP ĐỒ THỊ

- Bước 1: Vẽ miền chấp nhận

Như hình vẽ và có miền chấp nhận là X_1ABCY

- Bước 2: Vẽ đường đồng mức

Như hình vẽ

- Bước 3: Tìm nghiệm tối ưu

Tịnh tiến đường đồng mức ra xa gốc tọa độ thấy đường đồng mức tiếp xúc với miền chấp nhận tại cạnh AB. Do vậy bài toán có vô số phương án thuộc đoạn AB và chọn một phương án tối ưu, giá trị tối ưu là $Z^* = 16$

Câu 3: LẬP MÔ HÌNH TOÁN VÀ GIẢI BÀI TOÁN QHTT (6 điểm)

1. Lập mô hình toán (2 điểm)

Gọi x_1 là bánh đậu xanh, x_2 là bánh thập cẩm, x_3 là bánh dẻo

① Hàm mục tiêu: Để lãi thu về lớn nhất nghĩa là: $Z = 5x_1 + 8x_2 + 4x_3 \to \max$

② Hàm ràng buộc:

- Lượng đường để sản xuất các loại bánh phải được sử dụng hết nghĩa là: $2x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 300$
- Lượng đậu xanh để sản xuất các loại bánh không vượt quá số xí nghiệp đã chuẩn bị được (500kg) nghĩa là: $4x_1 + 8x_2 + 7x_3 \le 500$

③ Ràng buộc phụ: vì x_1, x_2, x_3 là lượng bánh mỗi loại cần sản xuất nên phải ≥ 0

Tổng hợp các phân tích ta có mô hình toán là:

$$\begin{aligned}&\langle 1\rangle Z = 5x_1 + 8x_2 + 4x_3 \to \max\\&\langle 2\rangle \begin{cases}2x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 300\\4x_1 + 8x_2 + 7x_3 \le 500\end{cases}\\&\langle 3\rangle x_j \ge 0,\ j = 1 \div 3\end{aligned}$$

2. Giải bài toán QHTT bằng phương pháp thử lần lượt (4 điểm)

❖ **Chuyển bài toán về dạng chính tắc**:

$$\begin{aligned}&\langle 1\rangle Z = 5x_1 + 8x_2 + 4x_3 + 0x_4 \to \max\\&\langle 2\rangle \begin{cases}2x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 300\\4x_1 + 8x_2 + 7x_3 + 1x_4 = 500\end{cases}\\&\langle 3\rangle x_j \ge 0,\ j = 1 \div 4\end{aligned}$$

❖ **Chọn biến cơ sở**: Hệ ràng buộc có 2PT, theo định lý 4 sẽ có 2 nghiệm dương, nên chọn biến cơ sở là: (x_1; x_2; 0; 0)

❖ **Tìm nghiệm xuất phát**: thay biến cơ sở vào ràng buộc ta có:

$\begin{cases}2x_1 + 5x_2 = 300\\4x_1 + 8x_2 = 500\end{cases}$ giải phương trình ta được $x_1^0 = 25$ hệ $x_2^0 = 50$

Vậy nghiệm xuất phát là: x = (25;50;0;0) và giá trị hàm mục tiêu **$Z_0 = 525$**

❖ **Thử đưa x_3 vào biến cơ sở**(x_1; x_2; x_3; 0); thay biến cơ sở vào ràng buộc ta có hệ PT

$\begin{cases}2x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 300\\4x_1 + 8x_2 + 7x_3 = 500\end{cases}$ hệ có 2 PT mà 3 ẩn; Hệ có nghiệm đơn trị khi phương trình tạo thành hệ phụ thuộc do cột cuối cùng phụ thuộc tuyến tính vào cột còn lại; Nên chuyển thành hệ tương đương với hệ số y ta có hệ PT: $\begin{cases}2y_1 + 5y_2 = 6\\4y_1 + 8y_2 = 7\end{cases}$ giải hệ ta được $y_1^0 = -3,25$; $y_2^0 = 2,5$

Tính hiệu suất của x_3 là: $C_3 - \gamma_3 = 4 - (5.(-3,25) + 8.2,5) = 0,25 > 0$

- C_3 là hệ số của x_3 trên hàm mục tiêu = 4
- $\gamma_3 = c_1.y_1 + c_2.y_2 = 5.(-3,25) + 8.2,5 = 3.75$

Bài toán $Z \to \max$ mà hiệu suất của $x_3 > 0$; Do vậy đưa x_3 vào có lợi, nhận x_3

- Xét hệ số $\lambda_i = \frac{x_i^0}{y_i^0}$; $\lambda_1 = \frac{x_1^0}{y_1^0} = \frac{25}{-3,25} \approx -7,7$; $\lambda_2 = \frac{x_2^0}{y_2^0} = \frac{50}{2,5} = 20$ ta thấy $\lambda_2 > 0$ và bé nhất, do vậy loại x_2 khỏi biến cơ sở; Biến cơ sở mới là (x_1; 0; x_3; 0;)

- Thay biến cơ sở vào ràng buộc ta có $\begin{cases} 2x_1 + 6x_3 = 300 \\ 4x_1 + 7x_3 = 500 \end{cases}$ giải phương trình ta được $x_1^0 = 90$, $x_3^0 = 20$ và giá trị hàm mục tiêu $Z_1 = 5.90 + 4.20 = 530$
- Số gia $\Delta Z = Z_1 - Z_0 = 530 - 525 = 5$

❖ Thử đưa x_4 vào biến cơ sở (x_1; 0; x_3; x_4); thay biến cơ sở vào ràng buộc ta có hệ PT ta có hệ PT: $\begin{cases} 2x_1 + 6x_3 + 0x_4 = 300 \\ 4x_1 + 7x_3 + 1x_4 = 500 \end{cases}$ hệ có 2 PT mà 3 ẩn. Hệ có nghiệm đơn trị khi phương trình tạo thành hệ phụ thuộc do cột cuối cùng phụ thuộc tuyến tính vào cột còn lại; Nên chuyển thành hệ tương đương với hệ số y ta có hệ PT: $\begin{cases} 2y_1 + 6y_3 = 0 \\ 4y_1 + 7y_3 = 1 \end{cases}$ giải hệ ta được $y_1^0 = 0{,}6$; $y_3^0 = -0{,}2$

Tính hiệu suất của x_4 là: $C_4 - \gamma_4 = 0 - (5.0{,}6 + 4.(-0{,}20)) = -2{,}2 < 0$

Bài toán $Z \rightarrow \max$ mà hiệu suất của $x_4 < 0$; Do vậy đưa x_4 vào không có lợi, loại x_4

❖ **Kết luận**: vậy phương án sản xuất tối ưu là 90 bánh đậu xanh và 20 bánh dẻo; không sản xuất bánh thập cẩm. Như vậy sẽ thu được lợi nhuận lớn nhất là 530 (tr)

TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM KỸ THUẬT TP. HCM
KHOA CƠ KHÍ CHẾ TẠO MÁY
BỘ MÔN CÔNG NGHỆ CHẾ TẠO MÁY

MÔN THI: TỐI ƯU HÓA
MÃ MÔN HỌC: 1125160
HỌC KỲ I NĂM HỌC 2014 - 2015
ĐỀ SỐ: 01 ĐỀ THI CÓ 02 TRANG
THỜI GIAN LÀM BÀI: 60 PHÚT
KHÔNG SỬ DỤNG TÀI LIỆU

Câu 1: Lập mô hình toán (2điểm)

Có 3 loại thức ăn được dùng trong chăn nuôi là I, II, III. Thành phần dinh dương cơ bản trong 3 loại thức ăn gồm: đường, chất béo và chất đạm. Mức độ yêu cầu về thành phần dinh dưỡng trong 1 ngày đêm, hàm lượng dinh dưỡng trong 1 đơn vị trong mỗi loại thức ăn và đơn giá từng loại thức ăn cho ở bảng sau:

Yêu cầu về các chất dinh dưỡng/ 1 ngày đêm	Hàm lượng chất dinh dưỡng/ 1 đơn vị thức ăn		
	I	II	III
Đường ≥ 20	0,3	0,8	2,0
Chất béo ≤ 10	3,0	0	0,4
Chất đạm ≥ 15	0	10	0
Giá mua 1 đơn vị thức ăn	800	1500	3000

Lập kế hoạch mua thức ăn cho một khẩu phần sao cho vừa đảm bảo chất dinh dưỡng theo yêu cầu mà giá thành khẩu phần thức ăn thấp nhất.

Câu 2: Lập mô hình bài toán đa mục tiêu (3 điểm)

Một xí nghiệp dự kiến sản xuất ba sản phẩm mới A, B, C. Giám đốc quan tâm tới 3 mục tiêu chính là: lợi nhuận, lao động, vốn đầu tư cụ thể như sau:

1. Cần đạt được lợi nhuận tối thiểu là 125 triệu đồng từ các sản phẩm mới này
2. Sử dụng lao động không được vượt quá 4000 người
3. Vốn đầu tư không được vượt quá 55 triệu đồng

Giám đốc này nhận thấy không có khả năng đạt đồng thời ba mục tiêu nêu ra, vì vậy ông quyết định các hệ số phạt như sau:

- Hệ số phạt 4 trên 1 triệu đồng lợi nhuận thấp hơn mức quy định
- Hệ số phạt 3 trên 100 lao động phải sử dụng thêm vượt quy định
- Hệ số phạt 3 trên 1 triệu đồng vốn đầu tư phải tăng thêm so với quy định

Mức lợi nhuận, số lao động và vốn đầu tư trên một sản phẩm được cho theo bảng sau:

Mục tiêu	Sản phẩm			Mức mục tiêu	Hệ số phạt
	A	B	C		
Lợi nhuận	12	9	15	≥ 125	4
Lao động	5	3	4	≤ 40 (x100)	3
Vốn đầu tư	5	7	8	≤ 55	3

Hãy lập mô hình bài toán đa mục tiêu thành một mục tiêu chung là tổng lượng vi phạm là nhỏ nhất.

Câu 3: Giải bài toán quy hoạch tuyến tính sau bằng phương pháp đồ thị (2 điểm)

$$\langle 1\rangle Z = 2x_1 + x_2 \to \max$$

$$\langle 2\rangle \begin{cases} x_1 + x_2 \geq 2 \\ 6x_1 + 4x_2 \leq 36 \\ 4x_1 + 2x_2 \leq 20 \end{cases}$$

$$\langle 3\rangle x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

Câu 4: Giải bài toán QHTT sau bằng phương pháp thử lần lượt (3 điểm)

$$\langle 1\rangle Z = x_1 - x_2 + 6x_3 + 2x_4 \to \max$$

$$\langle 2\rangle \begin{cases} x_1 - x_2 + 7x_3 + x_4 = 50 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 10x_4 = 400 \end{cases}$$

$$\langle 3\rangle x_j \geq 0, j = 1:4$$

ĐÁP ÁN

BÀI 1. LẬP MÔ HÌNH TOÁN (Bài toán pha trộn)

Đặt x_j lần lượt là số lượng đơn vị thức ăn I (j=1), II (j=2), III (j=3) cần mua.

① Hàm mục tiêu: Để giá thành khẩu phần thức ăn thấp nhất nghĩa là:

$$800x_1 + 1500x_2 + 3000x_3 \to min$$

② Hàm ràng buộc:

- Để lượng đường trong khẩu phần thức ăn ≥ 20 nghĩa là: $0,3x_1 + 0,8x_2 + 2x_3 \geq 20$
- Để lượng chất béo trong khẩu phần thức ăn ≤ 10 nghĩa là:
$$3x_1 + 0,4x_3 \leq 10$$
- Để lượng chất đạm trong khẩu phần thức ăn ≥ 15 nghĩa là: $10x_2 \geq 15$

③ Ràng buộc phụ: vì x_j là số lượng thức ăn nên $x_j \geq 0$, $j = 1 \div 3$

Tổng hợp các phân tích trên ta có mô hình toán:

①$800x_1 + 1500x_2 + 3000x_3 \to min$

②$\begin{cases} 0,3x_1 + 0,8x_2 + 2x_3 \geq 20 \\ 3x_1 + 0,4x_3 \leq 10 \\ 10x_2 \geq 15 \end{cases}$

③$x_i \geq 0 \quad , i = 1 \div 3$

BÀI 2. LẬP MÔ HÌNH BÀI TOÁN ĐA MỤC TIÊU

- Đặt x_1, x_2, x_3, lần lượt là sản phẩm A, B, C muốn sản xuất. Vậy các mục tiêu trên có thể diễn đạt như sau:

  Lợi nhuận: $12x_1 + 9x_2 + 15x_3 \geq 125$

  Lao động: $5x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 40$

  Vốn đầu tư: $5x_1 + 7x_2 + 8x_3 \leq 55$
- Đặt Z là lượng phạt do vi phạm các mục tiêu quy định. Với các hệ số phạt đã cho thì mục tiêu tổng thể là tìm x_1, x_2, x_3 sao cho $Z \to min$
- Để tiện cho nghiên cứu ta đưa biến phụ y_1, y_2, y_3 vào như sau :

  $y_1 = 12x_1 + 9x_2 + 15x_3 - 125$

  $y_2 = 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 40$

  $y_3 = 5x_1 + 7x_2 + 8x_3 – 55$
- Do y_i có thể dương có thể âm, nên ta đặt $y_1 = y_1^+ - y_1^-; y_2 = y_2^+ - y_2^-; y_3 = y_3^+ - y_3^-$ với $y_i^+, y_i^- \geq 0; i = 1 \div 3$
- Quan hệ trên cho thấy y_i^+ biểu thị phần dương của biến y_i dấu (+) và y_i^- biểu thị phần âm của biến y_i dấu (-)
- Với biến phụ này ta lập hàm mục tiêu như sau:

  $Z = 4y_1^- + 3y_2^+ + 3y_3^+ \to min$
- Để chuyển bài toán quy hoạch nhiều mục tiêu thành một mục tiêu, ta cần phải đưa biến phụ vào các ràng buộc như sau:

  $y_1 = y_1^+ - y_1^- = 12x_1 + 9x_2 + 15x_3 – 125$ hay $12x_1 + 9x_2 + 15x_3 – (y_1^+ - y_1^-) = 125$

  $y_2 = y_2^+ - y_2^- = 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 – 40$ hay $5x_1 + 3x_2 + 4x_3 – (y_2^+ - y_2^-) = 40$

$y_3 = y_3^+ - y_3^- = 5x_1 + 7x_2 + 8x_3 - 55$ hay $5x_1 + 7x_2 + 8x_3 - (y_3^+ - y_3^-) = 55$

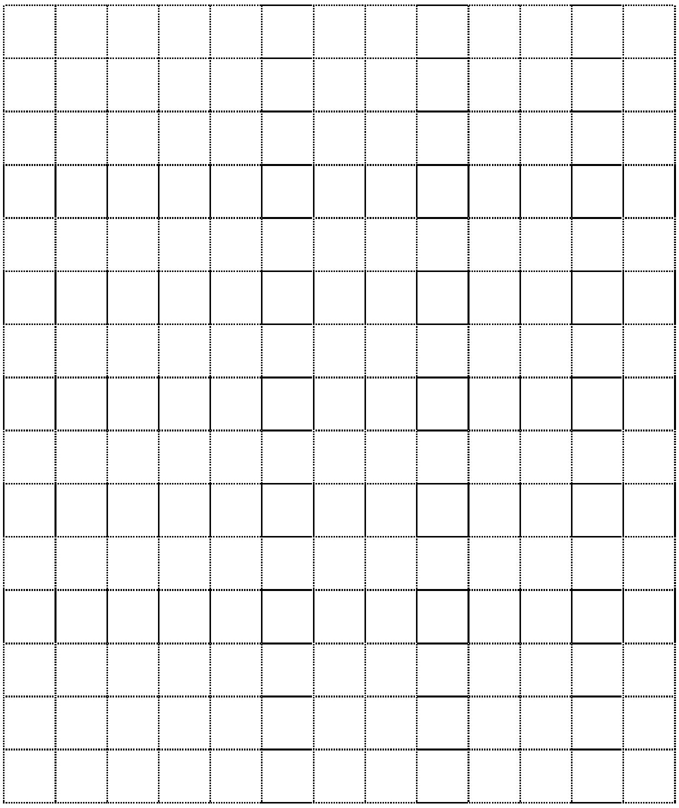
- Tổng hợp các phân tích trên ta được bài toán một mục tiêu như sau :

$$(1) Z = 5y_1^+ + 5y_1^- + 2y_2^+ + 4y_2^- + 3y_3^+ + 3y_3^- \to \min$$

$$(2)\begin{cases} 12x_1 + 9x_2 + 15x_3 - (y_1^+ - y_1^-) = 125 \\ 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 - (y_2^+ - y_2^-) = 40 \\ 5x_1 + 7x_2 + 8x_3 - (y_3^+ - y_3^-) = 55 \end{cases}$$

$$(3) x_j \geq 0, y_i^+ \geq 0, y_i^- \geq 0; j = 1 \div 3; i = 1 \div 3$$

BÀI 3. GIẢI BÀI TOÁN QHTT BẰNG PHƯƠNG PHÁP ĐỒ THỊ



- Bước 1: Vẽ miền chấp nhận

Như hình vẽ và có miền chấp nhận là ABCDE

- Bước 2: Vẽ đường đồng mức

Như hình vẽ

- Bước 3: Tìm nghiệm tối ưu

Tịnh tiến đường đồng mức ra xa gỗ tọa độ thấy đường đồng mức tiếp xúc với miền chấp nhận là cạnh DE. Do vậy bài toán có vô số phương an và chọn một phương án nằm trên canh cạnh DE

BÀI 4. GIẢI BÀI TOÁN QHTT BẰNG PHƯƠNG PHÁP ĐƠN HÌNH

$$\langle 1 \rangle Z = x_1 - x_2 + 6x_3 + 2x_4 \to \max$$

$$\langle 2 \rangle \begin{cases} x_1 - x_2 + 7x_3 + x_4 = 50 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 10x_4 = 400 \end{cases}$$

$$\langle 3 \rangle x_j \geq 0, j = 1:4$$

❖ Chọn biến cơ sở: Hệ ràng buộc có 2PT, theo định lý 4 sẽ có 2 nghiệm dương, nên biến cơ sở là: $(x_1, x_2, 0, 0)$

❖ Tìm nghiệm xuất phát: thay biến cơ sở vào ràng buộc ta có:

$\begin{cases} x_1 - x_2 = 50 \\ 2x_1 + 3x_2 = 400 \end{cases}$ giải hệ phương trình ta được $x_1^0 = 110$, $x_2^0 = 60$,

Vậy nghiệm xuất phát là: x = (110,60,0,0) và giá trị hàm mục tiêu $Z_0 = 110 - 50 = 60$

❖ Thử đưa x_3 vào cơ sở ta có hệ PT ràng buộc:

$\begin{cases} x_1 - x_2 + 7x_3 = 50 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 400 \end{cases}$ hệ có 2 PT mà 3 ẩn; Hệ có nghiệm đơn trị khi phương trình tạo thành hệ phụ thuộc do cột cuối cùng phụ thuộc tuyến tính vào cột còn lại; Nên chuyển thành hệ tương đương với hệ số y

$$\begin{cases} y_1 - y_2 = 7 \\ 2y_1 + 3y_2 = -1 \end{cases}$$ giải hệ ta được $y_1^0 = 4$, $y_2^0 = -3$

Hiệu suất của x_3 là: $\gamma_3 = 1.4 - 1.(-3) = 7$

$C_3 - \gamma_3 = 6 - 7 = -1 < 0$

Do vậy đưa x_3 vào không có lợi

❖ Thử đưa x_4 vào cơ sở ta có hệ PT ràng buộc:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_4 = 50 \\ 2x_1 + 3x_2 + 10x_4 = 400 \end{cases}$$ hệ có 2 PT mà 3 ẩn. Hệ có nghiệm đơn trị khi phương trình tạo thành hệ phụ thuộc do cột cuối cùng phụ thuộc tuyến tính vào cột còn lại; Nên chuyển thành hệ tương đương với hệ số y

$$\begin{cases} y_1 - y_2 = 1 \\ 2y_1 + 3y_2 = 10 \end{cases}$$ giải hệ ta được $y_1^0 = 13/5$, $y_2^0 = 8/5$

Hiệu suất của x_4 là: $\gamma_4 = 1.13/5 - 1.8/5 = 1$

$C_4 - \gamma_4 = 2 - 1 = 1 > 0$

Bài toán $Z \rightarrow \max$, hiệu suấ của $x_4 > 0$; Do vậy đưa x_4 vào có lợi

Xét hệ số λ: - $\lambda_1 = \frac{x_1^0}{y_1^0} = \frac{110.5}{13} = \frac{550}{13}$

- $\lambda_2 = \frac{x_2^0}{y_2^0} = \frac{60.5}{8} = \frac{300}{8}$

$\lambda_1 > \lambda_2 > 0$ do vậy loại x_2 và biến cơ sở mới là $x = (x_1, 0, 0, x_4)$; thay biến cơ sở mới vào ràng buộc ta được $\begin{cases} x_1 + x_4 = 50 \\ 2x_1 + 10x_4 = 400 \end{cases}$ giải hệ phương trình ta được: $x_1 = 12{,}5$; $x_4 = 37{,}5$ và giá trị hàm mục tiêu $Z_1 = 12{,}5 + 2.37{,}5 = 87{,}5$

$\Delta Z = Z_1 - Z_0 = 87{,}5 - 50 = 27{,}5$

❖ Kết luận: vậy phương án tối ưu là : $x^* = (12{,}5; 0; 0; 37{,}5)$ và giá trị tối ưu là $Z_{x^*} = 87{,}5$