University of Technology and Education

Faculty of Electrical & Electronic Engineering

Lecture:

IMAGE PROCESSING

Chapter 3:

Image Transforms

Nguyen Thanh Hai, PhD

Image Transform

Image transforms

- **Fourier**
- **Cosine**
- **Wavelet**
- Unique
- Sine
- Hartley
- Hadamard
- Harr
- Daubechies
- Karhunen-loeve
- Slant
- Hotelling

Image Transform

Applications of the Fourier Transform

This section presents a few of the many image processing-related applications of the Fourier transform.

Frequency Response of Linear Filters

Fast Convolution

A key property of the Fourier transform is that the multiplication of two Fourier transforms corresponds to the convolution of the associated spatial functions. This property, together with the fast Fourier transform, forms the basis for a fast convolution algorithm.

Locating Image Features

The Fourier transform can also be used to perform correlation, which is closely related to convolution. Correlation can be used to locate features within an image; in this context correlation is often called *template matching*.

- Image Processing Toolbox, Matlab, page 8-3

Fourier Transform

Introduction

- Fourier Transform (FT): an image is transformed to consider in the frequency domain. One can use the FT in filtering image or others

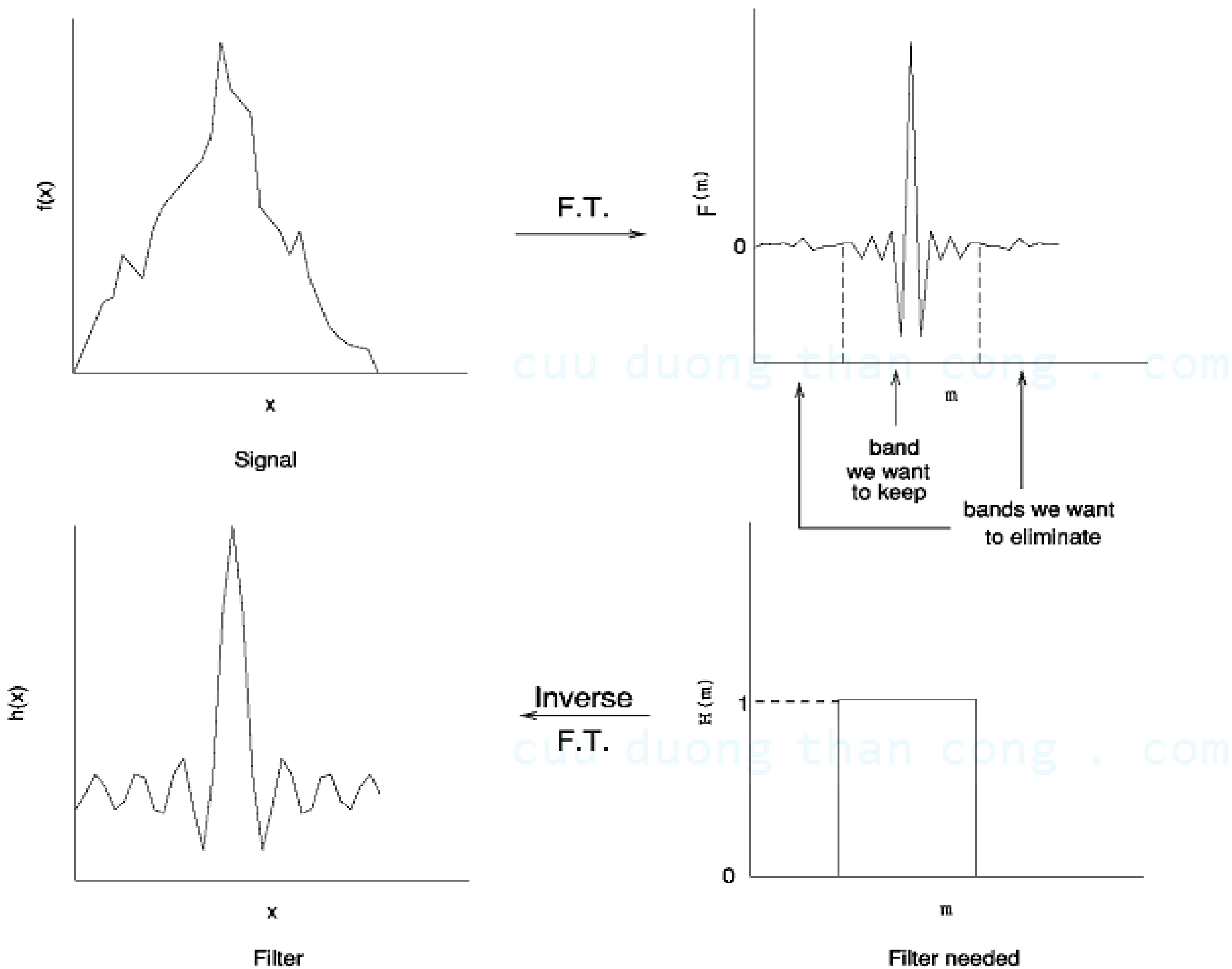
- FT of two-dimensional (2D)

- Properties of Discrete Fourier Transform

- Applications

University of Technology and Education
Faculty of Electrical & Electronic Engineering

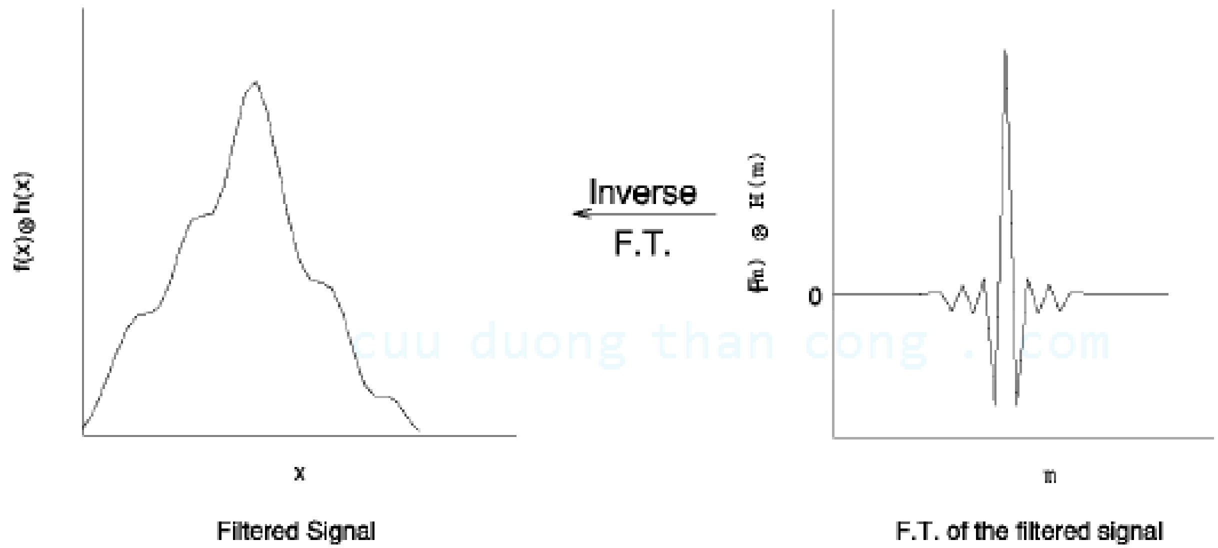
Fourier Transform



Top row: a signal and its Fourier transform. Middle row: the unit sample response function of a filter on the left, and the filter's system function on the right

Nguyen Thanh Hai, PhD.

Fourier Transform



Bottom row: On the left the filtered signal that can be obtained by convolving the signal at the top with the filter in the middle. On the right the Fourier transform of the filtered signal obtained by multiplying the Fourier transform of the signal at the top, with the Fourier transform (system function) of the filter in the middle

Fourier Transform

Introduction and Overview

- Fourier Transform (FT): a signal in time transformed to consider it in frequency domain.

- FTs of one-dimensional (1D) and two-dimensional (2D), and their applications

One-Dimensional Continuous Fourier Transform (1D FT)

One-Dimensional Fourier Transform (1D FT): Assume that a 1D continuous signal in time $g(t)$. The FT of this continuous signal is defined as follows:

$$G(f) = FT\{g(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) e^{-j2\pi ft} dt \qquad (2.1)$$

in which f is the frequency variable in units such as Hertz and j is an imaginary number ($j^2 = -1$). One also presents a complex function

University of Technology and Education
Faculty of Electrical & Electronic Engineering

Fourier Transform

One-Dimensional Continuous Fourier Transform (cont.)

$$G(f) = |G(f)| e^{j\angle G(f)} \qquad (2.2)$$

where $|G(f)|$ is the amplitude of $G(f)$ and $e^{j\angle G(f)}$ is the phase of $G(f)$

Calculate the signal in the time domain by the inverse FT

$$g(t) = IFT\{G(f)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} G(f) e^{j2\pi ft} df \qquad (2.3)$$

Example 2.1: Consider an exponentially decaying signal

$$g(t) = e^{-t},\ t \geq 0$$

Nguyen Thanh Hai, PhD.

Fourier Transform

Example: Consider an exponentially decaying signal (cont.)

$$G(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

$$= \int_{0}^{+\infty} e^{-t} e^{-j2\pi ft} dt$$

$$= \left[-\frac{1}{1+j2\pi f} e^{-(1+j2\pi f)t} \right]_{t=0}^{t=+\infty} \qquad (2.4)$$

$$= (0) - \left(-\frac{1}{1+j2\pi f} \right)$$

$$= -\frac{1}{1+j2\pi f}$$

Calculate the magnitude and phase of $G(f)$

$$|G(f)| = \frac{1}{|1+j2\pi f|} = \frac{1}{1+(2\pi f)^2} \qquad (2.5)$$

and

$$\angle G(f) = -\angle(1+j2\pi f) = -\tan^{-1}(2\pi f) \qquad (2.6)$$

University of Technology and Education
Faculty of Electrical & Electronic Engineering

Fourier Transform

Fourier Transform of Some Physical Function

Consider function $\delta_\Delta(t)$ as shown in Figure 2.1

Energy of this signal is the duration multiplied by the height of the pulse and always 1 $(\Delta * 1/\Delta = 1)$

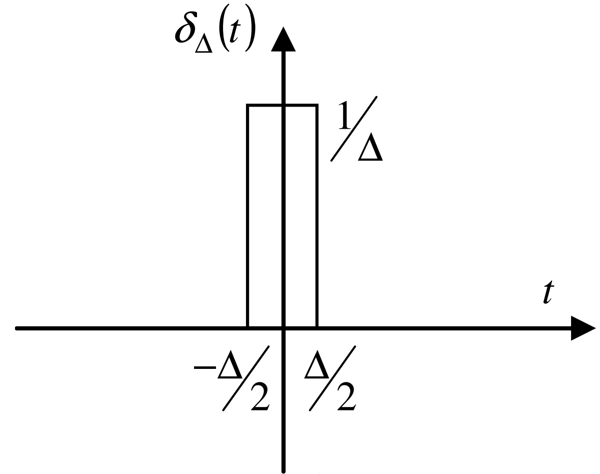


Fig. 2.1: The $\delta_\Delta(t)$ function

Define the impulse function as follows:

$$\delta(t) = \lim_{\Delta \to 0} \delta_\Delta(t) \qquad (2.7)$$

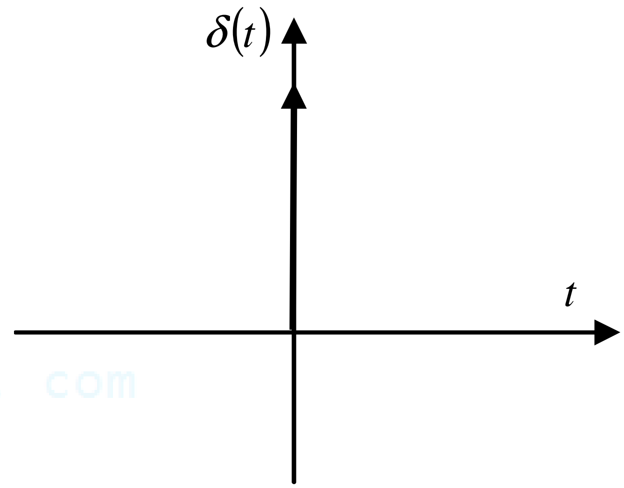


Fig. 2.2: Visual representation of an impulse function

This equation shows that the impulse function is nonzero only between 0^- and 0^+, its energy is still 1 as the below equation

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = \int_{0^-}^{0^+} \delta(t)dt = 1 \qquad (2.8)$$

Nguyen Thanh Hai, PhD.

Fourier Transform

The sampling capability of the impulse function for any the signal $g(t)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) g(t) dt = \int_{0^-}^{0^+} \delta(t) g(t) dt = g(0) \qquad (2.9)$$

The shift property of an impulse function centered at t_o as follows:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_0) dt = \int_{t^-}^{t^+} \delta(t - t_0) dt = 1 \qquad (2.10)$$

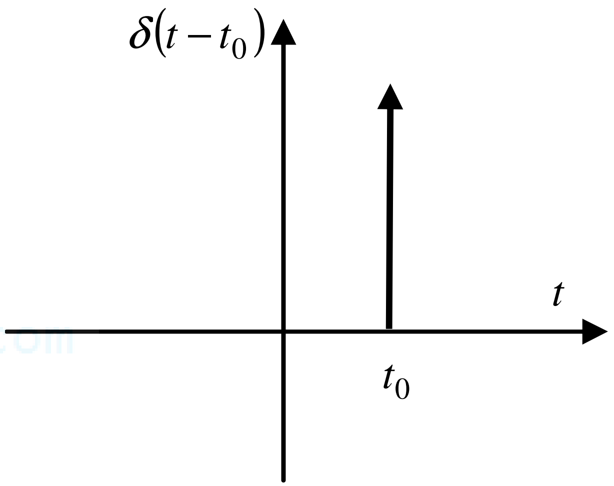


Fig. 2.3: Shifted impulse function

Using a shift function, one can sample to obtain at any time t_o as follows:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_0) g(t) dt = \int_{t^-}^{t^+} \delta(t - t_0) g(t) dt = g(t_0) \qquad (2.11)$$

Fourier Transform

Example 2.2: Calculate the FT of the impulse function

$$FT\{\delta(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-j2\pi ft} dt = e^{-j2\pi f\times 0} = 1 \qquad (2.12)$$

This unique property of the impulse function indicate us know the frequency spectrum of an impulse is flat.

Example 2.3: Consider the unit pulse $P_{\Pi}(f)$ as shown in Figure 2.4

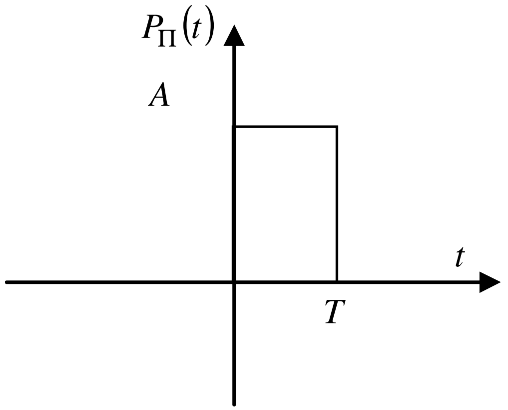


Fig. 2.4a: Unit pulse function

Calculate the FT of this unit pulse function

$$P_{\Pi}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_{\Pi}(t) e^{-j2\pi ft} dt = \int_{0}^{T} A e^{-j2\pi ft} dt = \left[-\frac{A}{j2\pi f} e^{-j2\pi ft} \right]_{t=0}^{t=T}$$

$$= -\frac{A}{j2\pi f}\left[e^{-j2\pi fT} - 1\right] = -\frac{A}{j2\pi f}\left[e^{-j\pi fT} - e^{j\pi fT}\right] e^{-j\pi fT}$$

$$= \frac{A}{\pi f}\left[\frac{e^{j\pi fT} - e^{-j\pi fT}}{2j}\right] e^{-j\pi fT} = \frac{A}{\pi f}\sin(\pi fT) e^{-j\pi fT} \qquad (2.13)$$

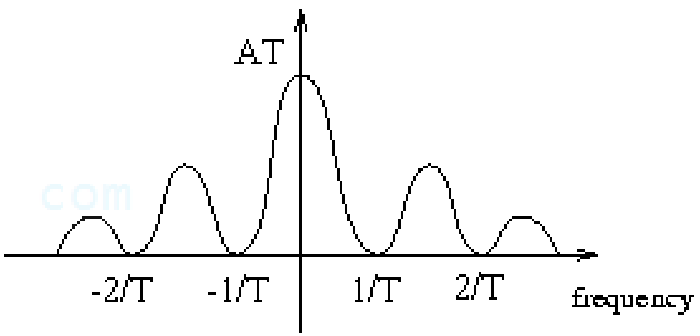


Fig. 2.4b: Fourier spectrum

Nguyen Thanh Hai, PhD.

Fourier Transform

Properties of One-Dimensional Fourier Transforms

Signal Shift

If a signal is shifted in time, the amplitude of the FT remains the same (for all frequencies)

$$FT\{g(t-t_0)\} = e^{j2\pi f t_0} G(f) \qquad (2.14)$$

From Eq. 2.1

Convolution

The FT creates an alternative method of calculating the convolution that is much less computationally intensive.

$$g_1(t) * g_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_1(t) g_2(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} g_1(t-\tau) g_2(t) d\tau \qquad (2.15)$$

Nguyen Thanh Hai, PhD.

Fourier Transform

Properties of One-Dimensional Fourier Transforms

Linear Systems Analysis

In order to see the impact of the FT on linear systems, one can describe relationship between the input $p(t)$ and output $q(t)$ and the internal characteristics of a linear system $h(t)$. The output is nothing, but the convolution between the input and the internal characteristics of the model, one has as follows:

$$q(t) = p(t) * h(t) \tag{2.16}$$

Convolution is a rather complicated process, but the FT can be used easily calculate the output of linear system, we have:

$$Q(f) = P(f) \cdot H(f) \tag{2.17}$$

Equation (2.17) is rewritten as follows:

$$H(f) = \frac{Q(f)}{P(f)} \tag{2.18}$$

Assume that the input is an impulse $p(t) = \delta(t)$, then Equation is rewritten:

$$H(f) = \frac{Q(f)}{1} = Q(f) \tag{2.19}$$

Fourier Transform

Properties of One-Dimensional Fourier Transforms

Scaling Property

An extremely useful property of the FT is the way, in which time and frequency domains are inversely scales. Its Equation is written as follows:

Assume that a signal defined as $g_1(\alpha t)$ with $\alpha > 1$, we can calculate the FT using $G(f)$ as follows:

$$FT\{g_1(t)\} = G_1(f) = \frac{1}{\alpha} G\left(\frac{f}{\alpha}\right) \qquad (2.20)$$

This equation means that a function is compressed in time, the function in the frequency domain expands with the same rate. This shows that once the width of a signal in the time domain approaches zero, its width in the frequency domain approaches infinity.

Fourier Transform

One-Dimensional Discrete Fourier Transform

Need to sample a continuous signal to preserve all information in it to describe the discrete equivalent of the continuous FT, called the discrete FT (DFT) and defined as:

$$G(k) = \sum_{n=0}^{N-1} g(n) e^{-j\frac{2\pi knT}{N}}, \quad k = 0,\ldots,N-1 \qquad (2.21)$$

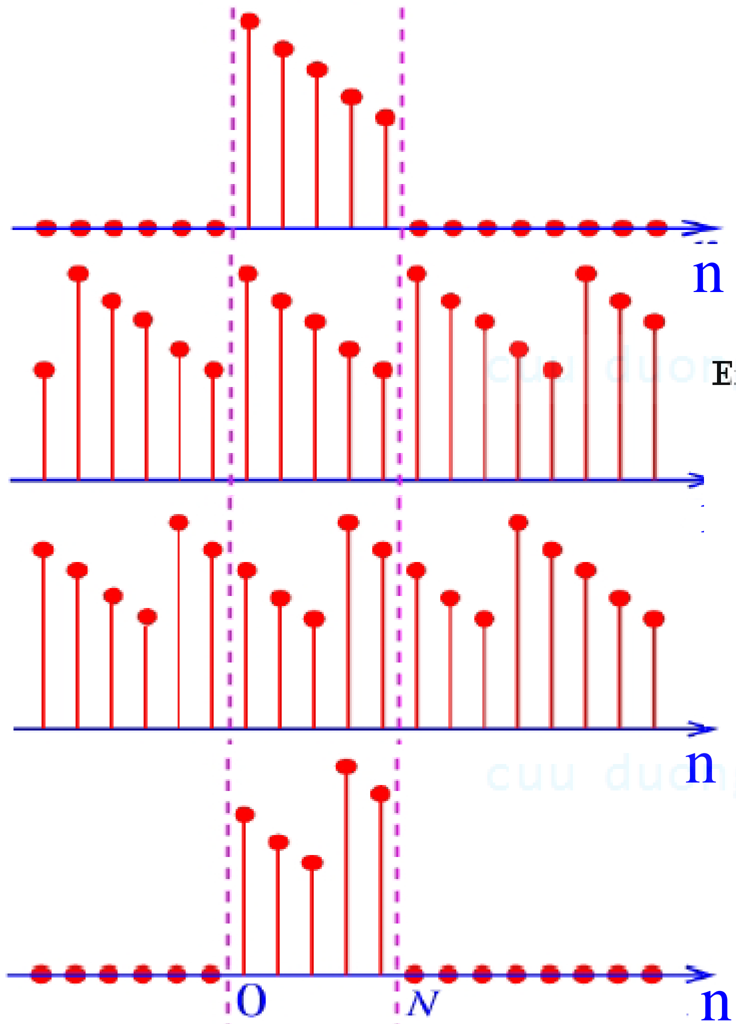
The inverse of this transform is as:

$$g(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N-1} G(k) e^{-j\frac{2\pi knT}{N}}, \quad n = 0,\ldots,N-1 \qquad (2.22)$$

Its properties of the DFT are similar to the continuous FT.

Fourier Transform

Properties of the DFT



$$x(n) = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$x_p(n) = \{\ldots 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4\}$$

$$x_p(n-2) = \{\ldots 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4\ldots\}$$

and $$x'(n) = \{3, 4, 1, 2\}$$

Examples

- $\text{SHIFT}_1([1,0,0,0]) = [0,1,0,0]$ (an impulse delayed one sample).
- $\text{SHIFT}_1([1,2,3,4]) = [4,1,2,3]$ (a circular shift example).
- $\text{SHIFT}_{-2}([1,0,0,0]) = [0,0,1,0]$ (another circular shift example).

Fig. 2.5b: Circular shift of a signal *g*(*n*-2)

Nguyen Thanh Hai, PhD.

Fourier Transform

Properties of the DFT

Fig. 2.6 shows the stretch operation. The signal will be stretched by inserting zeros between consecutive time points.

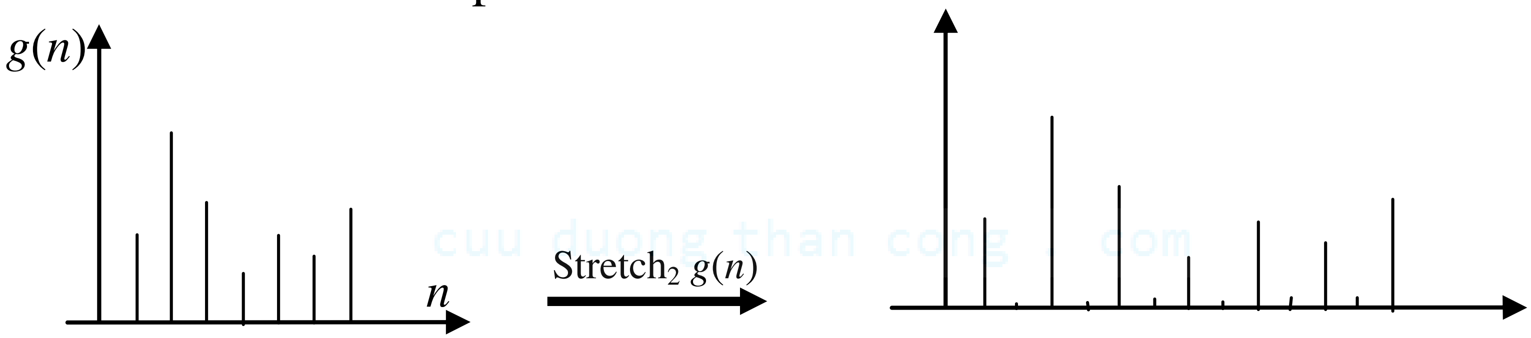


Fig. 2.6: Stretch of a signal

A stretch by factor L is defined by

$$\mathrm{STRETCH}_{L,m}(x) \triangleq \begin{cases} x(m/L), & m/L \text{ an integer} \\ 0, & m/L \text{ non-integer.} \end{cases}$$

L=2; $\mathrm{STRETCH}_2$([4,7,5,2,4,3,5]); N is a length of signal, after stretching, the length of signal is M=LN; $\mathrm{STRETCH}_2$([4,7,5,2,4,3,5])=[4,0,7,0,5,0,…]

Fourier Transform

Properties of the DFT

The repeat operation is the repeating of a signal over an entire period as in Fig. 2.7.

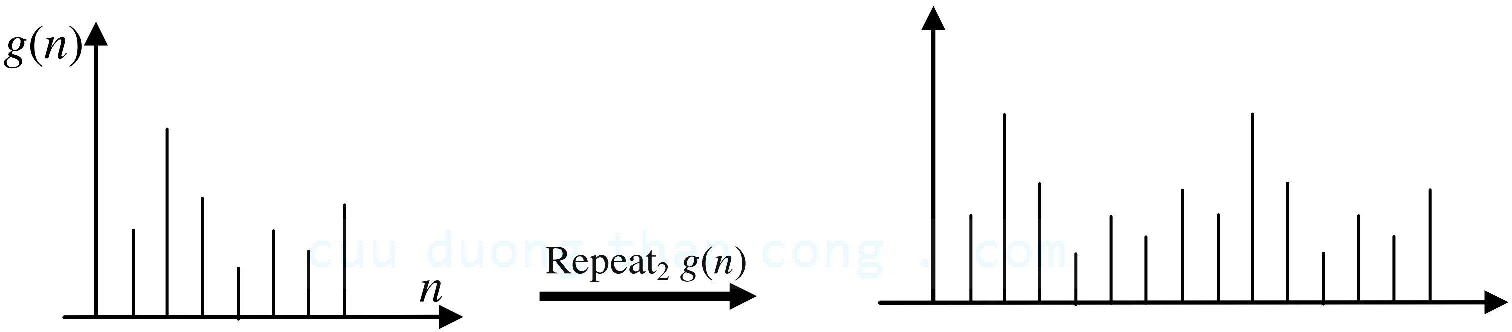


Fig. 2.7: Repeat of signal

L=2; $STRETCH_2([4,7,5,2,4,3,5])$; N is a length of signal, after stretching, the length of signal is M=LN; $STRETCH_2([4,7,5,2,4,3,5])$=[4,7,5,2,4,3,5, 4,7,5,2,4,3,5,…]

University of Technology and Education
Faculty of Electrical & Electronic Engineering

Fourier Transform

Properties of the DFT

A definition of the circular convolution for discrete signals $g_1(n)$ and $g_2(n)$ as:

$$g_1(n) * g_2(n) = \sum_{m=0}^{N-1} g_1(m) * g_2(n-m) = \sum_{m=0}^{N-1} g_1(n-m) * g_2(m) \qquad (2.23)$$

In this equation, $g_1(n-m)$ and $g_2(n-m)$ represent the m-point circular shift of $g_1(n)$ and $g_2(n)$.

According to the Fourier theory, the circular convolution is loosely equivalent to the linear convolution for continuous signals. To see this more clearly, one describes an important property of DFT as follows:

$$DFT\{g_1(n) * g_2(n)\} = DFT\{g_1(n)\} \cdot DFT\{g_2(n)\} = G_1(k) \cdot G_2(k) \qquad (2.24)$$

One of the most important property of the circular convolution can be defined as:

$$DFT\{STRETCH_1\{g(n)\}\} = REPEAT_1\{DFT\{g(n)\}\} = REPEAT_1\{G(k)\} \qquad (2.25)$$

$$STRETCH_1\{g(n)\} \overset{DFT}{\leftrightarrow} REPEAT_1\{G(k)\} \qquad (2.26)$$

Nguyen Thanh Hai, PhD.

Image Transforms

Example : Consider the time signal shown in Fig. 2.1. The DFT of this signal is shown in Fig. 2.2.

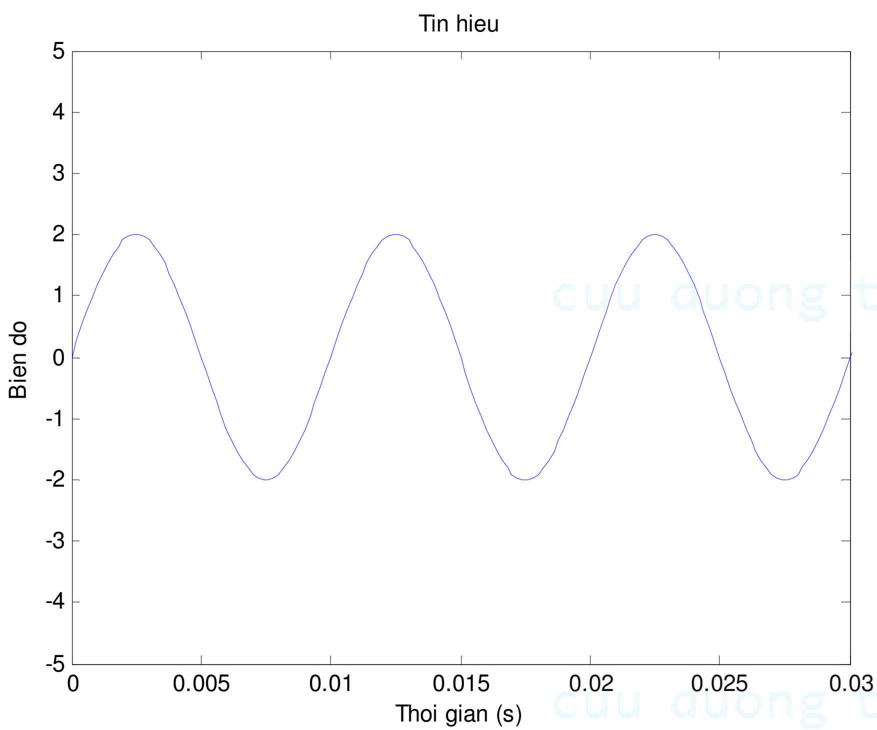


Fig. 2.1: Signal x, defined in the time domain

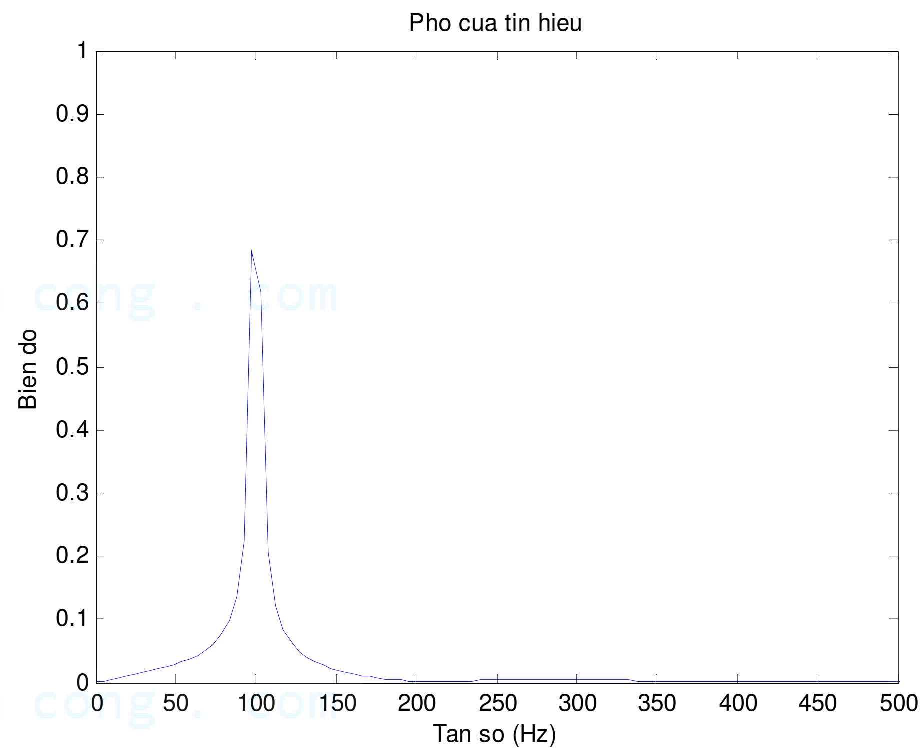


Fig. 2.2: Magnitude of the DFT of signal x

Nguyen Thanh Hai, PhD

Image Transforms

Two-Dimensional Discrete Fourier Transform

The 2D FT is a rather straightforward extension of the 1D transform. Mathematically, the 2D DFT is defined as:

$$G(u,v)=\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} g(x,y)e^{-j\frac{2\pi(ux)}{M}}e^{-j\frac{2\pi(vy)}{N}} \tag{3.1}$$

where $u=0,1,\ldots,M-1$ and $v=0,1,\ldots,N-1$ are the frequency axes, in which $G(u,v)$ is described as a Fourier image.

Image Transforms

Two-Dimensional Discrete Fourier Transform

The inverse transformation, the 2D IDFT is denoted as:

$$g(x,y)=\frac{1}{MN}\sum_{u=0}^{M-1}\sum_{v=0}^{N-1}G(u,v)e^{j\frac{2\pi(ux)}{M}}e^{j\frac{2\pi(vy)}{N}} \qquad (3.2)$$

where $x=0,1,\ldots,M-1$ and $y=0,1,\ldots,N-1$ and $g(x,y)$ is an image after inverse transform.

Image Transforms

Example of Fourier transform

$G(u,v)$ is the Fourier transformation of an image $g(x,y)$

$$G = U^T * g * V \tag{3.3}$$

Where U, V are the matrices:

$$U(x,u) = e^{-\frac{j2\pi xu}{M}}; x,u = 0 : M-1 \tag{3.4}$$

$$V(y,v) = e^{-\frac{j2\pi yv}{N}}; y,v = 0 : N-1 \tag{3.5}$$

Example of Fourier transform

If $U(x,u)=U(u,x)$ ==> $U^T=U$, *one can re-write as follows:*

$$G = U * g * V \qquad (3.6)$$

$g(x,y)$ is the inverse Fourrier transform of $G(u,v)$

$$g = U^{-1} * G * V^{-1} \qquad (3.7)$$

where

$$G = U^T * g * V \Leftrightarrow \left(U^T\right)^{-1} * G * V^{-1} = \left(U^T\right)^{-1} U^T * g * V * V^{-1}$$

$$\Leftrightarrow g = \left(U^T\right)^{-1} * G * V^{-1}$$

Image Transforms

Example: Find the Fourier transform of the following 4x4 image

$$g(x,y)=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&1&1&0\\0&1&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

Solution:

- One has the row, M=4 ; the column, N=4
- Transform matrix $U(x,u)$ using the formula:

$$U(x,u)=e^{-\frac{j2\pi xu}{M}};x,u=0:M-1$$

$$U=\begin{bmatrix}e^{\frac{-j\times2\times\pi\times0\times0}{4}}&e^{\frac{-j\times2\times\pi\times0\times1}{4}}&e^{\frac{-j\times2\times\pi\times0\times2}{4}}&e^{\frac{-j\times2\times\pi\times0\times3}{4}}\\e^{\frac{-j\times2\times\pi\times1\times0}{4}}&e^{\frac{-j\times2\times\pi\times1\times1}{4}}&e^{\frac{-j\times2\times\pi\times1\times2}{4}}&e^{\frac{-j\times2\times\pi\times1\times3}{4}}\\e^{\frac{-j\times2\times\pi\times2\times0}{4}}&e^{\frac{-j\times2\times\pi\times2\times1}{4}}&e^{\frac{-j\times2\times\pi\times2\times2}{4}}&e^{\frac{-j\times2\times\pi\times2\times3}{4}}\\e^{\frac{-j\times2\times\pi\times3\times0}{4}}&e^{\frac{-j\times2\times\pi\times3\times1}{4}}&e^{\frac{-j\times2\times\pi\times3\times2}{4}}&e^{\frac{-j\times2\times\pi\times3\times3}{4}}\end{bmatrix} \Rightarrow U=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&-j&-1&j\\1&-1&1&-1\\1&j&-1&-j\end{bmatrix}$$

Using the formula of Euler, we have $e^{-j\varpi}=\cos\varpi-j\sin\varpi$

Image Transforms

$$U = \begin{bmatrix} e^{\frac{-j2\pi 0x0}{4}} & e^{\frac{-j2\pi 0x1}{4}} & e^{\frac{-j2\pi 0x2}{4}} & e^{\frac{-j2\pi 0x3}{4}} \\ e^{\frac{-j2\pi 1x0}{4}} & e^{\frac{-j2\pi 1x1}{4}} & e^{\frac{-j2\pi 1x2}{4}} & e^{\frac{-j2\pi 1x3}{4}} \\ e^{\frac{-j2\pi 2x0}{4}} & e^{\frac{-j2\pi 2x1}{4}} & e^{\frac{-j2\pi 2x2}{4}} & e^{\frac{-j2\pi 2x3}{4}} \\ e^{\frac{-j2\pi 3x0}{4}} & e^{\frac{-j2\pi 3x1}{4}} & e^{\frac{-j2\pi 3x2}{4}} & e^{\frac{-j2\pi 3x3}{4}} \end{bmatrix}$$

Image Transforms

Similarly, one has the matrix, V

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix}$$

$$G = U * g * V = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} 4 & -2-j2 & 0 & -2+j2 \\ -2-j2 & j2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2+2j & 2 & 0 & -j2 \end{bmatrix}$$

Image Transforms

DFT image

The kernel of DFT is a complex function → these images are complex:

- Real parts
- Imaginary parts

Display the DFT of an image

- Coefficients of the high frequency are small.
- Logarithmic function

$$d\,(u,v) = \log(1 + |G(u,v)|)$$

Image Transforms

DFT image

$$|F(u,v)| = [R^2(u,v) + I^2(u,v)]^{1/2} \quad (3.22)$$

Góc pha của của biến đổi được xác định như sau:

$$\Phi(u,v) = tan^{-1}\left[\frac{I(u,v)}{R(u,v)}\right] \quad (3.23)$$

Hai hàm này có thể được sử dụng để biểu diễn $F(u,v)$ dưới dạng hệ tọa độc cực thông thường cho một đại lượng:

$$F(u,v) = |F(u,v)|e^{-j\Phi(u,v)} \quad (3.24)$$

Phổ công suất được định nghĩa như là bình phương của độ lớn

$$P(u,v) = |F(u,v)|^2 = R^2(u,v) + I^2(u,v) \quad (3.25)$$

Nguyen Thanh Hai, PhD

Image Transforms

DFT image

Cho ma trận a có kích thước 4×4 với các giá trị cụ thể sau:

$$a = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Biến đổi Fourier của a với việc tính toán từng giá trị cụ thể tại từng vị trí, chẳng hạn như với $u = 2$ và $v = 1$.

A(1,0)

$$= e^{-j2\pi\left(\frac{1}{4}\right)} + e^{-j2\pi\left(\frac{1}{4}\right)} + e^{-j2\pi\left(\frac{2}{4}\right)} + e^{-j2\pi\left(\frac{2}{4}\right)}$$
$$= -j - j - 1 - 1$$
$$= -2 - 2j$$

$$A = \begin{bmatrix} 4 + j0 & -2 - j2 & 0 + j0 & -2 + j2 \\ -2 - j2 & 0 + j2 & 0 + j0 & 2 + j0 \\ 0 + j0 & 0 + j0 & 0 + j0 & 0 + j0 \\ -2 + j2 & 0 + j0 & 0 + j0 & 0 - j2 \end{bmatrix}$$

Image Transforms

Exercise

Compute the DFT of the following image

$$g = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

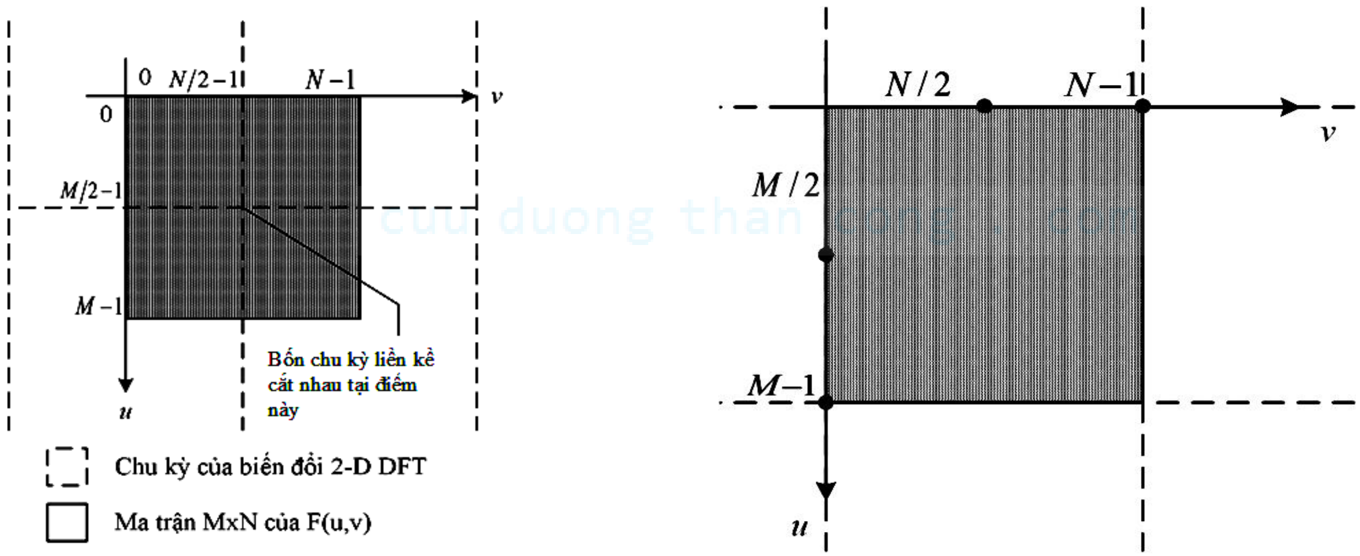
Solution

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Image Transforms

F=fft2(f)

Hàm này sẽ trả về biến đổi Fourier cũng với kích thước $M \times N$ có dữ liệu được sắp xếp như trong hình 3.2(a), khi đó, gốc tọa độ nằm ở góc trên bên trái của ma trận và chu kỳ kết thúc tại trung tâm của hình chữ nhật tần số.



Hình 3.2. *(a) Phổ Fourier có kích thước $M \times N$ và chỉ ra bốn góc tư của các chu kỳ tiếp giáp nhau trong phổ. (b) Phổ có được bằng cách nhân hàm $f(x, y)$ với $(-1)^{x+y}$ trước khi tính biến đổi Fourier. Khi đó trọn vẹn 1 chu kỳ được xem xét bằng cách thực hiện biến đổi Fourier thông thường*

Image Transforms

với các giá trị bằng không khi sử dụng biến đổi Fourier để lọc ảnh. Trong trường hợp này, cú pháp được cho như sau:

F=fft2(f,P,Q)

Với cú pháp này, fft2 mở rộng ngõ vào với số lượng giá trị không cho phép sao cho hàm kết quả có kích thước $P \times Q$.

Phổ biên độ Fourier đạt được bằng cách sử dụng hàm abs:

S=abs(F)

Hàm abs tính biên độ (căn bậc hai của tổng bình phương phần thực và ảo) của từng phần tử trong mảng. Hình 3.3(b) trình bày phổ Fourier, trong đó, các điểm sáng tại các góc có biên độ lớn nhất tương ứng với 4 góc phần tư của 4 chu kỳ tiếp giáp nhau.

Hình 3.3. *Biến đổi Fourier cho ảnh và phổ của nó:*
(a). Ảnh gốc; (b) Phổ Fourier; (c) Phổ được định vị trí trung tâm
(d) Phổ được tăng cường để hiển thị bằng biến đổi log

Image Transforms

Phân tích phổ bằng cách biểu diễn nó như một ảnh độc lập được xem là một khía cạnh quan trọng trong miền tần số. Hàm fftshift trong Toolbox được sử dụng để chuyển gốc tọa độ của biến đổi đến trung tâm của hình chữ nhật hay nói đúng hơn thì nó thực hiện chức năng tương tự việc nhân $(-1)^{x+y}$. Cú pháp của hàm fftshift được đưa ra như sau:
Fc=fftshift(F)
với F là biến đổi Fourier đã được tính toán bằng hàm fft2 và Fc là biến đổi trung tâm. Hàm fftshift thực hiện hoán đổi các gốc phần tư của F như trong hình 3.3(c), khi đó, việc tái sắp xếp các góc phần tư này làm cho các điểm sáng đều được đặt tại vị trí trung tâm và cho phép hiển thị trọn vẹn một chu kỳ hoàn chỉnh. Hình 3.3(d) biểu diễn phổ như hình 3.3(c) nhưng được tăng cường bằng biến đổi log

Image Transforms

Ví dụ 3.2: Thực hiện biến đổi Fourier cho ảnh và tính phổ của nó

```
clear all;
close all;
f=imread('TestDFT.tif');
F=fft2(f);
S=abs(F);
Fc=fftshift(F);
Sc=abs(Fc);
S2=log(1+abs(Fc));
figure;
subplot(2,2,1);imshow(f);
subplot(2,2,2);imshow(S, []);
subplot(2,2,3);imshow(Sc,[]);
subplot(2,2,4);imshow(S2,[]);
```

Ngược với hàm fftshift là hàm ifftshift sẽ chuyển các góc phần tư về vị trí ban đầu, hàm này có cú pháp như sau:

F=ifftshift(Fc)

biến đổi Fourier ngược, hàm ifft được sử dụng với cú pháp như sau:

f=ifft2(F)

Với F là biến đổi Fourier sau khi đã chuyển các góc phần tư về vị trí ban đầu, f là ảnh trên miền không gian. Nếu ngõ vào tính toán F là số thực thì tương ứng ngõ ra cũng là dạng số thực. Tuy nhiên, trong thực tế, hàm ifft2 thường có một vài thành phần ảo rất nhỏ là kết quả từ việc làm tròn vốn là đặc trưng trong tính toán dấu chấm động. Do đó, tốt nhất là ta sẽ lấy phần thực và dùng hàm như sau:

f=real(ifft2(F))

Image Transforms

Do việc tính FFT trong MATLAB giả định gốc tọa độ của hàm truyền tại vị trí góc trái phía trên của hình chữ nhật tần số, vì vậy, việc tính toán khoảng cách cần phải chú ý. Trong trường hợp này, gốc tọa độ cần phải được sắp xếp lại sao cho góc nằm ngay tại trung tâm bằng cách sử dụng hàm fftshift như đã trình bày trước đó. Để cung cấp một sơ đồ lưới dùng tính toán khoảng cách và cho các ứng dụng tương tự, hàm dftuv được viết như sau:

```
function [U,V]=dftuv(m,n)
u=0:(m-1);
v=0:(n-1);
idx=find(u>m/2);
u(idx)=u(idx)-m;
idy=find(v>n/2);
v(idy)=v(idy)-n;
[V,U]=meshgrid(v,u);
End;
```

Image Transforms

Để minh họa, ta tính bình phương khoảng cách tử mỗi điểm trong hình chữ nhật có kích thước 8×5 đến gốc:

```
[U,V]=dftuv(8,5);
D=U.^2+V.^2

D =
     0     1     4     4     1
     1     2     5     5     2
     4     5     8     8     5
     9    10    13    13    10
    16    17    20    20    17
     9    10    13    13    10
     4     5     8     8     5
     1     2     5     5     2
```

Giá trị khoảng cách bằng không tại góc trên bên trái và các giá trị lớn nhất tại trung tâm của hình chữ nhật được giải thích như ở hình 3.2 (a). Hiển nhiên, ta có thể dùng hàm fftshift để đạt được các giá trị khoảng cách với mối liên hệ đến trung tâm của hình chữ nhật dùng biểu diễn tần số (frequency retangle).

```
fftshift(D)
ans =
    20    17    16    17    20
    13    10     9    10    13
     8     5     4     5     8
     5     2     1     2     5
     4     1     0     1     4
     5     2     1     2     5
     8     5     4     5     8
  10     9    10    13
```


Nguyen Thanh Hai, PhD

Image Transforms

Exercise

Verify the relationship of the DFTs of the following images

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A B

Exercise

Find the DFT of the following image

0	1	1	0
0	1	1	0
0	1	1	0
0	1	1	0

Exercise

Solution

8.0000 + 0.0000i	-4.0000 - 4.0000i	0.0000 + 0.0000i	-4.0000 + 4.0000i
0.0000 + 0.0000i	0.0000 + 0.0000i	0.0000 + 0.0000i	0.0000 + 0.0000i
0.0000 + 0.0000i	0.0000 + 0.0000i	0.0000 + 0.0000i	0.0000 + 0.0000i
0.0000 + 0.0000i	0.0000 + 0.0000i	0.0000 + 0.0000i	0.0000 + 0.0000i

University of Technology and Education
Faculty of Electrical & Electronic Engineering

Image Transforms

Creat the function *fft2_new.m* to calculate Fourier transform of an image

function G=fft2_new(g)
% G is fourier tranform of g
%======================
% Get size of matrix f
 	
M=size(g,1); % get number of rows
N=size(g,2) ; % get number of columns
%======================
	%create matrix U
	%U(*x*,*u*)=exp(-j*2*pi**x***u*/M)
	% *x*, *u* run from 0 to M-1
	U=[ ];
	for *x*=0:M-1
	  for *u*=0:M-1
	    U(*x*+1,*u*+1)=exp(-j*2*pi**x***u*/M);
	  end
	end

Nguyen Thanh Hai, PhD

Image Transforms

Creat the function *fft2_new.m* to calculate Fourier transform of an image

```
%====================
% create matrix V
%V(y,v)=exp(-j*2*pi*y*v/N)
% y, v run from 0 to N-1
V=[ ];
for y=0:N-1
   for v=0:N-1
       V(y+1,v+1)=exp(-
j*2*pi*y*v/N);
   end
end
```

```
%====================
%Fourier transform
G=U*g*V;
```

Image Transforms

Creat the inverse function *ifft2_new.m* to calculate inverse Fourier transform of an image

```
function f=ifft2_new(F)
%f is invert fourier tranform of F
%====================
%Get size of matrix F
M=size(F,1);  % get number of rows
N=size(F,2) ; % get number of columns
%====================
%create matrix U
%U(m,p)=exp(-j*2*pi*m*p/M)
% m, p run from 0 to M-1
U=[ ];
for m=0:M-1
   for p=0:M-1
      U(m+1,p+1)=exp(-j*2*pi*m*p/M);
   end
end
```

```
%====================
%create matrix V
%V(n,q)=exp(-j*2*pi*n*q/N)
%n, q run from 0 to N-1
V=[ ];
for n=0:N-1
   for q=0:N-1
      V(n+1,q+1)=exp(-j*2*pi*n*q/N);
   end
end
%====================
%Fourier transform
f=inv(U)*f*inv(V);
```


Nguyen Thanh Hai, PhD

Image Transforms

Test and compare two results on Matlab *fft2* and *ifft2*

```
% Test and compare together G1 and G2, g1 và g2
g=[0 0 0 0; 0 1 1 0; 0 1 1 0; 0 0 0 0]
G1=fft2(g)
G2=fft2_new(g)
g1=ifft2(G1)
g2=ifft2_new(G1)
```


- MAGNITUDE(G) = SQRT(REAL(G)^2+IMAGINARY(G)^2)

- PHASE(F) = ATAN(IMAGINARY(G)/REAL(G))

University of Technology and Education
Faculty of Electrical & Electronic Engineering

Image Transforms

Example 3.6: Consider the image g(x,y) shown in Fig. 3.3. Calculate the 2D DFT of this image**.**

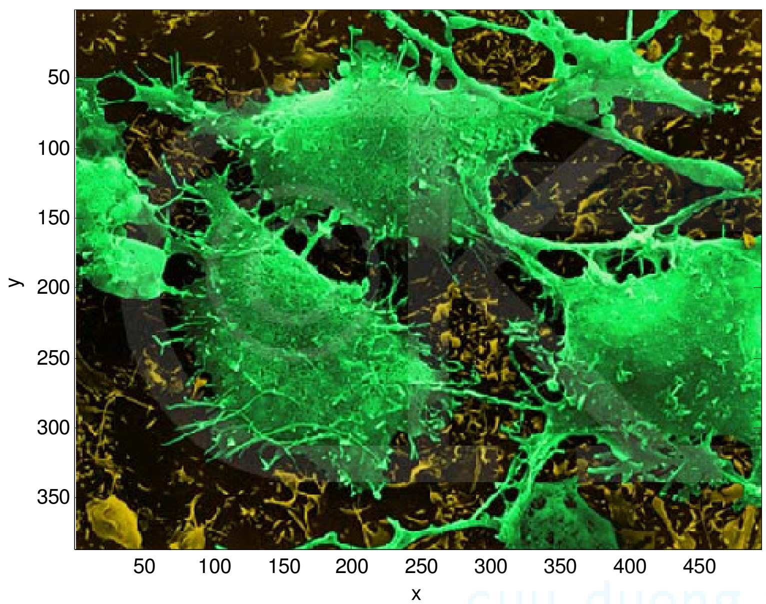


Fig. 3.3: Image in the time domain

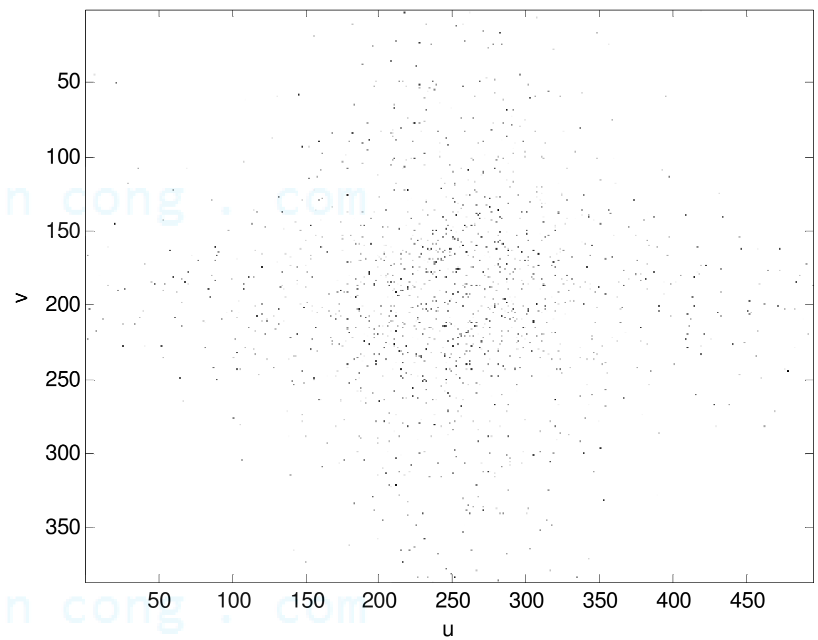
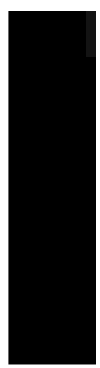


Fig. 3.4: Magnitude of the DFT of image

Nguyen Thanh Hai, PhD

Image Transforms

Example:



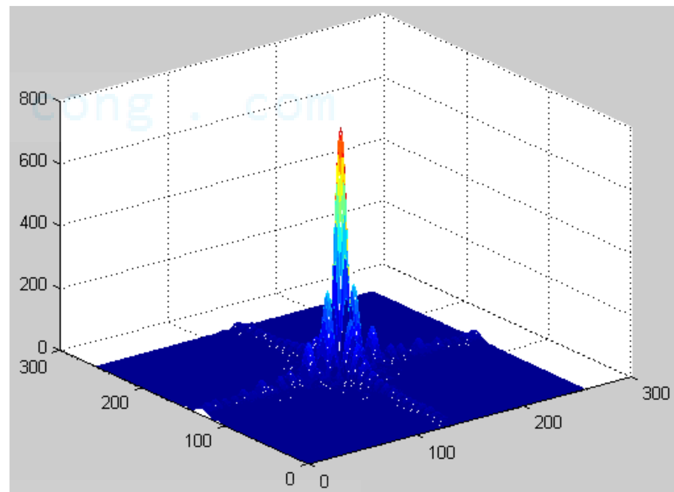


Fig. 3.5: Image and Magnitude of the DFT of image in 3D display

Image Transforms

Problems?

- **Using Matlab**
- **Calculate**

The End