Điều khiển quá trình

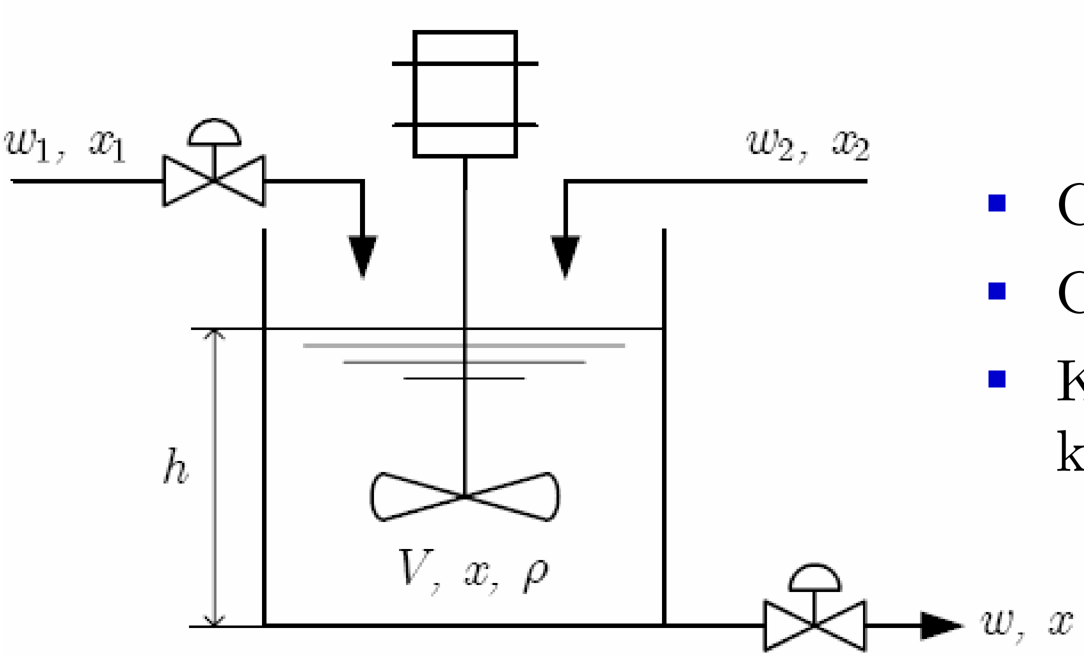
Chương 9: Thiết kế cấu trúc điều khiển quá trình đa biến

15/11/2006

Nội dung chương 6

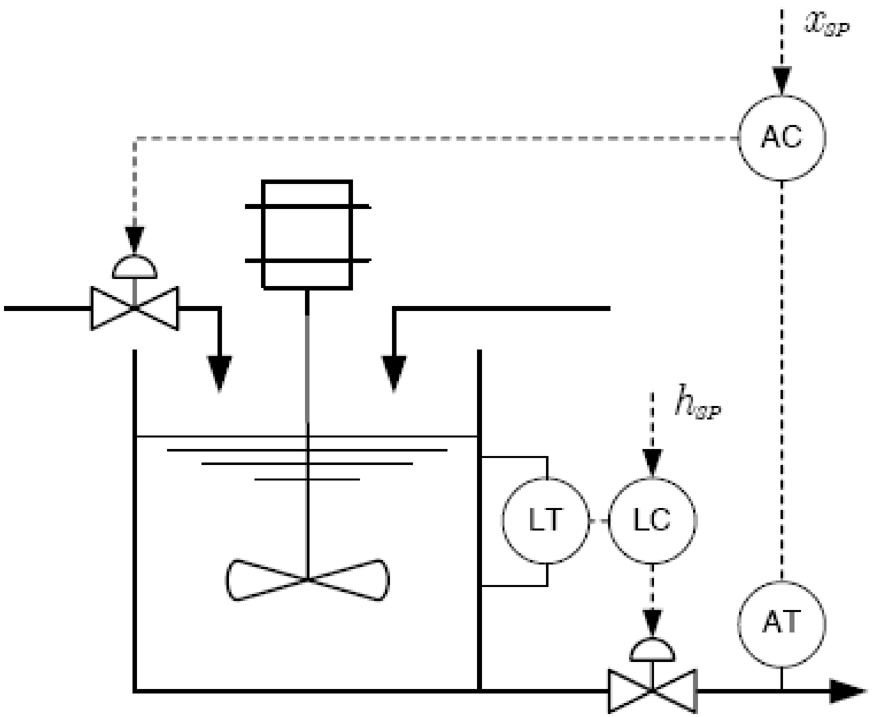
3.9 Thiết kế cấu trúc điều khiển hệ MIMO

6.1 Vấn đề thiết kế cấu trúc điều khiển



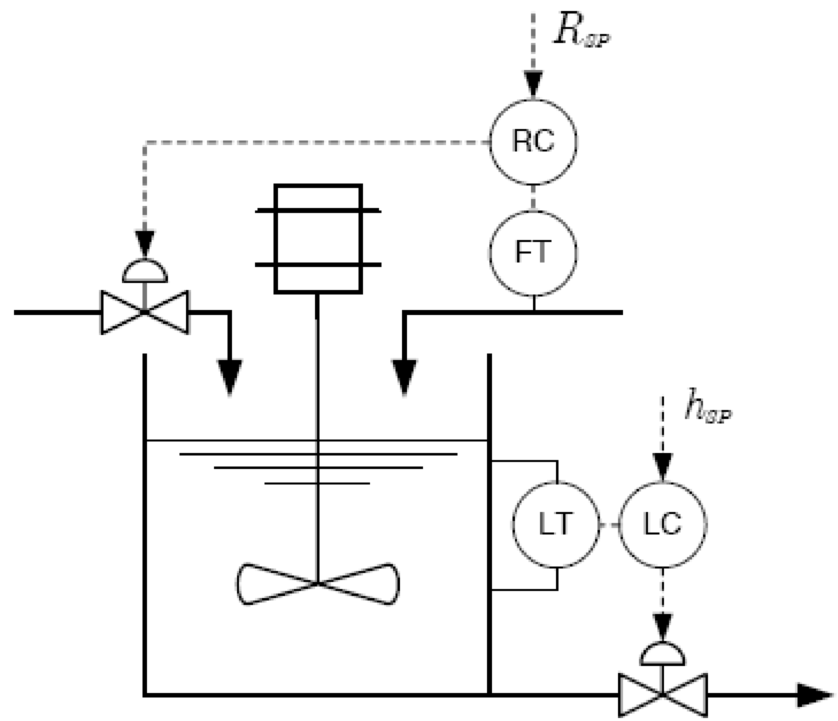
- Chọn biến được điều khiển?
- Cặp đôi các biến vào-ra?
- Kết hợp các sách lược điều khiển (bù nhiễu, tầng,..)?

$$\begin{cases} \dfrac{dh}{dt} = \dfrac{1}{\rho A}(w_1 + w_2 - w) \\ \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{1}{\rho A h}(w_1 x_1 + w_2 x_2) - \dfrac{1}{\rho A h}(w_1 + w_2)x \end{cases}$$



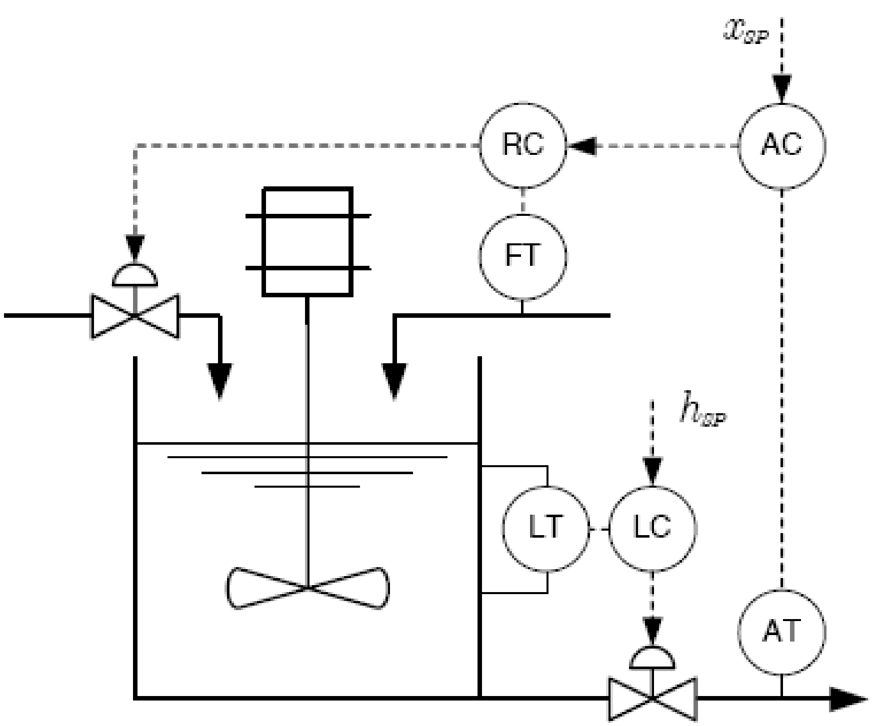
a)

Điều khiển phản hồi thuần túy



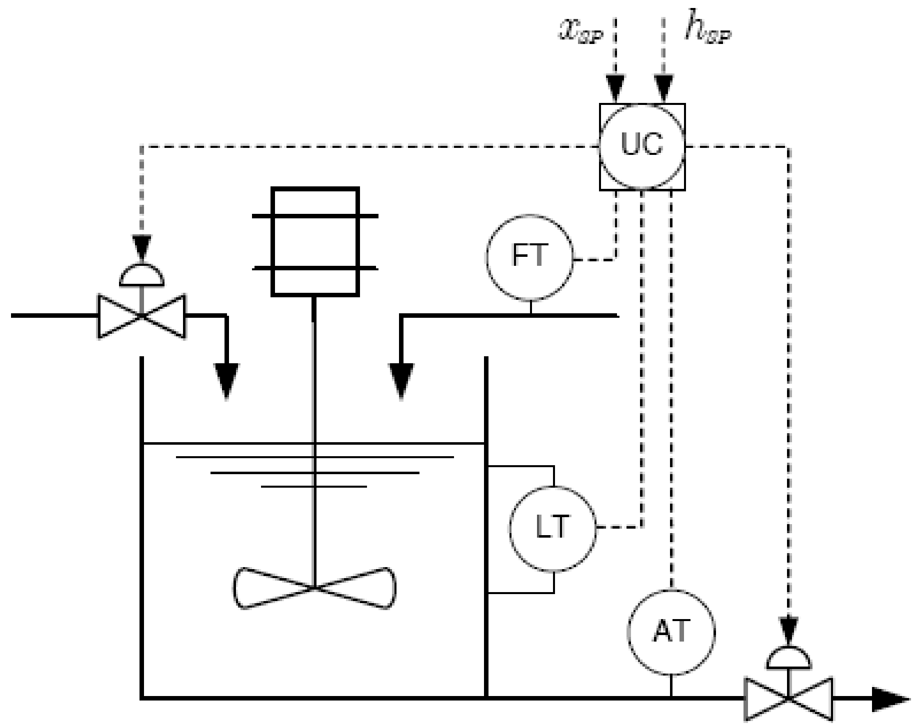
b)

Điều khiển tỉ lệ và điều khiển phản hồi



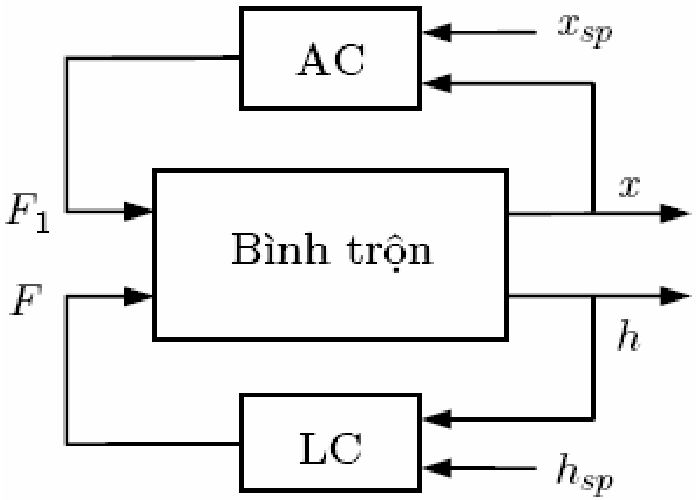
c)

Điều khiển phản hồi kết hợp điều khiển tỉ lệ (cấu trúc tầng)

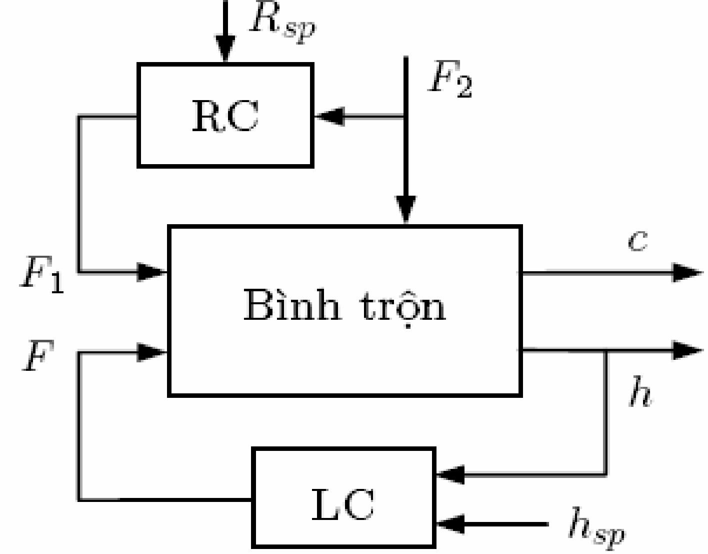


d)

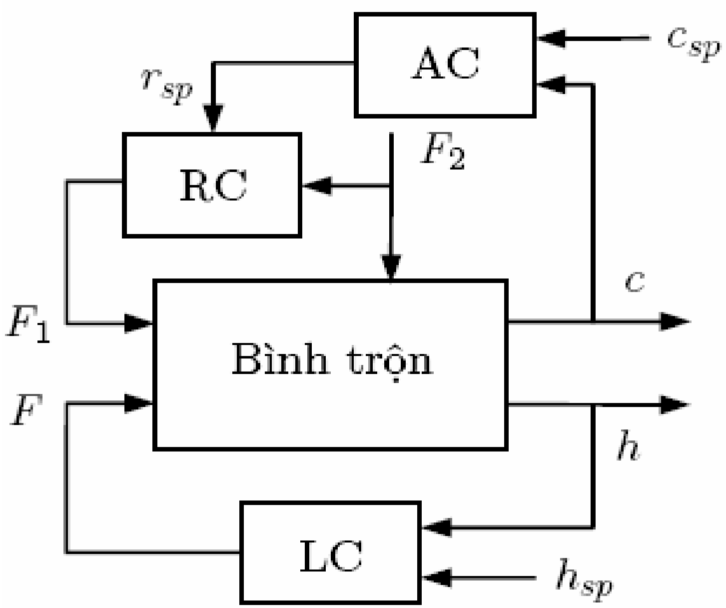
Điều khiển phản hồi kết hợp bù nhiễu (đa biến)



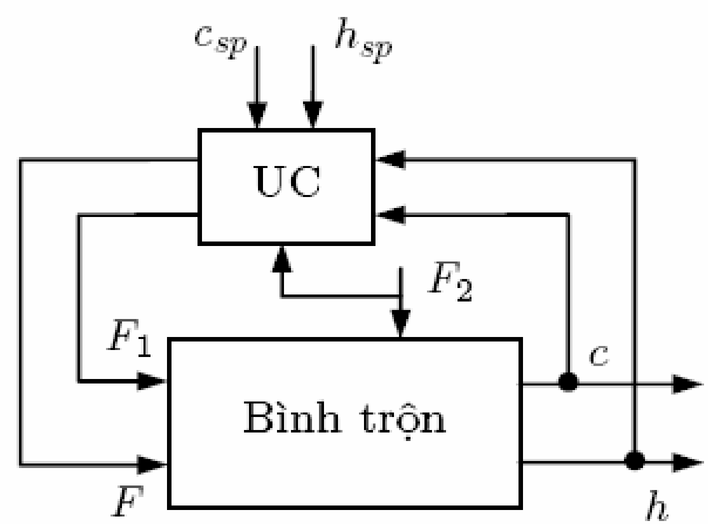
a) Điều khiển phản hồi thuần túy



b) Điều khiển tỉ lệ và điều khiển phản hồi



c) Điều khiển tầng và điều khiển phản hồi



d) Điều khiển đa biến

Các bước thiết kế

- Lựa chọn các biến điều khiển và các biến được đo cho một mục đích điều khiển cụ thể
- Phân tích và ra quyết định sử dụng phương án điều khiển tập trung, phi tập trung hoặc phối hợp.
- Đối với cấu trúc phi tập trung: lựa chọn một cấu hình điều khiển dựa trên cặp đôi các biến điều khiển – biến được điều khiển và các phần tử cấu hình cơ bản.
- Phối hợp sử dụng các sách lược điều khiển cơ bản (điều khiển phản hồi, điều khiển truyền thẳng, điều khiển tầng điều khiển tỉ lệ,...) và thể hiện cấu trúc điều khiển trên bản vẽ.

Các yêu cầu thiết kế

1. **Chất lượng**: Đảm bảo khả năng thiết kế các bộ điều khiển để đáp ứng tốt nhất các yêu cầu về chất lượng điều khiển như tính ổn định, tính bền vững, tốc độ đáp ứng và chất lượng đáp ứng.
2. **Đơn giản và kinh tế**: Đảm bảo khả năng thực thi, chỉnh định và đưa hệ thống điều khiển vào vận hành một cách đơn giản và kinh tế trên các giải pháp phần cứng và phần mềm thông dụng, dựa trên những cơ sở lý thuyết dễ tiếp cận trong thực tế.
3. **Tin cậy/bền vững**: Hệ thống phải làm việc tin cậy và hiệu quả ngay cả trong điều kiện không có thông tin đầy đủ và chính xác về quá trình.

6.2 Lựa chọn các biến quá trình

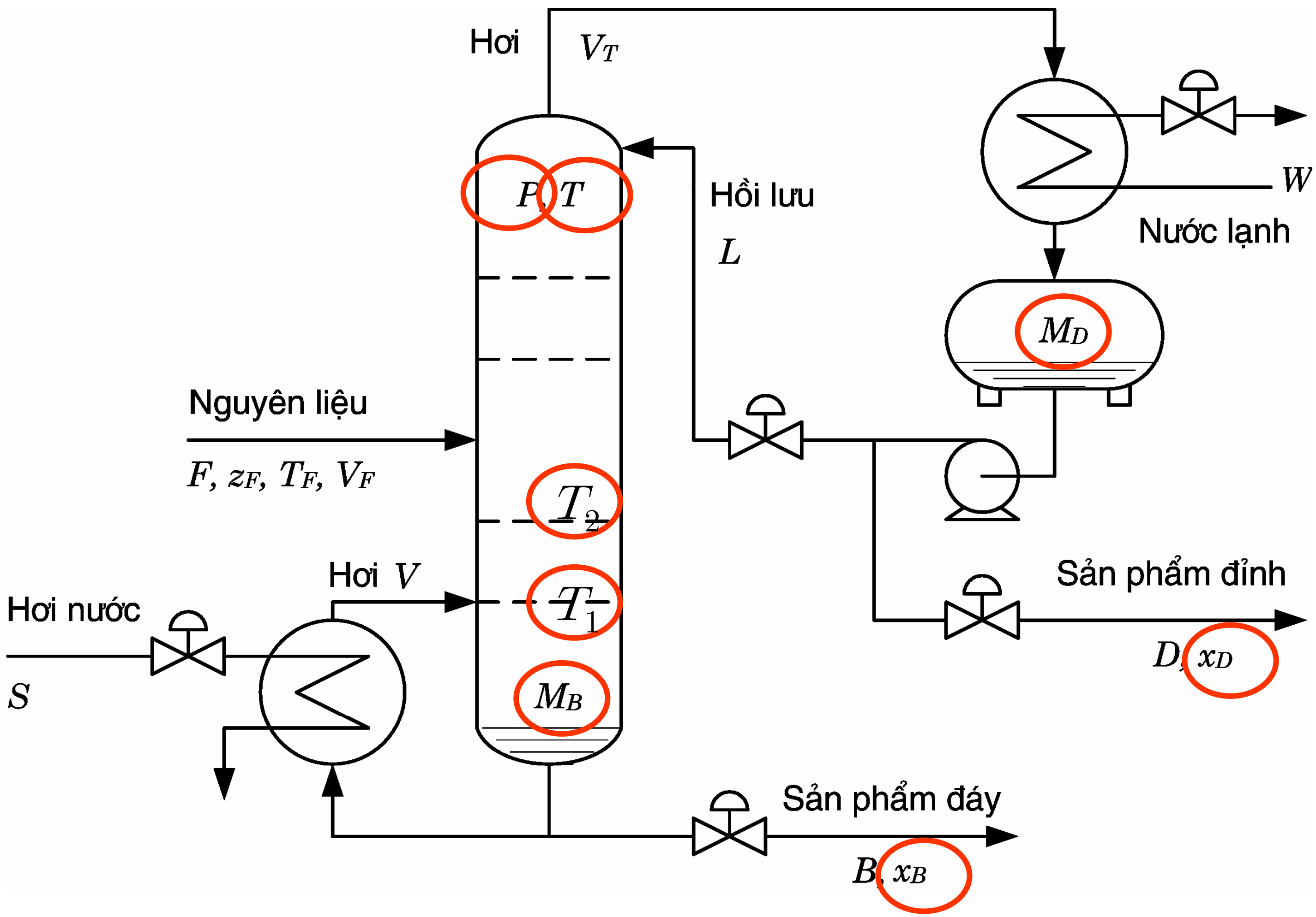
Vấn đề:

- Số lượng biến điều khiển có thể ít hơn số biến cần điều khiển
- Không phải biến cần điều khiển nào cũng có thể đo được một cách kinh tế, đủ chính xác và đủ nhanh cho mục đích điều khiển
- Một số biến cần điều khiển có độ nhạy rất kém với các biến điều khiển, phạm vi điều khiển được không lớn hơn nhiều so với ảnh hưởng của nhiễu đo.
- Động học của một số vòng điều khiển có thể rất chậm, rất nhạy cảm với nhiễu, rất phi tuyến hoặc tương tác mạnh với các vòng điều chỉnh khác.

Lựa chọn các biến được điều khiển

1. Tất cả các biến không có tính tự cân bằng phải được điều khiển
2. Chọn các biến ra cần phải duy trì trong giới hạn ràng buộc của thiết bị hoặc của chế độ vận hành
3. Chọn các biến ra đại diện trực tiếp cho chất lượng sản phẩm (ví dụ nồng độ, thành phần) hoặc các đại lượng ảnh hưởng lớn tới chất lượng (ví dụ nhiệt độ hoặc áp suất)
4. Chọn các biến ra có tương tác mạnh tới các biến cần điều khiển khác
5. Chọn các biến ra có đặc tính động học và đặc tính tĩnh tiêu biểu, dễ điều khiển

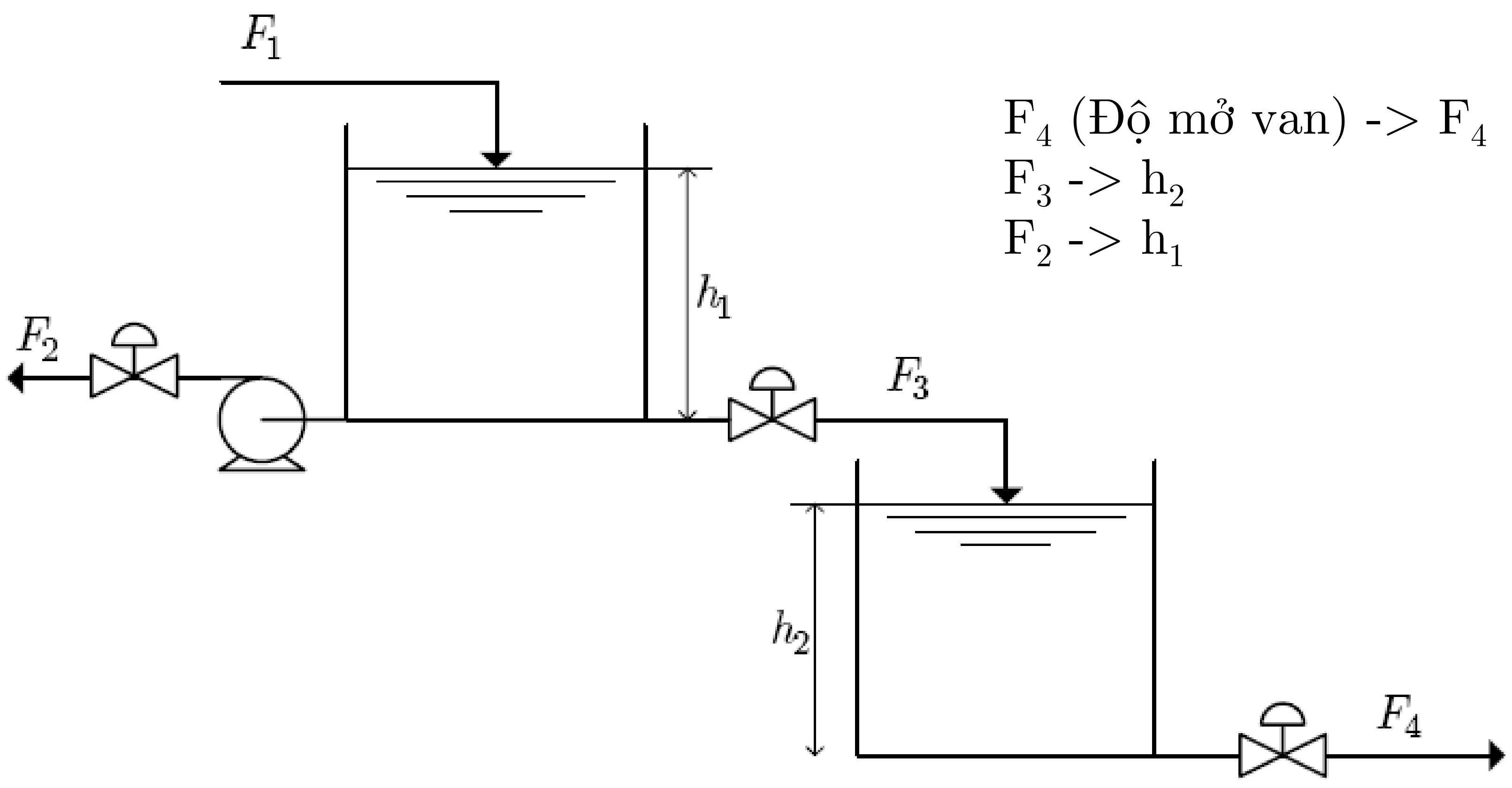
Ví dụ: Tháp chưng luyện



Lựa chọn biến điều khiển

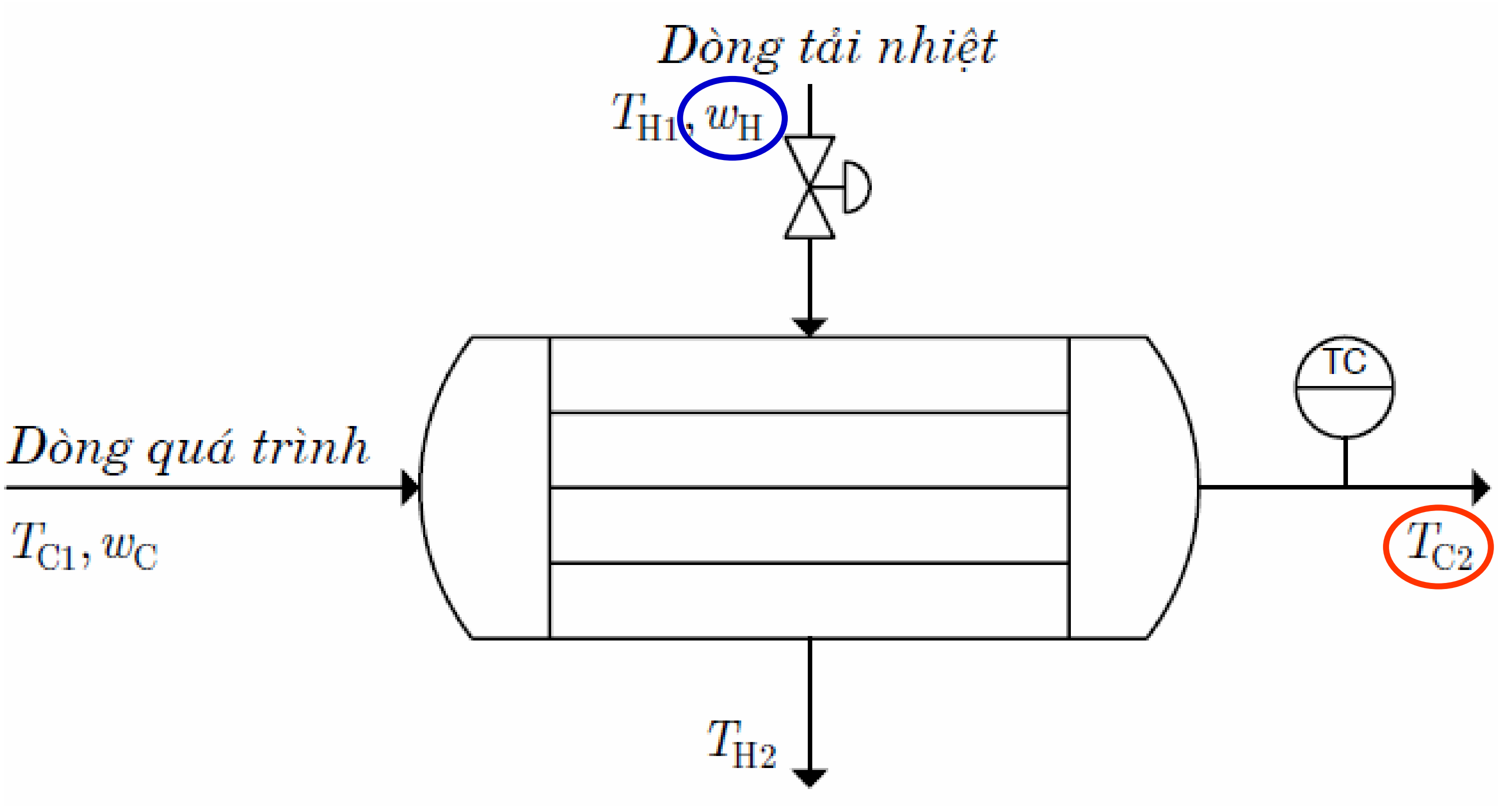
1. Chọn những biến vào có ảnh hưởng lớn tới biến được điều khiển tương ứng
2. Chọn những biến vào có tác động nhanh tới biến được điều khiển tương ứng
3. Chọn những biến vào có tác động trực tiếp thay vì gián tiếp tới biến được điều khiển tương ứng
4. Cố gắng tránh hiện tượng nhiễu lan truyền ngược

Ví dụ: Dãy bình chứa

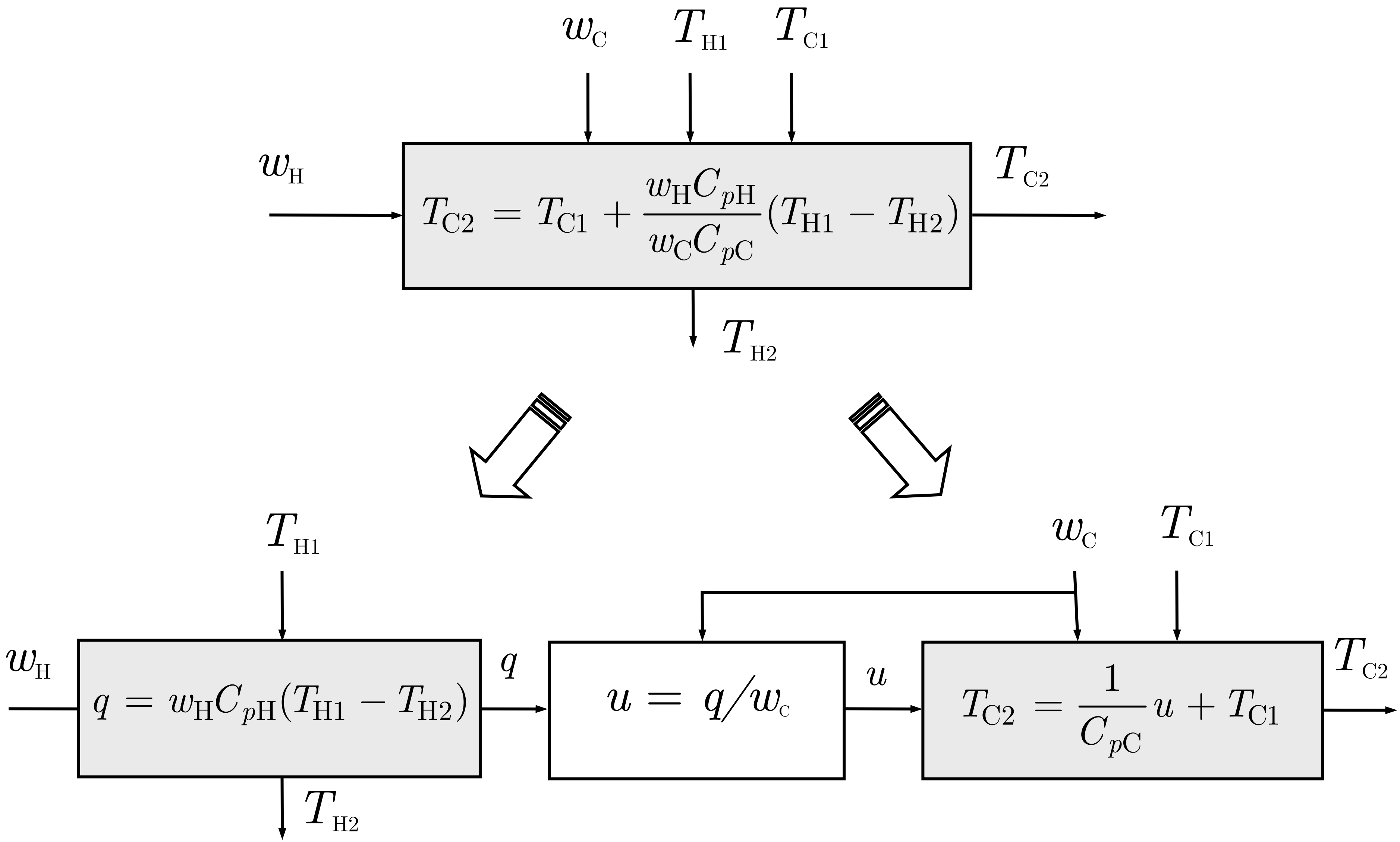


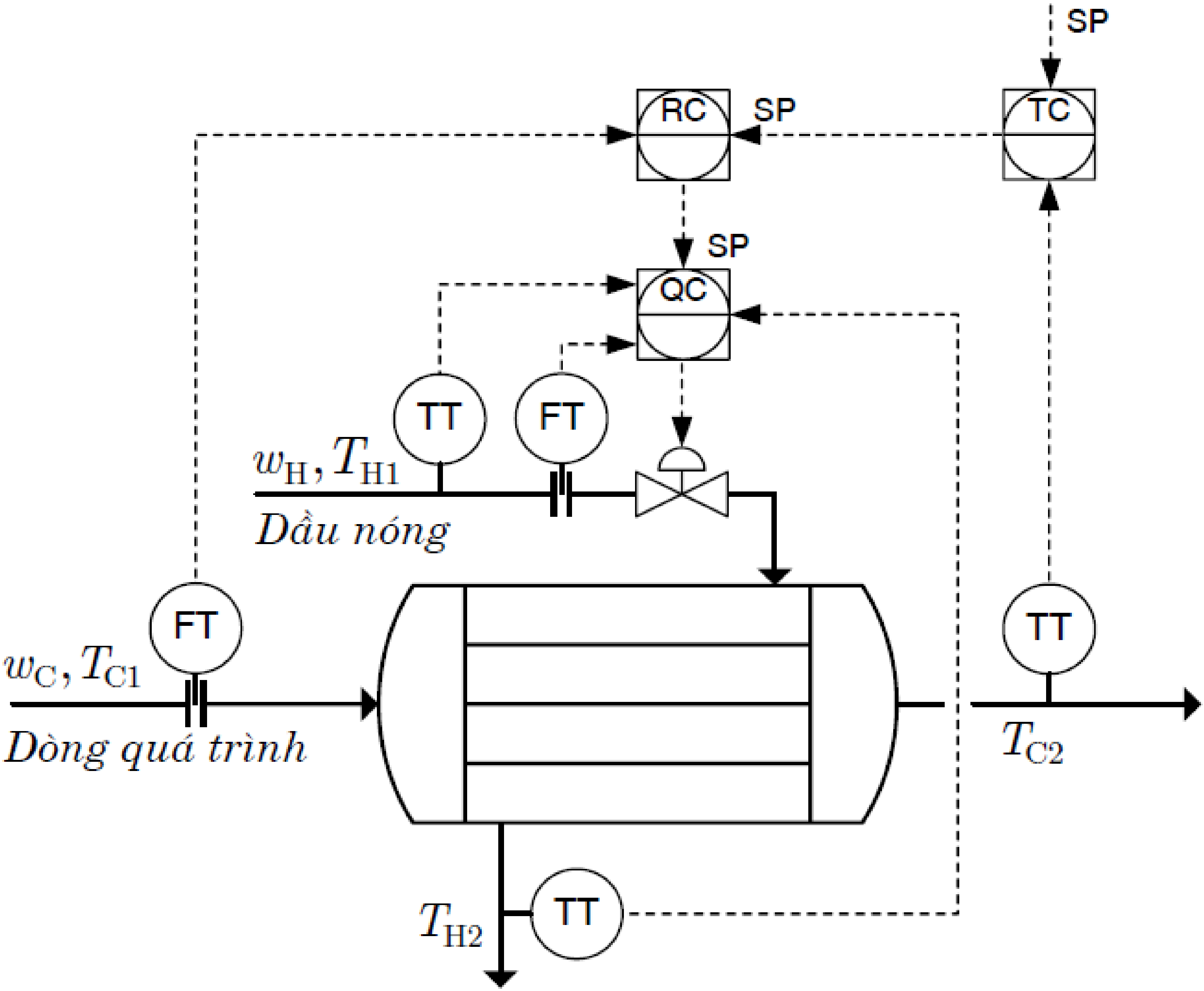
F_4 (Độ mở van) -> F_4
F_3 -> h_2
F_2 -> h_1

Ví dụ: Thiết bị gia nhiệt

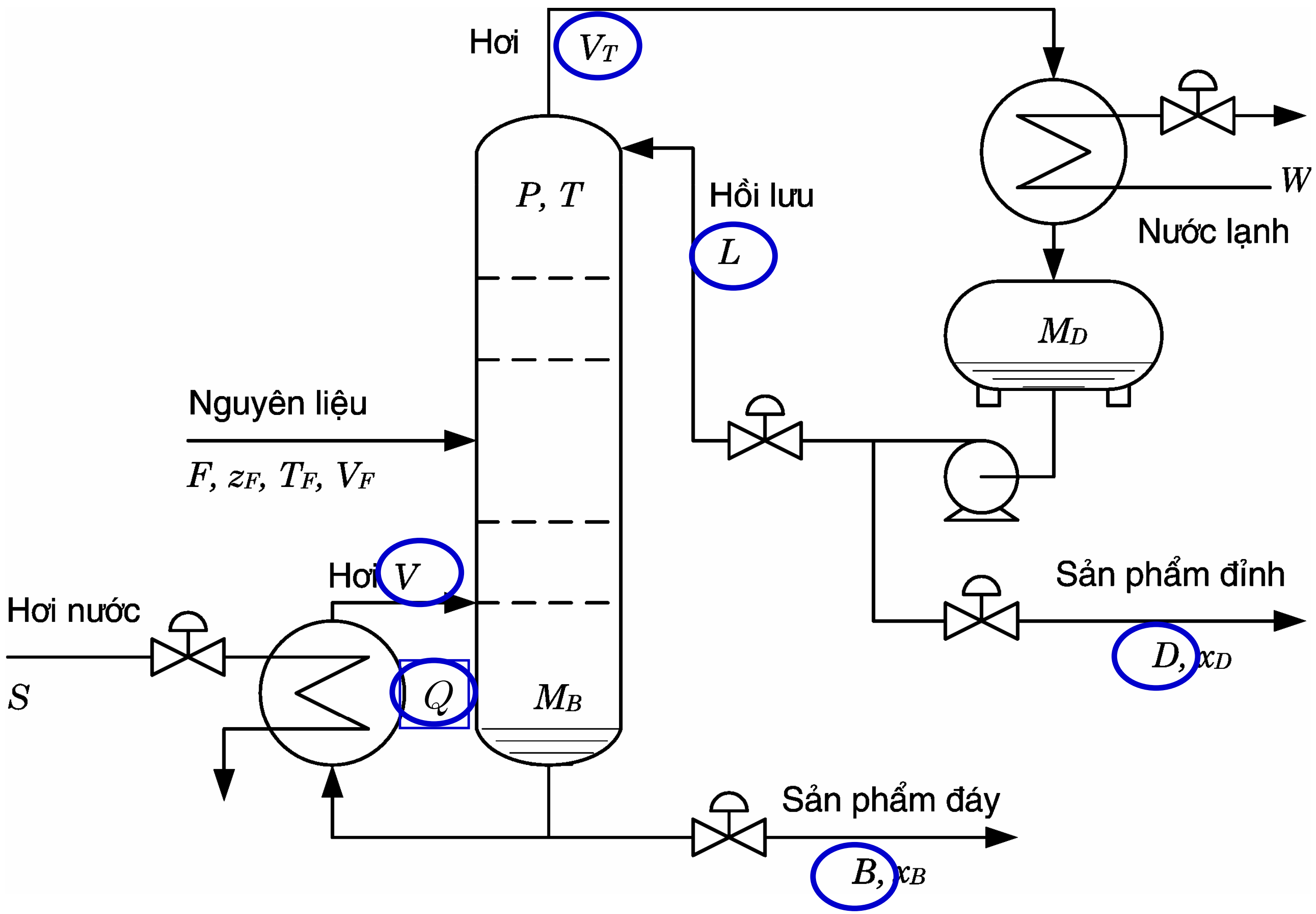


$$q = w_H C_{pH}(T_{H1} - T_{H2}) = w_C C_{pC}(T_{C2} - T_{C1})$$


w_C
T_{H1}
T_{C1}
w_H
$T_{C2} = T_{C1} + \frac{w_H C_{pH}}{w_C C_{pC}}(T_{H1} - T_{H2})$
T_{C2}
T_{H2}
T_{H1}
w_C
T_{C1}
w_H
$q = w_H C_{pH}(T_{H1} - T_{H2})$
q
$u = q/w_C$
u
$T_{C2} = \frac{1}{C_{pC}} u + T_{C1}$
T_{C2}
T_{H2}


SP
RC
SP
TC
SP
QC
TT
FT
w_H, T_{H1}
Dầu nóng
FT
w_C, T_{C1}
Dòng quá trình
TT
T_{C2}
T_{H2}
TT

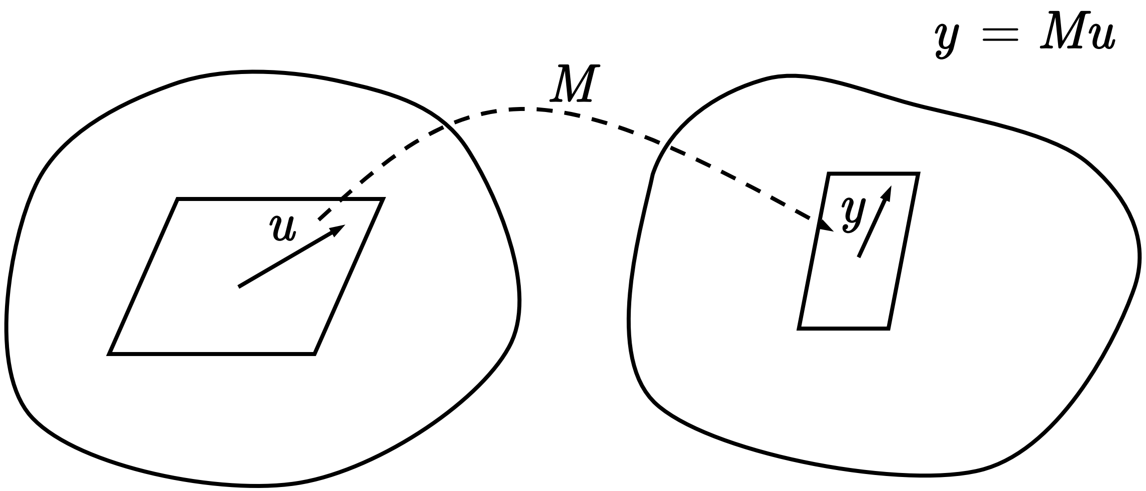
Ví dụ: Tháp chưng luyện



6.3 Phép phân tích giá trị suy biến (SVD)

- Giá trị suy biến (*singular value*) và phép phân tích giá trị suy biến (*singular value decomposition*) có rất nhiều công dụng trong phân tích chất lượng của hệ thống
- Trong điều khiển quá trình, phép phân tích giá trị suy biến là một công cụ hữu hiệu phục vụ:
  - Lựa chọn các biến cần điều khiển, các biến được điều khiển và các biến điều khiển
  - Đánh giá tính bền vững của một sách lược/cấu trúc điều khiển
  - Xác định cấu hình điều khiển phi tập trung tốt nhất

Ánh xạ tuyến tính



- Nếu M đủ hạng hàng và u không bị giới hạn, y có thể điều khiển được một cách tùy ý
- Khi ma trận M suy biến hoặc u bị giới hạn, Mu sẽ không bao hết không gian vector của y => y không thể điều khiển được hoàn toàn theo ý muốn.
- Các tham số không chính xác => cần thước đo tính chất "gần" hay "xa" với sự suy biến của một ma trận

Các giá trị suy biến

- Các giá trị suy biến σ của M (mxn) là các giá trị riêng của $M^H M$ => thước đo khoảng cách gần hay xa với "sự suy biến" của M

$$\|M\|_2 = \max_i \sqrt{\lambda_i(M^H M)} = \max_i \sigma_i(M) \triangleq \bar{\sigma}(M)$$

$$\bar{\sigma}(M) = \max_{x \neq 0} \frac{\|Mx\|_2}{\|x\|_2} = \max_{\|x\|_2 = 1} \|Mx\|_2$$

$$\underline{\sigma}(M) = \min_{x \neq 0} \frac{\|Mx\|_2}{\|x\|_2} = \min_{\|x\|_2 = 1} \|Mx\|_2$$

- Với vector đầu vào u, ma trận M ánh xạ sang $y = Mu$ với hệ số khuếch đại lớn nhất là $\bar{\sigma}$ và hệ số khuếch đại nhỏ nhất là $\underline{\sigma}$
- Hệ số khuếch đại phụ thuộc vào *chiều của vector u*

Phép phân tích SVD và sự phụ thuộc chiều

- Phép phân tích SVD

$$G = U\Sigma V^H = U\begin{bmatrix}\sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_l\end{bmatrix}V^H,\ U^HU = \mathbf{I},\ V^HV = \mathbf{I}$$

$$\bar{\sigma} = \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_l = \underline{\sigma}$$

- Coi $G(jw)$ là đặc tính tần của hệ: $G(s) = \boldsymbol{y}(s)/\boldsymbol{u}(s)$
  - Các vector vào $\boldsymbol{u}$ có chiều trùng với cột đầu tiên của V sẽ được khuếch đại nhiều nhất => kết quả là vector $\boldsymbol{y}$ có chiều trùng với cột đầu của U
  - Các vector vào $\boldsymbol{u}$ có chiều trùng với cột cuối của V sẽ được khuếch đại ít nhất => kết quả là vector $\boldsymbol{y}$ có chiều trùng với cột cuối của U

Ứng dụng SVD trong lựa chọn các biến quá trình

1. **Lựa chọn tập biến được điều khiển**: Lựa chọn các biến ra đo được tương ứng với hàng của phần tử có giá trị tuyệt đối lớn nhất (hoặc gần lớn nhất) trong mỗi cột của ma trận U.
2. **Loại bớt số biến vào-ra**: Có thể loại bớt một số cặp biến vào-ra khiển tương ứng với số giá trị suy biến quá nhỏ.
3. **Lựa chọn tập biến điều khiển/biến được điều khiển**: Trong tất cả các tập biến vào-ra 'tiềm năng', lựa chọn tập tương ứng với những giá trị $\underline{\sigma}$ lớn nhất mà hệ không cho đáp ứng ngược (không có điểm không bên phải trục ảo).

Ví dụ: Điều khiển tháp chưng (9 tầng)

- Biến cần điều khiển: Thành phần sản phẩm đỉnh x_D và đáy x_B
- Biến điều khiển: lưu lượng hồi lưu L và công suất cấp nhiệt Q
- Chọn nhiệt độ tại đĩa nào làm biến được điều khiển?

➲ Phân tích SVD của G(0) (2 vào 9 ra)

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccc} \Delta T_i/\Delta L & \Delta T_i/\Delta Q & \text{Đĩa} \end{array} \\
G(0) = & \left[\begin{array}{cc} -0.00773271 & 0.0134723 \\ -0.2399404 & 0.2378752 \\ -2.5041590 & 2.4223120 \\ -5.9972530 & 5.7837800 \\ -1.6773120 & 1.6581630 \\ 0.0217166 & 0.0259478 \\ 0.1976678 & -0.1586702 \\ 0.1289912 & -0.1068900 \\ 0.0646059 & -0.0538632 \end{array}\right] \begin{array}{c} 9 \\ 8 \\ 7 \\ 6 \\ 5 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{array}
\end{array}
$$

$$
U = \begin{bmatrix} -0.00160 & -0.08290 \\ -0.03615 & -0.08355 \\ -0.37281 & -0.03915 \\ \mathbf{-0.89156} & 0.14738 \\ -0.25237 & -0.51900 \\ -0.00026 & \mathbf{-0.64828} \\ 0.02701 & -0.44637 \\ 0.01787 & -0.24505 \\ 0.00898 & -0.11822 \end{bmatrix}
$$

Chọn nhiệt độ ở khay 4 và 6

$$
V^T = \begin{bmatrix} 0.7191691 & -0.6948426 \\ -0.6948426 & -0.7191691 \end{bmatrix}
\qquad
\Sigma = \begin{bmatrix} 9.3452 & 0 \\ 0 & 0.052061 \end{bmatrix}
$$

quá nhỏ, khó điều khiển đồng thời cả x_D và x_B

Số điều kiện (condition number)

- Số điều kiện (*condition number*):

$$\mathrm{cond}(A) = \gamma(A) = \bar{\sigma} / \underline{\sigma}$$

- Trong đại số tuyến tính, cond(A) nói lên "sự nhạy cảm" của hệ với sai số trong A hoặc trong y, tức khả năng tìm nghiệm $Ax = b$ một cách chính xác, cond(A) càng lớn càng bất lợi.

  Ví dụ:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 10 & 1 \end{bmatrix} \quad \Sigma(A) = \begin{bmatrix} 10.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}, \ \mathrm{cond}(A) = 101$$

  Nếu A_{12} thay đổi từ 0 sang 0.1 sẽ dẫn tới A suy biến

- Trong lý thuyết hệ thống, cond($G(j\omega)$) liên quan nhiều tới khả năng điều khiển, giới hạn chất lượng điều khiển
  - Số điều kiện càng lớn thì hệ càng nhạy cảm với sai lệch tham số mô hình
  - Số điều kiện liên quan tới các chỉ tiêu chất lượng (miền tần số) có thể đạt được
  - Số điều kiện có phụ thuộc vào cách chỉnh thang/chuẩn hóa mô hình!

Loại bớt số biến vào/ra

- Dựa theo (Seborg et. al., 2000):
  - Sau khi chuẩn hóa mô hình, phân tích SVD và sắp xếp các giá trị suy biến theo thứ tự nhỏ dần, có thể loại bớt một số đầu vào/ra nếu

$$\sigma_{i+1} < \sigma_i / 10$$

- Ví dụ:

$$G(0) = \begin{bmatrix} 0.48 & 0.90 & -0.006 \\ 0.52 & 0.95 & 0.008 \\ 0.90 & -0.95 & 0.020 \end{bmatrix} \qquad \Lambda = \begin{bmatrix} -2.4376 & 3.0241 & 0.4135 \\ 1.2211 & -0.7617 & 0.5407 \\ 2.2165 & -1.2623 & 0.0458 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} 0.5714 & 0.3766 & 0.7292 \\ 0.6035 & 0.4093 & -0.6843 \\ -0.5561 & 0.8311 & 0.0066 \end{bmatrix} \qquad V = \begin{bmatrix} 0.0541 & 0.9984 & 0.0151 \\ 0.9985 & -0.0540 & -0.0068 \\ -0.0060 & 0.0154 & -0.9999 \end{bmatrix}$$

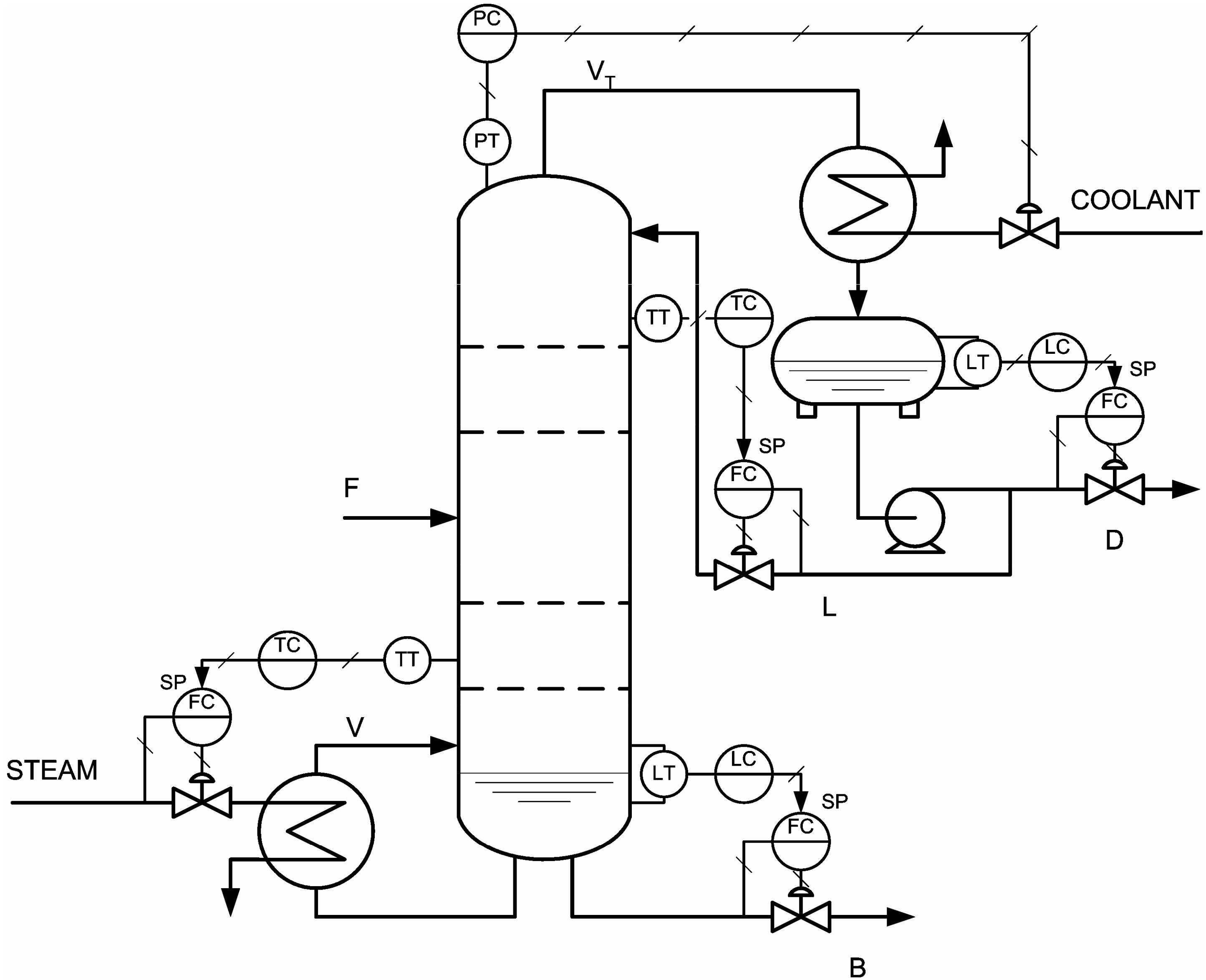
$$\Sigma = \begin{bmatrix} 1.618 & 0 & 0 \\ 0 & 1.143 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0097 \end{bmatrix}$$

=> Có thể cân nhắc loại bớt một cặp vào/ra

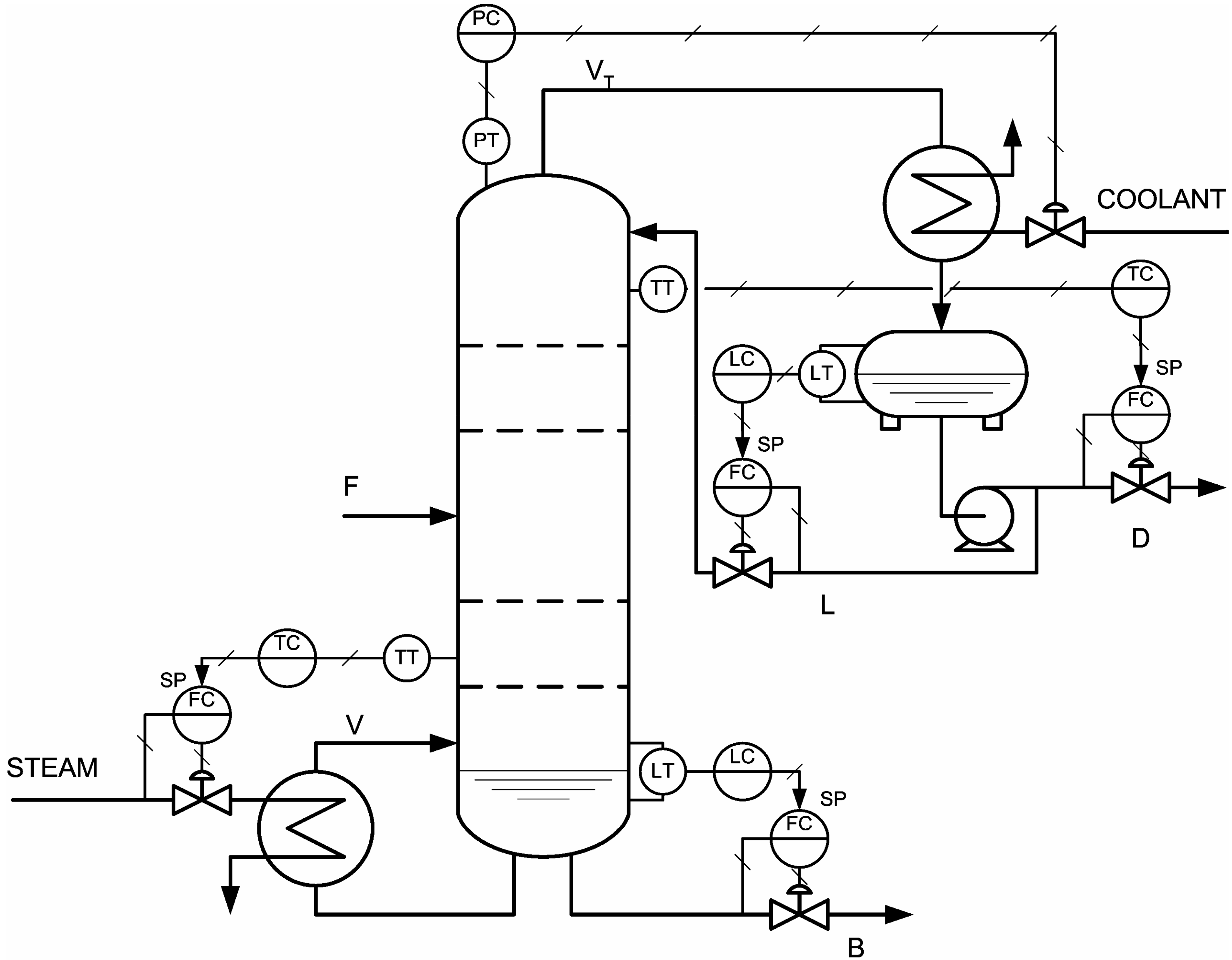
6.4 Thiết kế cấu trúc ĐK phi tập trung

- Vấn đề cặp đôi các biến vào/ra
- Tính ổn định của cấu trúc phi tập trung
- Chất lượng điều khiển của cấu trúc phi tập trung

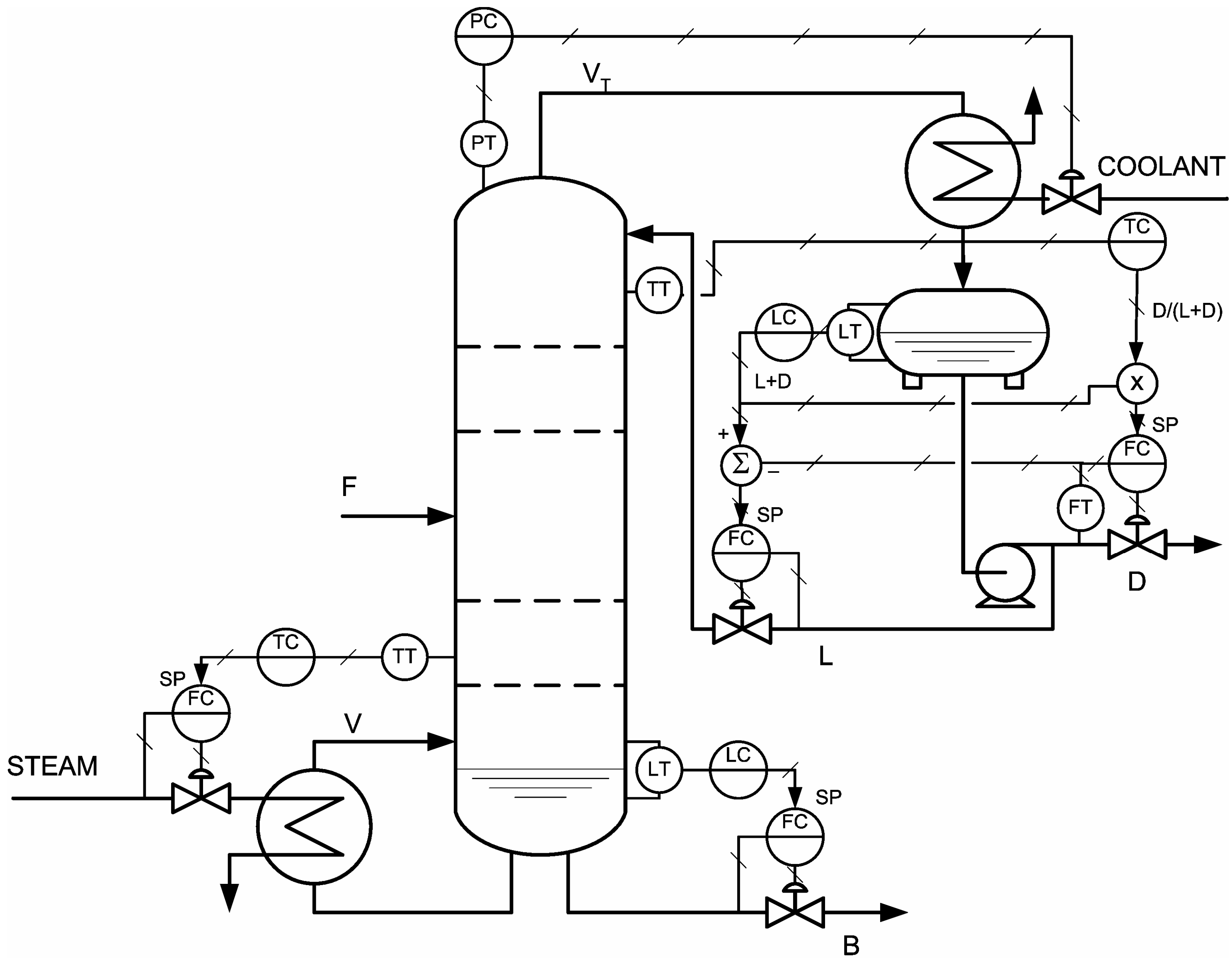
Ví dụ điều khiển tháp chưng: cấu hình LV



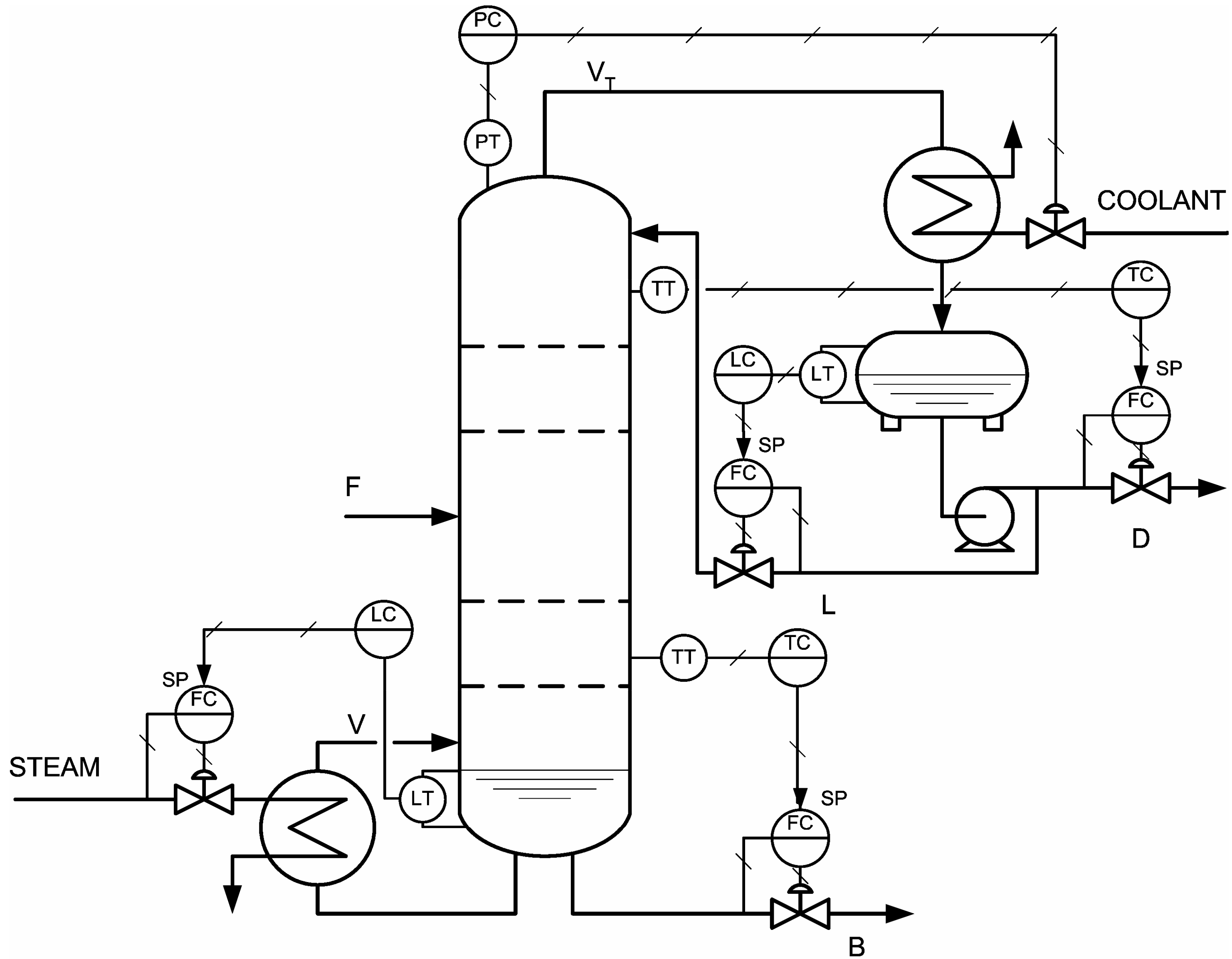
Cấu hình DV



Cấu hình D/(L+D) V



Cấu hình DB


PC
PT
V_T
COOLANT
TT
TC
LC
LT
SP
FC
F
D
L
LC
TT
TC
SP
FC
V
STEAM
LT
SP
FC
B

Ma trận khuếch đại tương đối (RGA)

- Khái niệm RGA (*Relative Gain Array*):
  - Bristol đưa ra năm 1966 (AC-11) => chỉ số đánh giá mức độ tương tác giữa các kênh vào/ra trong một hệ MIMO
  - Phục vụ lựa chọn và cặp đôi các biến vào/ra trong xây dựng cấu hình điều khiển phi tập trung
  - Có nhiều tính chất rất hay khác trong đánh giá tính ổn định và chất lượng của hệ điều khiển phi tập trung
- RGA của một ma trận số phức vuông *m* x *m* không suy biến là một ma trận số phức vuông *m* x *m*:

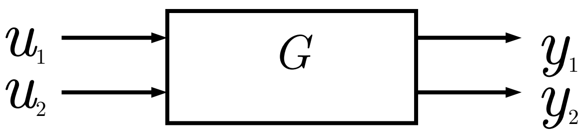
$$\mathrm{RGA}(G) \equiv \Lambda(G) \triangleq G \times (G^{-1})^T \qquad (3.17)$$

phép nhân từng phần tử (*tích Schur, tích Hadamard*)

Ví dụ: $G = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \; G^{-1} = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.2 \\ -0.3 & 0.1 \end{bmatrix}, \; \Lambda(G) = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.6 \\ 0.6 & 0.4 \end{bmatrix}$

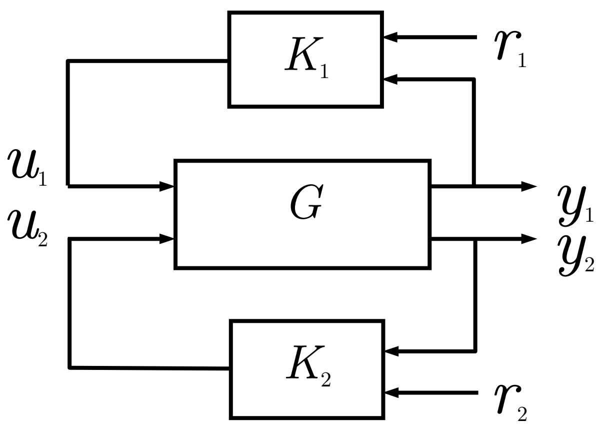
Xét hệ 2x2: $$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = G(s)u$$

Đối với quá trình ổn định, tại trạng thái xác lập ta có:



$$G(0) = \lim_{s->0} G(s) = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}$$

$$\left.\frac{\Delta y_1}{\Delta u_1}\right|_{u_2=\text{const}} = k_{11}$$



$$\Delta y_1 = k_{11}\Delta u_1 + k_{12}\Delta u_2$$
$$\Delta y_2 = k_{21}\Delta u_1 + k_{22}\Delta u_2$$

Để duy trì $\Delta y_2 = 0 \Rightarrow \Delta u_2 = -\dfrac{k_{21}}{k_{22}}\Delta u_1$

$$\Delta y_1 = \left(k_{11} - \frac{k_{12}k_{21}}{k_{22}}\right)\Delta u_1$$

$$\left.\frac{\Delta y_1}{\Delta u_1}\right|_{y_2=\text{const}} = k_{11} - \frac{k_{12}k_{21}}{k_{22}}$$

$$\lambda_{11} = \frac{\left.\dfrac{\Delta y_1}{\Delta u_1}\right|_{u_2=\text{const}}}{\left.\dfrac{\Delta y_1}{\Delta u_1}\right|_{y_2=\text{const}}} = \frac{k_{11}}{k_{11} - \dfrac{k_{12}k_{21}}{k_{22}}} = \frac{1}{1 - \dfrac{k_{12}k_{21}}{k_{11}k_{22}}}$$

$$\lambda_{12} = 1 - \lambda_{11}$$

$$\lambda_{21} = 1 - \lambda_{11}$$

$$\lambda_{22} = 1 - \lambda_{21} = \lambda_{11}$$

$$\mathrm{RGA}(G) \equiv \Lambda(G) \triangleq G \times (G^{-1})^T$$

$$= \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}^{-T}$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{21} \\ \lambda_{12} & \lambda_{22} \end{bmatrix}$$

Diễn giải ý nghĩa

- $\lambda_{11} = 1$: Hệ số khuếch đại tĩnh từ u1 tới y1 khi hở mạch cũng như khi khép mạch là hoàn toàn như nhau => hai kênh không có tương tác, cặp đôi dễ dàng: (u1, y1) và (u2, y2).
- $\lambda_{11} = 0$: Hệ số khuếch đại tĩnh từ u1 tới y1 phải bằng 0, u1 hoàn toàn không có ảnh hưởng tới y1 => cặp đôi (u1, y2) và (u2, y1): hai kênh điều khiển không có tương tác
- $0 < \lambda_{11} < 1$: Hệ số khuếch đại tĩnh từ u1 tới y1 khi hở mạch nhỏ hơn khi khép mạch. Tương tác giữa hai kênh điều khiển là mạnh nhất khi $\lambda_{11} = 0.5$, lựa chọn cặp đôi không dễ dàng.
- $\lambda_{11} > 1$: Khi khép mạch thì hệ số khuếch đại tĩnh từ u1 tới y1 bị giảm đi. Hai vòng điều khiển tương tác chống lại nhau. Giá trị λ_{11} càng lớn thì mức độ tương tác càng mạnh, tuy nhiên phương án cặp đôi ở đây vẫn không thể khác: (u1, y1) và (u2, y2).

Một số tính chất của ma trận RGA

- Tổng các phần tử của một hàng hoặc một cột = 1

$$\sum_i \lambda_{ij} = \sum_j \lambda_{ij} = 1.0$$

- Ma trận RGA không phụ thuộc vào việc chỉnh thang (chuẩn hóa mô hình):

$$\Lambda(G) = \Lambda(D_1 G D_2),\ \forall D_1 = \mathrm{diag}(d_{1i}), D_2 = \mathrm{diag}(d_{2i})$$

- Hoán đổi hai hàng (hai cột) của G dẫn tới hoán đổi hai hàng (hai cột) của $\Lambda(G)$
- $\Lambda(G)$ là một ma trận đơn vị nếu G là ma trận tam giác trên hoặc dưới (tương tác một chiều)
- G(s) là một ma trận hàm truyền thì $\Lambda(G(j\omega))$ được tính toán tương ứng với từng tần số ω trong dải tần quan tâm
- $\text{Số } RGA \triangleq \|\Lambda(G) - I\|_{\mathrm{sum}} = \sum_{i \neq j} |g_{ij}|$ là một chỉ số cho mức độ tương tác của quá trình (quan trọng nhất là xung quanh tần số cắt)

Phương pháp cặp đôi vào/ra dựa trên RGA

- Luật 1: Cặp đôi vào/ra (j,i) tương ứng với phần tử λ_{ij} có giá trị gần 1 xung quanh tần số cắt mong muốn của hệ kín, ưu tiên số lớn hơn 1
  – Dải tần mà $\lambda_{ij} \approx 1$ càng rộng càng tốt
  – Trong trường hợp đơn giản có thể chọn hàm truyền ở trạng thái xác lập (s=0)
- Luật 2: Tránh chọn $\lambda_{ij} << 1$ hoặc $\lambda_{ij} < 0$ cho hệ ở trạng thái xác lập

Ví dụ 1:

$$\Lambda = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} u_1 & u_2 & u_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{array} & \begin{bmatrix} 1.98 & 1.04 & -2.02 \\ -0.36 & 1.10 & 0.26 \\ -0.62 & -1.14 & 2.76 \end{bmatrix} \end{array}$$

Ví dụ 2:

$$\Lambda = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \end{array} \\ \begin{array}{c} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{array} & \begin{bmatrix} 0.931 & 0.150 & 0.080 & -0.164 \\ -0.011 & -0.429 & 0.286 & 1.154 \\ -0.135 & 3.314 & -0.270 & -1.910 \\ 0.215 & -2.030 & 0.900 & 1.919 \end{bmatrix} \end{array}$$

Tính ổn định của hệ điều khiển phi tập trung

Với quá trình G(s) ổn định

1. Nếu mỗi vòng đơn ổn định khi các vòng khác hở mạch và ma trận $\Lambda(G) = \mathrm{I}\ \forall\omega$ thì toàn hệ cũng ổn định => Chọn cặp đôi sao cho $\Lambda(G) \approx \mathrm{I}$ xung quanh tần số cắt
2. Nếu các bộ điều khiển sử dụng tác động tích phân và cặp đôi tương ứng với phần tử của $\Lambda(G(0))$ có giá trị âm thì:
   - Toàn hệ mất ổn định, hoặc
   - Vòng đơn tương ứng mất ổn định, hoặc
   - Toàn hệ mất ổn định khi vòng đơn tương ứng hở mạch
3. Nếu bộ điều khiển phản hồi *i* sử dụng tác động tích phân và ổn định khi các vòng khác hở mạch, và chỉ số Niederlinski

$$NI = \frac{\det G(0)}{\prod_{i=1}^{n} g_{ii}(0)} < 0$$

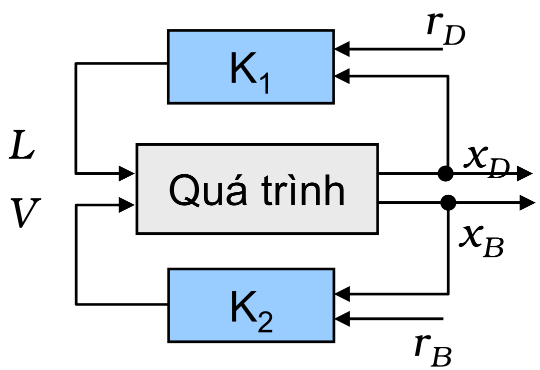
thì vòng điều khiển *i* đó sẽ mất ổn định. Với n=2 thì điều kiện trên là cần và đủ.

Xét tính ổn định: ví dụ tháp chưng cất

- Mô hình tĩnh (trạng thái xác lập)

$$\begin{bmatrix} x_D \\ x_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12,8 & -18,9 \\ 6,6 & -19,4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L \\ V \end{bmatrix}$$

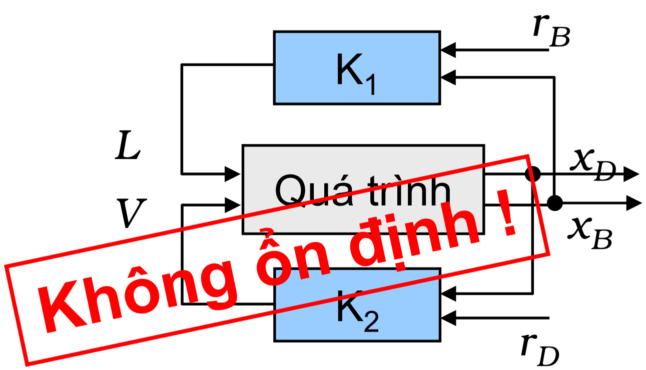
$$\Lambda \approx \begin{bmatrix} 2,01 & -1,01 \\ -1,01 & 2,01 \end{bmatrix}$$



$$\mathrm{NI} = \frac{\det G(0)}{\prod_{i=1}^{2} g_{ii}(0)} = \frac{-12,8 \cdot 19,4 + 18,9 \cdot 6,6}{-12,8 \cdot 19,4} = 0,498$$

$$\begin{bmatrix} x_D \\ x_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -18,9 & 12,8 \\ -19,4 & 6,6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V \\ L \end{bmatrix}$$

$$\Lambda \approx \begin{bmatrix} -1,01 & 2,01 \\ 2,01 & -1,01 \end{bmatrix}$$



$$\mathrm{NI} = \frac{\det G(0)}{\prod_{i=1}^{2} g_{ii}(0)} = \frac{-18,9 \cdot 6,6 + 12,8 \cdot 19,4}{-18,9 \cdot 6,6} = -0,991$$