C: Ôn tập một số kiến thức cơ bản

Lý thuyết thông tin

Biên soạn: Phạm Văn Sự

Bộ môn Xử lý tín hiệu và Truyền thông
Khoa Kỹ thuật Điện tử I
Học viện Công nghệ Bưu chính Viễn thông

01/08/2011

Các khái niệm cơ bản của Xác suất

Phép thử ngẫu nhiên, Kết cục

Phép thử ngẫu nhiên:

- Tung một đồng xu, quan sát sự xuất hiện mặt chẵn.
- Tung một đồng xu 3 lần, quan sát thứ tự xuất hiện của mặt chẵn và lẻ.

Phép thử ngẫu nhiên

Một phép thử ngẫu nhiên là một phép thử trong đó kết quả của phép thử thay đổi không thể đoán được khi thực hiện lặp lại phép thử trong cùng một điều kiện

Kết cục của phép thử ngẫu nghiên

Kết cục của phép thử ngẫu nhiên, hay còn gọi là kết quả của phép thử ngẫu nhiên, là kết quả thu được của phép thử mà không thể phân tích thành các kết quả khác.

- Tung một đồng xu, quan sát mặt xuất hiện: chẵn (head), hoặc lẻ (tail).
- Tung một con súc sắc, quan sát mặt xuất hiện: 1, hoặc 2, hoặc 3, hoặc 4, hoặc 5, hoặc 6.

Các khái niệm cơ bản của Xác suất

Không gian kết cục

Không gian kết cục

Không gian kết cục S của một phép thử ngẫu nhiên là một tập chứa đựng tất cả các kết cục có thể của một phép thử ngẫu nhiên đó.

- Ví dụ phép thử lật một con súc sắc:
  - chúng ta có thể mô tả $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ không gian kết cục khi quan sát số chấm của mặt xuất hiện.
  - hoặc $A = \{\text{chẵn}, \text{lẻ}\}$ không gian kết cục khi quan sát số chấm của mặt xuất hiện và phân loại số chấm là chẵn hay lẻ.
  - $\Rightarrow$ Tuy nhiên, A mô tả không đầy đủ, chẳng hạn khi chúng ta muốn biết kết cục phép thử có chia hết cho 3 hay không.
  - $\Rightarrow$ Có thể sử dụng nhiều hơn một không gian để miêu tả tập kết cục của một phép thử, tuy nhiên chỉ có duy nhất một không gian mô tả hết các thông tin của các kết cục.
- Không gian kết cục hữu hạn hoặc vô hạn đếm được: không gian kết cục rời rạc.
- Không gian kết cục vô hạn không đếm được: không gian kết cục liên tục.

Các khái niệm cơ bản của Xác suất

Sự kiện

Sự kiện

Sự kiện: là một tập con của không gian kết cục, nói cách khác, là một tập có thể có của các kết cục.

- Nếu kết cục của một phép thử là một thành phần (phần tử) của A, chúng ta nói rằng sự kiện A đã xảy ra.
- Một sự kiện chứa duy nhất một điểm (một mẫu) của không gian kết cục rời rạc thường được gọi là sự kiện đơn hay sự kiện nguyên tố (elementary event).
- S có thể coi là sự kiện tất nhiên, vì một phần tử của S chắc chắn phải xảy ra.
- $\emptyset$ được gọi là sự kiện không thể, vì một phần tử của nó không thể xảy ra (có).

Ví dụ

Chọn ngẫu nhiên một quả bóng từ rổ gồm 50 quả đánh số từ 1 đến 50.

- *Sự kiện một quả bóng có số chẵn được chọn:* $A = \{2, 4, \ldots, 48, 50\}$
- *Sự kiện một quả bóng có số chia hết cho 3 được chọn:* $A = \{3, 6, \ldots, 48\}$

Các khái niệm cơ bản của Xác suất
Các phép toán

Nếu A và B là các sự kiện, khi đó chúng ta có:

- $A \cup B$ là một sự kiện hoặc A hoặc B hoặc cả A và B.
- $A \cap B$ là một sự kiện đồng thời cả A và B, đôi khi chúng ta viết AB.
  - Nếu $A \cap B = \emptyset$ thì A và B là hai sự kiện xung khắc (mutually exclusive)
- $\bar{A}$ được gọi là bù của A, là sự kiện không phải A.
  - $A - B = A \cap \bar{B} \Rightarrow \bar{A} = S - A$.
- $A \subset B$ thì bất cứ khi nào A xảy ra thì B xảy ra.
- $A = B$ nếu chúng có cùng các kết cục.
- Một số tính chất:
  - $A \cup B = B \cup A$ và $A \cap B = B \cap A$
  - $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ và $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
  - $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ và $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
  - $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ và $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$

Các khái niệm cơ bản của Xác suất
Các tiên đề

Tiên đề 1

$0 \leq P[A]$

Tiên đề 2

$P[S] = 1$

Tiên đề 3

Nếu $A \cap B = \emptyset$ thì $P[A \cup B] = P[A] + P[B]$

Tiên đề 3'

Nếu dãy các sự kiện $A_1, A_2, \ldots$, có $A_i \cap A_j = \emptyset \; \forall i \neq j$ thì $P[\cup_{k=1}^{\infty} A_k] = \sum_{k=1}^{\infty} P[A_k]$

Các khái niệm cơ bản của Xác suất
Một số hệ quả

Hệ quả 1

$P[\bar{A}] = 1 - P[A]$

Hệ quả 2

$0 \leq P[A] \leq 1, \; P[\emptyset] = 0$

Hệ quả 3

$P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B], \; P[A \cup B] \leq P[A] + P[B]$

Hệ quả 4

Nếu $A \subset B$ thì $P[A] \leq P[B]$

Các khái niệm cơ bản của Xác suất
Xác suất có điều kiện

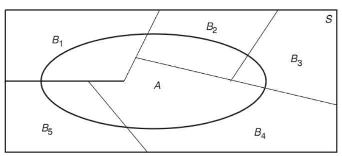
Xác suất có điều kiện

Xác suất có điều kiện $P[A|B]$ của sự kiện A với điều kiện biết sự kiện B đã xảy ra được định nghĩa:

$$P[A|B] = \frac{P[A \cap B]}{P[B]}$$

với $P[B] > 0$

- $\Rightarrow P[A \cap B] = P[A, B] = P[A|B]P[B] = P[B|A]P[A]$



Tập các sự kiện $B_1, B_2, \ldots, B_n$ tương ứng xung khắc:

- $B_i \cap B_j = \emptyset \; \forall i \neq j$
- $\cup_{i=1}^{n} B_i = S$
- $\Rightarrow P[A] = \sum_{i=1}^{n} P[A|B_i]P[B_i]$

Các khái niệm cơ bản của Xác suất

Định luật Bayes, Các sự kiện độc lập

Định luật Bayes

Gọi $B_1, B_2, \ldots, B_n$ là các phân hoạch của S. Giả sử một sự kiện A đã xảy ra, chúng ta có:

$$P[B_i|A] = \frac{P[A \cap B_i]}{P[A]} = \frac{P[A|B_i]P[B_i]}{\sum_{k=1}^{n} P[A|B_k]P[B_k]}$$

Các sự kiện độc lập

Hai sự kiện A và B được gọi là hai sự kiện độc lập nếu $P[A \cap B] = P[A]P[B]$

- $\Rightarrow$ Nếu A và B độc lập thì $P[A|B] = P[A]$ và $P[B|A] = P[B]$

Biến ngẫu nhiên

Biến ngẫu nhiên

Biến ngẫu nhiên

Một biến ngẫu nhiên (RV) X là một hàm thực hiện việc ánh xạ (gán) một số thực, $X(\xi)$, cho mỗi kết cục trong không gian kết cục của một phép thử ngẫu nghiên.

Ví dụ

Giả sử thực hiện việc tung một đồng xu 3 lần và quan sát dãy mặt xuất hiện.

- $S = \{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT\}$
- *Định một biến ngẫu nhiên X là số mặt chẵn xuất hiện trong 3 lần tung.*
- *X là một biến ngẫu nhiên có giá trị thuộc tập $S_X = \{0, 1, 2, 3\}$*

Biến ngẫu nhiên

Hàm phân bố xác suất

Hàm phân bố

Hàm phân bố xác suất, còn gọi là hàm phân bố tích lũy (cdf) của một biến ngẫu nhiên X được định nghĩa là xác suất của sự kiện $\{X \le x\}$

$$F_X(x) = P[X \le x] \quad \text{với} -\infty < x < \infty$$

- $0 \le F_X(x) \le 1$
- $\lim_{x\to\infty} F_X(x) = 1$
- $\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$
- $F_X(x)$ là một hàm không giảm theo x, nếu $a < b$ thì $F_X(a) \le F_X(b)$
- $F_X(x)$ là một hàm liên tục từ phía phải: với $h > 0$ thì $F_X(b) = \lim_{n\to 0} F_X(b+h) = F_X(b^+)$
- $P[a < X \le b] = F_X(b) - F_X(a)$
- $P[X = b] = F_X(b) - F_X(b^-)$
- $P[X > x] = 1 - F_X(x)$

Biến ngẫu nhiên

Các loại biến ngẫu nhiên

- Biến ngẫu nhiên rời rạc:
  - Là biến ngẫu nhiên mà hàm phân bố xác suất của nó là hàm bậc thang, liên tục phải với số bước nhảy đếm được.
  - Biến ngẫu nhiên rời rạc lấy các giá trị thuộc một tập hữu hạn hoặc vô hạn đếm được các phần tử.
  - Hàm phân bố xác suất rời rạc (pmf - probability mass function) của RV rời rạc là tập các xác suất $p_X(x_k) = p(x_k) = P[X = x_k]$ với các $x_k \in S$
  - $\Rightarrow$ cdf của biến ngẫu nhiên rời rạc: $F_X(x) = \sum_k p(x_k)u(x - x_k)$
- Biến ngẫu nhiên liên tục:
  - Là biến ngẫu nhiên mà hàm phân bố của nó liên tục tại mọi điểm.
  - Biến ngẫu nhiên liên tục lấy các giá trị thuộc một tập vô hạn không đếm được các phần tử.
  - $\Rightarrow$ cdf của biến ngẫu nhiên liên tục: $F_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt$
- Biến ngẫu nhiên hỗn hợp

Biến ngẫu nhiên

Hàm mật độ phân bố xác suất

Hàm mật độ phân bố xác suất

Hàm mật độ phân bố xác suất của một biến ngẫu nhiên X, gọi là pdf, nếu tồn tại được định nghĩa là đạo hàm của hàm phân bố xác suất:

$$f_X(x) = f(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$$

- $f(x) \geq 0$
- $P[a \leq X \leq b] = \int_a^b f(x)dx$
- $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$
- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

Với biến ngẫu nhiên rời rạc:

- $f_X(x) = \sum_k p(x_k)\delta(x - x_k)$

Biến ngẫu nhiên

Hàm phân bố và Hàm mật độ phân bố xác suất có điều kiện

Hàm phân bố xác suất có điều kiện

$$F_X(x|A) = \frac{P[\{X \leq x\} \cap A]}{P[A]} \quad \text{nếu } P[A] > 0$$

Hàm mật độ phân bố xác suất có điều kiện

$$f(x|A) = \frac{d}{dx}F_X(x|A)$$

Biến ngẫu nhiên

Một số biến ngẫu nhiên quan trọng

Biến ngẫu nhiên phân nhị thức - Binomial RV

Giả sử thực hiện một phép thử ngẫu nhiên n lần độc lập nhau. Gọi X là biến ngẫu nhiên mô tả số lần một sự kiện A nào đó xảy ra trong n lần thử. Khi đó, X có pmf:

$$P[X = x_k] = p(x_k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

Biến ngẫu nhiên phân bố đều - Uniform RV

Biến ngẫu nhiên phân bố đồng đều trên $[a, b]$ có hàm mật độ phân bố xác suất

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{các khoảng còn lại} \end{cases}$$

Biến ngẫu nhiên

Một số biến ngẫu nhiên quan trọng (cont.)

Biến ngẫu nhiên phân bố chuẩn - Gaussian (Normal) RV

Biến ngẫu nhiên phân bố chuẩn $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ có hàm mật độ phân bố xác suất

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad \text{với } -\infty \leq x \leq \infty$$

Biến ngẫu nhiên phân bố theo hàm mũ - Exponential RV

Biến ngẫu nhiên phân bố theo hàm mũ với tham số λ có hàm mật độ phân bố xác suất

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \end{cases}$$

Biến ngẫu nhiên

Hàm của biến ngẫu nhiên

- X là một biến ngẫu nhiên, $g(x)$ là một hàm giá trị thực.
  - $Y = g(X)$ cũng là một biến ngẫu nhiên
  - Xác suất của Y lấy các giá trị khác nhau phụ thuộc vào hàm $g(.)$ và cdf của X
- $Y = aX + b$, với a, b là các hằng số, $a \neq 0$
  - $f_Y(y) = \frac{1}{|a|} f_X(\frac{y-b}{a})$

Biến ngẫu nhiên

Kỳ vọng của biến ngẫu nhiên

Kỳ vọng của một biến ngẫu nhiên

Giá trị kỳ vọng của một biến ngẫu nhiên X, hay còn gọi là giá trị trung bình (expected value, mean) được định nghĩa:

$$\bar{X} = E[X] = \int_S tf(t)dt$$

trong đó S là miền trên đó hàm pdf $f(x)$ xác định.

- Nếu X là một biến ngẫu nhiên rời rạc: $\bar{X} = E[X] = \sum_k x_k p(x_k)$
- $E[X] = \mu$
- $E[X]$ được định nghĩa nếu tích phân/tổng là hội tụ tuyệt đối
- Với các biến ngẫu nhiên mà tích phân/tổng trên không hội tụ, thì kỳ vọng không tồn tại

Biến ngẫu nhiên

Kỳ vọng của hàm biến ngẫu nhiên

Kỳ vọng của một hàm biến ngẫu nhiên

Cho một biến ngẫu nhiên X, $g(.)$ là một hàm giá trị thực, xét $Y = g(X)$, khi đó kỳ vọng hay còn gọi là giá trị trung bình (expected value, mean) của biến ngẫu nhiên Y được định nghĩa:

$$\bar{Y} = E[Y] = \int_S g(x)f(x)dx$$

trong đó S là miền trên đó hàm pdf $f(x)$ xác định.

- $E[c] = c$
- $E[cX] = cE[X]$
- $\Rightarrow E[aX + b] = aE[X] + b$
- $Y = \sum_{k=1}^{n} g_k(X) \Rightarrow E[Y] = \sum_{k=1}^{n} E[g_k(X)]$

Biến ngẫu nhiên

Phương sai của hàm biến ngẫu nhiên

Phương sai của một biến ngẫu nhiên

Phương sai (variance) của biến ngẫu nhiên X được định nghĩa:

$$VAR[X] = E[(X - \bar{X})^2]$$

- $STD[X] = \sqrt{VAR[X]}$: độ lệch chuẩn (standard deviation)
- $VAR[X] = E[X^2] - E[X]^2$
- $VAR[X] = \sigma_X^2$
- $VAR[X] = \int_S (x - \mu)^2 f(x)dx$
- $VAR[c] = 0$, $VAR[X + c] = VAR[X]$
- $VAR[cX] = c^2 VAR[X]$

Biến ngẫu nhiên
Cặp biến ngẫu nhiên

Cặp biến ngẫu nhiên rời rạc

Với các biến ngẫu nhiên rời rạc X và Y, định nghĩa một biến ngẫu nhiên 2 chiều, còn gọi là cặp biến ngẫu nhiên $Z = (X, Y)$ lấy các giá trị từ một tập đếm được $S = \{(x_k, y_l), k = 1, 2, ..., l = 1, 2, ...\}$. Khi đó, pmf hợp (joint pmf) của Z được định nghĩa là:

$$p_{X,Y}(x_k, y_l) = p(x_k, y_l) = P[\{X = x_k\} \cap \{Y = y_l\}] = P[X = x_k, Y = y_l]$$

- $P[X \text{ thuộc } A] = \sum\sum_{(x_k,y_l)\in A} p(x_k, y_l)$
- $\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} p(x_k, y_l) = 1$
- $p_X(x_k) = p(x_k) = P[X = x_k] = P[X = x_k, Y = \text{bất cứ gì}] = \sum_{l=1}^{\infty} p(x_k, y_l)$
- $\Rightarrow p(y_l) = \sum_{k=1}^{\infty} p(x_k, y_l)$

Biến ngẫu nhiên
Hàm phân bố xác suất đồng thời của cặp biến ngẫu nhiên

Hàm phân bố xác suất đồng thời - Joint cdf

Hàm phân bố xác suất đồng thời của cặp biến ngẫu nhiên X và Y được định nghĩa là xác suất của một sự kiện $\{X \le x_1\} \cap \{Y \le y_1\}$

$$F_{X,Y}(x_k, y_l) = P[X \le x_k, Y \le y_l]$$

- Nếu $x_1 \le x_2$ và $y_1 \le y_2$ thì $F_{X,Y}(x_1, y_1) \le F_{X,Y}(x_2, y_2)$
- $F_{X,Y}(-\infty, y_1) = F_{X,Y}(x_1, -\infty) = 0$
- $F_{X,Y}(\infty, \infty) = 1$
- $F_X(x) = F_{X,Y}(x, \infty) = P[X \le x, Y < \infty] = P[X \le x]$
- $\Rightarrow F_Y(y) = F_{X,Y}(\infty, y) = P[Y \le y]$

Biến ngẫu nhiên
Hàm mật độ phân bố xác suất đồng thời của cặp biến ngẫu nhiên

Hàm mật độ phân bố xác suất đồng thời - Joint pdf

Một hàm không âm $f_{X,Y}(x, y)$ được gọi là hàm mật độ phân bố xác suất đồng thời được định nghĩa trên mặt phẳng thực sao cho

$$P[(X, Y) \text{ thuộc } A] = \int\int_S f_{X,Y}(u, v)dudv$$

- $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y)dxdy = 1$
- $F_{X,Y}(x, y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(u, v)dudv$
- $\Rightarrow f_{X,Y}(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x\partial y}F_{X,Y}(x, y)$
- $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, u)du$
- $\Rightarrow f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(u, y)du$

Biến ngẫu nhiên
Các biến ngẫu nhiên độc lập

Các biến ngẫu nhiên độc lập

Các biến ngẫu nhiên X và Y được gọi là độc lập nhau nếu bất cứ sự kiện A_1 nào được xác định bởi X độc lập với bất cứ sự kiện A_2 nào xác định bởi Y

- $P[X \text{ thuộc } A_1, Y \text{ thuộc } A_2] = P[X \text{ thuộc } A_1]P[Y \text{ thuộc } A_2]$
- $p_{X,Y}(x_k, y_l) = p(x_k, y_l) = p_X(x_k)p_Y(y_l) = p(x_k)p(y_l)$, $\forall x_k$ và y_l
- $F_{X,Y}(x, y) = F_X(x)F_Y(y)$, $\forall x$ và y
- $f_{X,Y}(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$, $\forall x$ và y
- Nếu X và Y là hai biến ngẫu nhiên độc lập, $g(.)$ và $h(.)$ là các hàm giá trị thực $\Rightarrow Z = g(X)$ và $T = h(Y)$ cũng là hai biến ngẫu nhiên độc lập.

Biến ngẫu nhiên

Xác suất có điều kiện

- Nếu X và Y là các biến ngẫu nhiên rời rạc, phân bố rời rạc có điều kiện (conditional pmf) của Y với điều kiện $X = x_k$

$$p_Y(y_l|x_k) = p(y_l|x_k) = \frac{p_{X,Y}(x_k, y_l)}{p_X(x_k)}$$

- Nếu X và Y là các biến ngẫu nhiên liên tục, hàm mật độ phân bố có điều kiện (conditional pdf) của Y với điều kiện $X = x$

$$f_Y(y|x) = f(y|x) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_X(x)}$$

Biến ngẫu nhiên

Kỳ vọng có điều kiện

- Kỳ vọng có điều kiện (conditional expectation) của Y với điều kiện $X = x$ được định nghĩa là:

$$E[Y|x] = \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y|x) dy$$

- Nếu X và Y là các biến ngẫu nhiên rời rạc, kỳ vọng có điều kiện của Y với điều kiện $X = x_k$

$$E[Y|x_k] = \sum_{y_l} y_l p_Y(y_l|x_k) dy$$

- Có thể xem $g(x) = E[Y|x] \Rightarrow g(X) = E[Y|X]$
  - $E[Y] = E[E[Y|X]] = \int_{-\infty}^{\infty} E[Y|x] f_X(x) dx$ với X là biến ngẫu nhiên liên tục
  - $E[Y] = E[E[Y|X]] = \sum_{x_k} E[Y|x_k] p_X(x_k)$ với X là biến ngẫu nhiên rời rạc
  - $\Rightarrow E[h(Y)] = E[E[h(Y)|X]]$ với $h(.)$ là hàm giá trị thực

Biến ngẫu nhiên

Sự tương quan và Covariance của hai biến ngẫu nhiên

- Moment đồng thời (joint moment) bậc jk của hai biến ngẫu nhiên X và Y được định nghĩa:

$$E[X^j Y^k] = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^j y^k f_{X,Y}(x, y) dx dy & \text{Biến ngẫu nhiên liên tục} \\ \sum_i \sum_n x_i^j y_n^k p_{X,Y}(x_i, y_n) & \text{Biến ngẫu nhiên rời rạc} \end{cases}$$

  - Khi $j = 1$ và $k = 1 \Rightarrow E[XY]$: sự tương quan giữa X và Y
  - Nếu $E[XY] = 0 \Rightarrow X$ và Y trực giao
- Moment trung tâm (central moment) bậc jk của hai biến ngẫu nhiên X và Y được định nghĩa:

$$E[(X - \bar{X})^j (Y - \bar{Y})^k]$$

  - Khi $j = 2$ và $k = 0 \Rightarrow VAR[X]$; Khi $j = 0$ và $k = 2 \Rightarrow VAR[Y]$;
  - Khi $j = k = 1 \Rightarrow COV(X, Y)$
  - Cặp các biến ngẫu nhiên độc lập có covariance bằng 0

Biến ngẫu nhiên

Hệ số tương quan của hai biến ngẫu nhiên

Hệ số tương quan - Correlation coefficient

Hệ số tương quan của hai biến ngẫu nhiên X và Y được định nghĩa là:

$$\rho_{X,Y} = \frac{COV(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{E[XY] - E[X]E[Y]}{\sigma_X \sigma_Y}$$

- $-1 \le \rho_{X,Y} \le 1$
- X và Y được gọi là không tương quan (uncorrelated) nếu $\rho_{X,Y} = 0$
- Nếu X và Y là độc lập thì X và Y không có sự tương quan.
- Nếu X và Y không tương quan thì chúng độc lập $\Leftarrow$ Không luôn đúng trong trường hợp các biến không phải biến ngẫu nhiên phân bố Gausse.
  - Có thể có các cặp biến X và Y không tương quan nhưng chúng không độc lập.

Quá trình ngẫu nhiên

Định nghĩa quá trình ngẫu nhiên

Quá trình ngẫu nhiên - Random process

Xét một phép thử ngẫu nhiên với kết cục ξ thuộc một không gian kết cục S. Giả sử rằng với mỗi kết cục $\xi \in S$, chúng ta thực hiện việc gán một hàm theo thời gian:

$$X(t,\xi) \quad \text{với } t \in I$$

trong đó I là tập chỉ số thời gian. Khi đó, với mỗi giá trị $t_k \in I$ cố định, $X(t_k,\xi)$ được gọi là một biến ngẫu nhiên. Họ các biến ngẫu nhiên $\{X(t,\xi), t \in I\}$ được gọi là một quá trình ngẫu nhiên.

- Với mỗi ξ xác định, đồ thị hàm $X(t,\xi)$ được gọi là một thể hiện, một đường mẫu, một hàm mẫu của QTNN.
- Thường ký hiệu một quá trình ngẫu nhiên là $X(t)$.
- Nếu tập I là đếm được thì QTNN được gọi là QTNN với thời gian rời rạc.
  - Thường sử dụng chỉ số thời gian rời rạc n và QTNN rời rạc X_n
- Nếu tập I là liên tục thì quá trình ngẫu nhiên được gọi là QTNN với thời gian liên tục.

Quá trình ngẫu nhiên

Xác định một quá trình ngẫu nhiên

Gọi X_1, X_2, ..., X_k là k biến ngẫu nhiên thu được bằng cách lấy mẫu một quá trình ngẫu nhiên $X(t,\xi)$ tại các thời điểm t_1, t_2, ..., t_k. Nói cách khác:

$$X_1 = X(t_1,\xi),\ X_2 = X(t_2,\xi),\ \ldots,\ X_k = X(t_k,\xi)$$

Khi đó đặc trưng đồng thời (joint behaviour) của quá trình ngẫu nhiên tại k thời điểm được xác định bởi phân bố xác suất đồng thời của véc-tơ biến ngẫu nhiên $(X_1, X_2, \ldots, X_k)$

Một quá trình ngẫu nhiên (stochastic process) được xác định bởi tập các hàm phân bố xác suất đồng thời (joint cdf) bậc k

$$F_{X_1,X_2,\ldots,X_k}(x_1,x_2,\ldots,x_k) = P[X_1 \le x_1, X_2 \le x_2, \ldots, X_k \le x_k]$$

với giá trị k nào đó và với mọi lựa chọn các thời điểm lấy mẫu t_1, t_2, ..., t_k

Quá trình ngẫu nhiên

Xác định một quá trình ngẫu nhiên (cont.)

- Nếu quá trình ngẫu nhiên rời rạc, thì nó được xác định bởi tập các phân bố xác xuất rời rạc (pmf)

$$p_{X_1,X_2,\ldots,X_k}(x_1,x_2,\ldots,x_k) = P[X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_k = x_k]$$

- Nếu quá trình ngẫu nhiên liên tục, thì nó được xác định bởi tập các hàm mật độ phân bố xác suất $f_{X_1,X_2,\ldots,X_k}(x_1,x_2,\ldots,x_k)$

Một quá trình ngẫu nhiên $X(t)$ tăng độc lập (independent increments) nếu với mọi giá trị k và mọi lựa chọn các thời điểm lấy mẫu $t_1 < t_2 < \cdots < t_k$, các biến ngẫu nhiên $X(t_2) - X(t_1)$, $X(t_3) - X(t_2)$, ..., $X(t_k) - X(t_{k-1})$ là các biến ngẫu nhiên độc lập.

Quá trình ngẫu nhiên

Xác định một quá trình ngẫu nhiên (cont.)

Một quá trình ngẫu nhiên $X(t)$ được gọi là quá trình Markov nếu tương lai của quá trình với điều kiện hiện tại xác định là độc lập với quá khứ, nói cách khác với mọi k và mọi lựa chọn thời điểm lấy mẫu $t_1 < t_2 < \cdots < t_k$ và với mọi x_1, x_2, ..., x_k

$$f_{X(t_k)}(x_k|X(t_{k-1}) = x_{k-1}, \ldots, X(t_1) = x_1) = f_{X(t_k)}(x_k|X(t_{k-1}) = x_{k-1})$$

với biến ngẫu nhiên liên tục, và

$$P[X(t_k) = x_k|X(t_{k-1}) = x_{k-1}, \ldots, X(t_1) = x_1] = P[X(t_k) = x_k|X(t_{k-1}) = x_{k-1})$$

với biến ngẫu nhiên rời rạc.

- Một quá trình ngẫu nhiên $X(t)$ tăng độc lập là một quá trình Markov.
- Một quá trình ngẫu nhiên Markov chưa chắc đã là một quá trình ngẫu nhiên tăng độc lập.

Quá trình ngẫu nhiên

Giá trị trung bình

Giá trị trung bình $m_X(t)$ của một quá trình ngẫu nhiên $X(t)$ được xác định bởi:

$$m_X(t) = E[X(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X(t)}(x)dx$$

trong đó $f_{X(t)}(x)$ là pdf của $X(t)$

- $m_X(t)$ thường là hàm của thời gian.
  - Xu hướng biểu hiện đặc trưng của $X(t)$ được phản ánh qua sự thay đổi của $m_X(t)$ với thời gian.
- $E[X(t) + Y(t)] = E[X(t)] + E[Y(t)]$
- $E[aX(t)] = aE[X(t)]$
- Nếu $E[X(t)Y(t)] = E[X(t)]E[Y(t)]$ thì $X(t)$ và $Y(t)$ được gọi là độc lập tuyến tính (linearly independent) hoặc không tương quan (uncorrelated)
- Nếu $f_{X(t),Y(t)}(x,y) = f_{X(t)}(x)f_{Y(t)}(y)$ thì $X(t)$ và $Y(t)$ được gọi là độc lập thống kê (statistically independent)

Quá trình ngẫu nhiên

Hàm tự tương quan, Autocovariance

Hàm tự tương quan $R_X(t_1, t_2)$ của một quá trình ngẫu nhiên $X(t)$ được xác định bởi Moment đồng thời của $X(t_1)$ và $X(t_2)$:

$$R_X(t_1, t_2) = E[X(t_1)X(t_2)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy f_{X(t_1),X(t_2)}(x,y)dxdy$$

trong đó $f_{X(t_1),X(t_2)}(x,y)$ là pdf bậc hai của $X(t)$

- $R_X(t_1, t_2)$ thường là hàm của thời gian t_1 và t_2.
- $R_X(t_1, t_2)$ đo lường sự phụ thuộc giữa các giá trị của một quá trình ngẫu nhiên ở các thời điểm khác nhau
  - Mô tả sự thay đổi theo thời gian của tín hiệu ngẫu nhiên.

Autocovariance $C_X(t_1, t_2)$ của một quá trình ngẫu nhiên $X(t)$ được định nghĩa là covariance của $X(t_1)$ và $X(t_2)$:

$$C_X(t_1, t_2) = E[\{X(t_1) - m_X(t_1)\}\{X(t_2) - m_X(t_2)\}] = R_X(t_1, t_2) - m_X(t_1)m_X(t_2)$$

Quá trình ngẫu nhiên

Hàm tự tương quan, Autocovariance (cont.)

Variance của $X(t)$ được định nghĩa là:

$$VAR[X(t)] = E[(X(t) - m_X(t))^2] = C_X(t,t)$$

Hệ số tương quan của $X(t)$ được định nghĩa là hệ số tương quan của $X(t_1)$ và $X(t_2)$:

$$\rho_X(t_1, t_2) = \frac{C_X(t_1, t_2)}{\sqrt{C_X(t_1, t_1)}\sqrt{C_X(t_2, t_2)}}$$

- $-1 \leq \rho_X(t_1, t_2) \leq 1$

Quá trình ngẫu nhiên

Hàm tương quan chéo

Hàm tương quan chéo $R_{X,Y}(t_1, t_2)$ của các QTNN $X(t)$ và $Y(t)$ được xác định bởi:

$$R_{X,Y}(t_1, t_2) = E[X(t_1)Y(t_2)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy f_{X(t_1),Y(t_2)}(x,y)dxdy$$

trong đó $f_{X(t_1),Y(t_2)}(x,y)$ là pdf đồng thời bậc hai của $X(t)$ và $Y(t)$

- QTNN $X(t)$ và $Y(t)$ được gọi là trực giao nếu $R_{X,Y}(t_1, t_2) = 0 \; \forall t_1$ và t_2.
- $R_{X,Y}(t_1, t_2)$ đo lường sự phụ thuộc giữa hai tín hiệu ngẫu nhiên khác nhau.

Cross-covariance $C_{X,Y}(t_1, t_2)$ của các QTNN $X(t)$ và $Y(t)$ được xác định bởi:

$$C_{X,Y}(t_1, t_2) = E[\{X(t_1) - m_X(t)\}\{Y(t_2) - m_Y(t_2)\}] = R_{X,Y}(t_1, t_2) - m_X(t_1)m_Y(t_2)$$

- QTNN $X(t)$ và $Y(t)$ được gọi là không tương quan nếu $C_{X,Y}(t_1, t_2) = 0 \; \forall t_1$ và t_2.

Quá trình ngẫu nhiên

Trung bình theo thời gian của một quá trình ngẫu nhiên

Trung bình theo thời gian (time average) của một thể hiện của quá trình ngẫu nhiên được định nghĩa:

$$< X(t) >_T = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} X(t,\xi)dt$$
$$< X_n >_T = \frac{1}{2T+1}\sum_{n=-T}^{T} X_n$$

Trung bình theo thời gian (time average) của một thể hiện của quá trình ngẫu nhiên được định nghĩa:

$$< X(t+\tau)X(t) >_T = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} X(t+\tau,\xi)X(t,\xi)dt$$
$$< X_{n+k}X_n >_T = \frac{1}{2T+1}\sum_{n=-T}^{T} X_{n+k}X_n$$

Quá trình ngẫu nhiên

Quá trình Ergodic

Với $X(t)$ là một quá trình WSS với $m_X(t) = m$ thì

$$\lim_{T\to\infty} < X(t) >_T = m$$

theo nghĩa bình phương trung bình, $E[(< X(t) >_T - m)^2] \to 0$ nếu và chỉ nếu

$$\lim_{T\to\infty} VAR[< X(t) >_T] = 0$$

Định nghĩa (Quá trình Ergodic)

Một quá trình ngẫu nhiên WSS $X(t)$ thỏa mãn hai điều kiện:

$$< X(t) >_T = E[X(t)]$$
$$< X(t+\tau)X(t) >_T = E[X(t+\tau)X(t)] = R_X(\tau)$$

thì được gọi là quá trình Ergodic.

- Với một quá trình Ergodic, một số hàm (giá trị trung bình, tự tương quan,...)

Quá trình ngẫu nhiên

Các quá trình ngẫu nhiên dừng

Một quá trình ngẫu nhiên với thời gian rời rạc hoặc liên tục $X(t)$ được gọi là một quá trình ngẫu nhiên dừng (stationary) nếu hàm phân bố đồng thời của bất cứ tập mẫu nào đều không phụ thuộc vào việc chọn gốc thời gian quan sát.

$$F_{X(t_1),\ldots,X(t_k)}(x_1,\ldots,x_k) = F_{X(t_1+\tau),\ldots,X(t_k+\tau)}(x_1,\ldots,x_k)$$

$\forall\tau$, k và các thời điểm lấy mẫu $t_1, \ldots, t_k$

Hai quá trình ngẫu nhiên $X(t)$ và $Y(t)$ được gọi là dừng đồng thời (jointly stationary) nếu hàm phân bố đồng thời (joint cdf) của $X(t_1), \ldots, X(t_k)$ và $Y(t_1'), \ldots, Y(t_j')$ không phụ thuộc vào việc chọn gốc thời gian quan sát với mọi k, j và các thời điểm lấy mẫu $t_1, \ldots, t_k$ và $t_1', \ldots, t_j'$.

- cdf bậc 1 (first-order cdf) của một quá trình dừng phải không phụ thuộc vào thời gian: $F_{X(t)}(x) = F_{X(t+\tau)}(x) = F_X(x)\ \forall t, \tau$
  - $\Rightarrow m_X(t) = E[X(t)] = m\ \forall t, \tau$: không phụ thuộc vào thời gian
  - $\Rightarrow VAR[X(t)] = E[(X(t) - m)^2] = \sigma^2\ \forall t$
- cdf bậc 2 của một QTNN dừng chỉ phụ thuộc vào khoảng thời gian giữa các

Quá trình ngẫu nhiên

Các quá trình ngẫu nhiên dừng theo nghĩa rộng

- Xác định một quá trình ngẫu nhiên là dừng: Không thể trong một số trường hợp.

Một quá trình ngẫu nhiên $X(t)$ dừng theo nghĩa rộng (WSS - Wide-sense stationary) nếu hàm giá trị trung bình và autocovariance (hoặc tương ứng là autocorrelation) thỏa mãn:

$$m_X(t) = m \quad \forall t$$
$$C_X(t_1,t_2) = C_X(t_1 - t_2) = C_X(\tau) \quad \forall t_1, t_2, \tau = t_1 - t_2$$

Hai quá trình ngẫu nhiên $X(t)$ và $Y(t)$ dừng đồng thời theo nghĩa rộng (jointly WSS) nếu chúng là những quá trình WSS và hàm cross-covariance chỉ phụ thuộc vào $t_1 - t_2$.

- Tất cả các quá trình ngẫu nhiên dừng đều là quá trình WSS.