Lý thuyết thông tin thống kê

Lý thuyết thông tin

Biên soạn: Phạm Văn Sự

Bộ môn Xử lý tín hiệu và Truyền thông
Khoa Kỹ thuật Điện tử I
Học viện Công nghệ Bưu chính Viễn thông

10/08/2011

Đo lường thông tin

Ví dụ 1

Ví dụ

Chúng ta nhận được một bức thư.

- **TH1**: Đã biết hoặc đoán biết chắc chắn nội dung của bức thư $\rightarrow$ không có độ bất định: bức thư không mang lại thông tin.
- **TH2**: Không biết và có thể đoán biết không chắc chắn nội dung của bức thư $\rightarrow$ có độ bất định: bức thư mang lại một lượng thông tin thông tin.
- **TH3**: Không biết và không thể đoán biết không chắc chắn nội dung của bức thư $\rightarrow$ độ bất định rất lớn: bức thư mang lại một lượng thông tin thông tin lớn.

$\Rightarrow$ Độ bất định: một đặc trưng quan trọng trong đo lường lượng thông tin.

- Lượng thông tin tỷ lệ thuận với độ bất định

$\Rightarrow$ Không có độ bất định: không có thông tin. $\Rightarrow$ Lượng thông tin thu được bằng

Đo lường thông tin

Ví dụ 2

Ví dụ

Một rổ đựng n bóng ($n = 1, 2, \dots$), các bóng được đánh nhãn từ 1 đến hết. Lấy ngẫu nhiên một bóng và quan sát nhãn của nó. Quan sát xác suất, độ bất định và lượng tin của sự kiện chúng ta lấy được một bóng có nhãn là "1".

n	Xác suất	Độ bất định
1	1	0
2	1/2	$\neq 0$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
∞	≈ 0	∞

Lượng thông tin: là một hàm giảm của xác suất xuất hiện của tin.

Đo lường thông tin

Lượng thông tin riêng

Gọi x là một tin với xác suất xuất hiện $p(x)$, gọi $I(x)$ là đại lượng biểu diễn *lượng thông tin mà chúng ta thu được khi biết rằng x đã xảy ra (hoặc một cách tương đương, lượng độ bất định chúng ta mất đi khi biết x đã xảy ra)*

1. $I(x)$: là một hàm của $p(x) \Rightarrow I(x) = I(p(x))$
   - $I(.)$ là liên tục của $p(x)$ với $p(x) \in [0, 1]$; $I(p(x) = 1) = 0$.
   - $I(.)$ là một hàm đơn điệu giảm theo $p(x)$.
   - $I(x) \geq 0$.
2. Nếu x và y là hai tin độc lập thì $I(x \cap y) = I(x) + I(y)$
   - $I(p(x) \times p(y)) = I(p(x)) + I(p(y))$.

Lượng thông tin riêng

Một tin (sự kiện) x với xác suất xuất hiện $p(x)$ thì việc nó xuất hiện sẽ mang lại lượng thông tin, hay còn gọi là lượng tin riêng/lượng thông tin tiên nghiệm, được xác định bởi:

$$I(x) = -log(p(x))$$

Đo lường thông tin

Đơn vị của lượng thông tin riêng (cont.)

- Cơ số 2: đơn vị [*bit*].
- Cơ số $e = 2,7\ldots$: đơn vị [*nat*].
- Cơ số 10: đơn vị [*harley*].

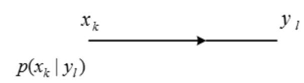
Ví dụ

Một bình đựng 2 viên bi mầu đen và ba viên bi màu trắng. Thực hiện việc lấy liên tiếp hai viên bi, bi đã được lấy không được bỏ lại bình. Gọi x là thông điệp cho chúng ta biết lấy được cả hai viên bi màu đen. Tính lượng tin của thông điệp x.

Đo lường thông tin

Lượng thông tin hậu nghiệm, lượng thông tin tổn hao, lượng thông tin chéo

Phát đi tin x_k, nhận được tin y_l, cho trước $p(x_k|y_l)$



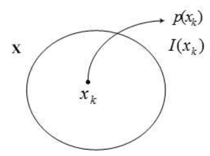
- $I(x_k|y_l) = -log(p(x_k|y_l))$: Lượng thông tin hậu nghiệm
- $I(x_k; y_l) = I(x_k) - I(x_k|y_l)$: Lượng thông tin chéo về x_k do y_l mang.
- $\Rightarrow I(x_k|y_l) = I(x_k) - I(x_k; y_l)$: Lượng thông tin tổn hao trong kênh.

Nhận xét:

- Kênh không có nhiễu: $I(x_k|y_l) = 0$; $I(x_k; y_l) = I(x_k)$
- Kênh bị đứt (bị nhiễu tuyệt đối): $I(x_k; y_l) = 0$, $I(x_k|y_l) = I(x_k)$.

Entropy

Entropy của nguồn rời rạc - Lượng tin trung bình thống kê của nguồn



X: nguồn rời rạc không nhớ (DMS) gồm các tin x_k xung khắc với xác suất xuất hiện $p(x_k)$

Định nghĩa (Entropy)

Entropy của nguồn rời rạc X là trung bình thống kê của lượng thông tin riêng của các phần tử x_k (xung khắc) thuộc nguồn, ký hiệu là $H(X)$.

$$H(X) = E[I(x_k)] = \sum_{k=1}^{N} p(x_k) I(x_k) = -\sum_{k=1}^{N} p(x_k)\log(p(x_k))$$
$$= E[-\log(p(x_k))]$$

- $H(X)$ còn được gọi là entropy một chiều của nguồn rời rạc.
- $H(X)$ có đơn vị của lượng thông tin (bit, nat, hartley).

Entropy

Entropy của nguồn rời rạc - Tính chất, ví dụ

- $H(X) \geq 0$, $H(X) = 0$ khi và chỉ khi $p(x_k) = 1$ và $p(x_r) = 0$ $(\forall r \neq k)$.
- $H(X) \leq \log|X| = \log(N)$, $H(X) = \log(N)$ khi và chỉ khi các x_k có phân bố xác suất đồng đều, $p(x_k) = 1/N\ \forall k$.
- $H(X)$ là một hàm chỉ phụ thuộc vào đặc tính thống kê của nguồn.
- $H_b(X) = (\log_b(a))H_a(X)$, $H_a(X)$: entropy được tính với cơ số a; Quy ước: $H(X)$ cơ số 2.

Bài toán

Qui ước: Một nguồn rời rạc X gồm các tin x_k $(k = 1, ..., N)$ với xác suất xuất hiện $p(x_k)$ $(0 \leq p(x_k) \leq 1, \sum_{k=1}^{N} p(x_k) = 1)$. Khi đó ta qui ước viết tập X như sau:

$$X = \{x_k\} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_N \\ p(x_1) & p(x_2) & \ldots & p(x_N) \end{pmatrix}$$

Tính entropy của nguồn X: $H(X) = ?$

Ví dụ

Tính $H(X)$ biết:

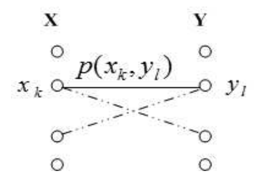
$$X = \{x_k\} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 1/2 & 1/4 & 1/8 & 1/8 \end{pmatrix}$$

Ví dụ

Tính Entropy của nguồn nhị phân rời rạc:

$$X = \{x_k\} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p & 1-p \end{pmatrix}$$

- Quy ước: $\lim_{\theta \to 0^+} \theta \log \frac{1}{\theta} = 0$
- Với $x > 0$ thì $x - 1 \geq \log(x) \geq 1 - \frac{1}{x}$, $=$ khi và chỉ khi $x = 1$.



Hình: Mô hình của cặp nguồn rời rạc X và Y

Định nghĩa (Entropy hợp)

Entropy hợp $H(X,Y)$ của một cặp nguồn rời rạc (X,Y) (còn gọi là Entropy của trường sự kiện đồng thời (X,Y)) với xác suất phân bố đồng thời của các tin x_k và y_l là $p(x_k, y_l)$ được cho bởi công thức:

$$\begin{aligned} H(X,Y) &= -\sum_{x_k \in X} \sum_{y_l \in Y} p(x_k, y_l) \log(p(x_k, y_l)) \\ &= E[-\log(p(x_k, y_l))]_{(x_k, y_k) \in (X,Y)} \end{aligned}$$

Định nghĩa (Entropy có điều kiện từng phần - Partial Conditional Entropy)

Cho hai nguồn rời rạc X, Y. $H(X|Y = y_l)$ được gọi là Entropy có điều kiện từng phần, là Entropy có điều kiện về một trường tin này khi đã nhận được một tin nhất định của nguồn kia.

$$\begin{aligned} H(X|Y = y_l) &= E[I(x_k|Y = y_l)]_{x_k \in X|Y = y_l} \\ &= \sum_{x_k \in X} p(x_k|Y = y_l) I(x_k|Y = y_l) \\ &= -\sum_{x_k \in X} p(x_k|Y = y_l) \log(x_k|Y = y_l) \\ &= -\sum_{x_k \in X} p(x_k|y_l) \log(x_k|y_l) \end{aligned}$$

$H(X|Y = y_l)$: lượng tin tổn hao trung bình của mỗi tin ở đầu phát khi đầu thu đã thu được y_l.

Định nghĩa (Entropy có điều kiện từng phần - Partial Conditional Entropy)

Cho hai nguồn rời rạc X, Y. $H(Y|X = x_k)$ được gọi là Entropy có điều kiện từng phần, là Entropy có điều kiện về một trường tin này khi đã phát đi một tin nhất định của nguồn kia.

$$\begin{aligned} H(Y|X = x_k) &= E[I(y_l|X = x_k)]_{y_l \in Y|X = x_k} \\ &= \sum_{y_l \in Y} p(y_l|X = x_k) I(y_l|X = x_k) \\ &= -\sum_{y_l \in Y} p(y_l|X = x_k) \log(y_l|X = x_k) \\ &= -\sum_{y_l \in Y} p(y_l|x_k) \log(y_l|x_k) \end{aligned}$$

$H(Y|X = x_k)$: lượng tin riêng trung bình chứa trong mỗi tin ở đầu thu khi đầu phát đã phát đi một tin x_k.

Entropy có điều kiện

Định nghĩa (Entropy có điều kiện)

Với một cặp nguồn rời rạc (X, Y) có xác suất phân bố hợp $p(x_k, y_l)$, xác xuất phân bố có điều kiện $p(x_k|y_l)$, Entropy có điều kiện $H(X|Y)$ được cho bởi công thức:

$$
\begin{aligned}
H(X|Y) &= E[H(X|Y=y_l)]_{y_l \in Y} = \sum_{y_l \in Y} p(y_l) H(X|Y=y_l) \\
&= -\sum_{y_l \in Y} p(y_l) \sum_{x_k \in X} p(x_k|y_l) \log(p(x_k|y_l)) \\
&= -\sum_{y_l \in Y} \sum_{x_k \in X} p(x_k, y_l) \log(p(x_k|y_l)) \\
&= E[-\log(p(X|Y))]_{p(x_k, y_l)}
\end{aligned}
$$

$H(X|Y)$: lượng tin riêng tổn hao trung bình của mỗi tin ở đầu phát khi đầu thu đã thu được một tin nào đó.

Entropy có điều kiện

Định nghĩa (Entropy có điều kiện)

Với một cặp nguồn rời rạc (X, Y) có xác suất phân bố hợp $p(x_k, y_l)$, , xác xuất phân bố có điều kiện $p(x_k|y_l)$, Entropy có điều kiện $H(Y|X)$ được cho bởi công thức:

$$
\begin{aligned}
H(Y|X) &= E[H(Y|X=x_k)]_{x_k \in X} = \sum_{x_k \in X} p(x_k) H(Y|X=x_k) \\
&= -\sum_{x_k \in X} p(x_k) \sum_{y_l \in Y} p(y_l|x_k) \log(p(y_l|x_k)) \\
&= -\sum_{x_k \in X} \sum_{y_l \in Y} p(x_k, y_l) \log(p(y_l|x_k)) \\
&= E[-\log(p(Y|X))]_{p(x_k, y_l)}
\end{aligned}
$$

$H(Y|X)$: lượng tin riêng trung bình chứa trong mỗi tin ở đầu thu khi đầu phát đã phát đi một tin nào đó.

Entropy có điều kiện

Các tính chất

$0 \le H(X|Y) \le H(X)$; $0 \le H(Y|X) \le H(Y)$

- Đạt đẳng thức phía phải khi và chỉ khi X và Y là độc lập: kênh bị đứt.
- Đạt đẳng thức phía trái khi và chỉ khi kênh hoàn hảo.

Nếu X và Y độc lập

- $H(X|Y = y_l) = H(X)$; $H(X|Y) = H(X)$.
- $H(Y|X = x_k) = H(Y)$; $H(Y|X) = H(Y)$.

Trường hợp tổng quát $H(X|Y) \neq H(Y|X)$.

$$H(X,Y) = H(Y,X) = H(X) + H(Y|X) = H(Y) + H(X|Y) H(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \sum_{i=1}^{n} H(X_i|X_{i-1}, \ldots, X_1)$$

Entropy có điều kiện

Các tính chất

$$H(X,Y) \le H(X) + H(Y) H(X_1, X_2, \ldots, X_n) \qquad \le \sum_{i=1}^{n} H(X_i)$$

- Xảy ra đẳng thức khi và chỉ khi X và Y độc lập: kênh bị đứt.

$H(X, Y|Z) = H(X|Z) + H(Y|X, Z)$.

Cho nguồn rời rạc X, $g()$ là một hàm mô tả quan hệ toán học, khi đó:

- $H(g(X)|X) = 0$
- $H(X|g(X)) \ge 0$
- $H(X) \ge H(g(X))$
  - Xảy ra đẳng thức khi và chỉ khi $g()$ là quan hệ toán học $1-1$.

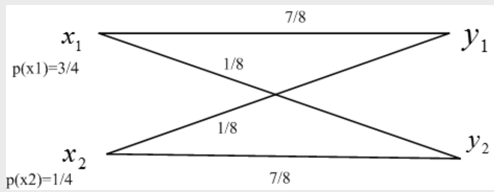
Entropy có điều kiện
Bài toán 2 (1)

Ví dụ
Cho hai nguồn rời rạc X và Y gồm các tin x_k $(k = 1,2)$ và y_l $(l = 1,2)$ tương ứng. Biết xác xuất phân bố đồng thời của các tin x_k và y_l là $p(x_k, y_l)$ được cho trong bảng sau. Tính $H(X)$, $H(Y)$, $H(X,Y)$, $H(X|Y)$ và $H(Y|X)$

$Y\backslash X$	0	1
0	0	1/3
1	1/3	1/3

Entropy có điều kiện
Bài toán 2 (2)

Ví dụ
Giả sử nguồn rời rạc X gồm các tin x_k $(k = 1,2)$ phát qua kênh có sơ đồ cho dưới đây, phía thu thu được nguồn Y gồm các tin y_1 $(l = 1,2)$. Tính $H(X)$, $H(Y)$, $H(X,Y)$, $H(X|Y)$ và $H(Y|X)$



Entropy có điều kiện
Bài toán 3

Ví dụ
Trong bộ tú lơ khơ 52 quân bài (không kể phăng teo). A thực hiện việc rút ra một quân bài bất kỳ.

1. *Tính số câu hỏi trung bình tối thiểu mà B cần đặc cho A để xác định được quân bài mà A rút. Biết rằng B chỉ sử dụng các câu hỏi dạng Đúng/Sai (Có/Không).*
2. *Nêu thuật toán hỏi giả rử rằng A đã rút ra quân 7 cơ, nêu các câu hỏi cần thiết của B, các câu trả lời tương ứng của A và các phán đoán tương ứng của B.*

Entropy tương đối và lượng thông tin tương hỗ
Entropy tương đối

Định nghĩa (Entropy tương đối - Relative Entropy)
Entropy tương đối, còn gọi là khoảng cách Kullback Leiber giữa hai phân bố rời rạc $p(x_k)$ và $q(x_k)$ của một nguồn rời rạc X được xác định bởi:

$$D(p||q) = \sum_{x_k \in X} p(x_k) \log\left(\frac{p(x_k)}{q(x_k)}\right)$$

- Quy ước: $0\log(\frac{0}{q}) = 0$; $p\log(\frac{p}{0}) = \infty$
- Tính chất:
  - $D(p||q) \geq 0$, $D(p||q) = 0$ nếu và chỉ nếu $p(x_k) = q(x_k)$
  - Tổng quát $D(p||q) \neq D(q||p)$
  - Không thỏa mãn $D(p||q) + D(q||r) \geq D(p||r) \Rightarrow$ không phải khoảng cách thông thường.

Entropy tương đối và lượng thông tin tương hỗ

Lượng thông tin tương hỗ

Định nghĩa (Lượng thông tin tương hỗ - Mutual Information)

Cho hai nguồn rời rạc X, Y có các xác suất phân bố hợp, phân bố riêng, và phân bố có điều kiện lần lượt là $p(x_k, y_k)$, $p_X(x_k) = p(x_k)$, $p_Y(y_l) = p(y_l)$, và $p(x_k|y_l)$. Lượng thông tin tương hỗ, còn gọi là lượng thông tin chéo trung bình của hai nguồn được xác định bởi:

$$
\begin{aligned}
I(X;Y) = E[I(x_k;y_l)] &= \sum_{x_k\in X}\sum_{y_l\in Y} p(x_k,y_l)\log\Big(\frac{p(x_k|y_l)}{p(x_k)}\Big)\\
&= \sum_{x_k\in X}\sum_{y_l\in Y} p(x_k,y_l)\log\Big(\frac{p(x_k,y_l)}{p(x_k)p(y_l)}\Big)\\
&= D(p(x_k,y_l)||p(x_k)p(y_l))
\end{aligned}
$$

- $I(X;Y)$: lượng thông tin mà X mang về Y cũng như lượng thông tin Y mang về X.
- $I(X;Y)$: lượng thông tin trung bình được truyền theo kênh rời rạc.

Entropy tương đối và lượng thông tin tương hỗ

Lượng thông tin tương hỗ - Các tính chất

$I(X;Y) \geq 0$
- Xảy ra đẳng thức khi và chỉ khi X và Y độc lập

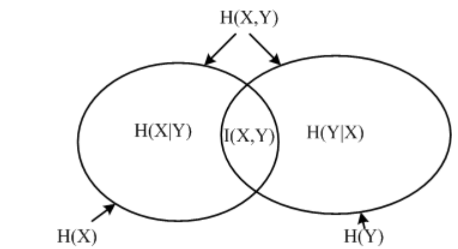
$I(X;Y) = I(Y;X)$
- Lượng thông tin mà X mang về Y cũng bằng lượng thông tin mà Y mang về X.

$I(X;Y) = H(X) - H(X|Y) = H(Y) - H(Y|X)$
- $I(X;Y)$: lượng giảm độ bất định trung bình của X do việc biết Y.

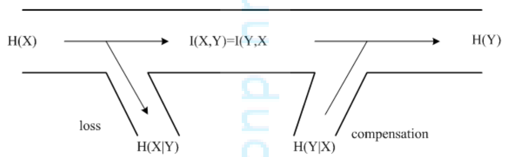
$I(X;Y) = H(X) + H(Y) - H(X,Y)$

$I(X;X) = H(X)$
- $H(X)$: lượng thông tin riêng trung bình của X.

Biểu diễn mối liên hệ giữa các đại lượng



(a) Biểu đồ Venn



(b) Sơ đồ kênh

Lượng thông tin tương hỗ có điều kiện

Định nghĩa

Lượng thông tin tương hỗ có điều kiện của nguồn rời rạc X và Y với nguồn cho trước Z được định nghĩa là:

$$
\begin{aligned}
I(X;Y|Z) &= H(X|Z) - H(X|Y,Z)\\
&= E\left[\log\left(\frac{p(X,Y|Z)}{p(X|Z)p(Y|Z)}\right)\right]_{p(x_k,y_l,z_m)}
\end{aligned}
$$

$I(X_1, X_2, \ldots, X_n; Y) = \sum_{i=1}^{n} I(X_i; Y|X_{i-1}, \ldots, X_1)$

$I(X;Y|Z) \geq 0$
- Xảy ra đẳng thức khi và chỉ khi X và Y độc lập có điều kiện với Z đã cho.

Lượng thông tin và quá trình xử lý dữ liệu

Định nghĩa (Chuỗi Markov)

Các biến ngẫu nhiên X, Y, và Z được gọi là tạo thành một chuỗi Markov theo thứ tự $X \to Y \to Z$ nếu xác suất phân bố có điều kiện của Z chỉ phụ thuộc vào Y và độc lập có điều kiện với X. Nói cách khác:

$$p(x_k, y_l, z_m) = p(x_k)p(y_l|x_k)p(z_m|y_l)$$

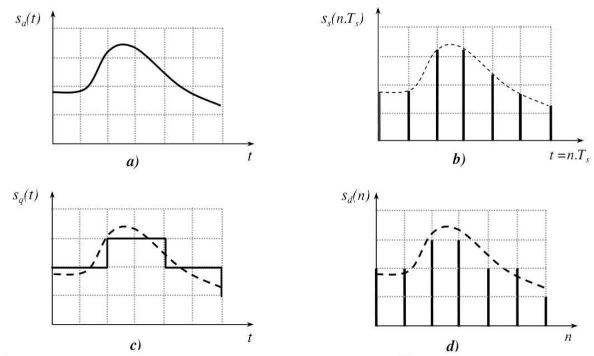
Định lý

Nếu các nguồn rời rạc là kết quả của các phép biến đổi dữ liệu theo quá trình $X \to Y \to Z$ thì $I(X;Y) \geq I(X;Z)$

- Không có phép biến đổi dữ liệu nào có thể làm tăng thông tin vốn có của dữ liệu.
- $g()$ là một hàm quan hệ toán học: $I(X;Y) \geq I(X;g(Y))$
- Nếu có $X \to Y \to Z$ thì $I(X;Y|Z) \leq I(X;Y)$

Tín hiệu liên tục, nguồn liên tục

Tín hiệu liên tục



Tín hiệu:

- Biểu diễn: hàm toán học của các biến độc lập
- Đặc trưng tín hiệu liên tục: Công suất phổ trung bình, bề rộng phổ

Tín hiệu liên tục, nguồn liên tục

Nguồn liên tục

Nguồn liên tục

Nguồn tin X phát ra các tin x có giá trị liên tục trong khoảng $x_{min} \div x_{max}$ với hàm mật độ phân bố xác suất $f(x)$

Mô hình toán học nguồn liên tục

- Biến ngẫu nhiên liên tục X với hàm mật độ phân bố xác suất $f(x)$

Entropy vi phân

Định nghĩa (Entropy vi phân - Differential Entropy)

Entropy vi phân của một nguồn liên tục X có hàm mật độ phân bố xác suất $f(x)$ được xác định bởi:

$$h(X) = -\int_S f(x)\log(f(x))dx$$

trong đó, S là miền xác định (support set) của X.

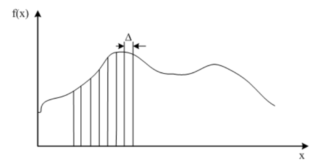
- $h(X)$ mặc định chỉ xem xét trên điều kiện các hàm liên tục, xác định và khả tích.
- $h(X) = h(f)$

Ví dụ

Cho X là một nguồn liên tục có hàm mật đồ phân bố xác suất đều (uniform distribution) trong khoảng $[a,b]$. Tính $h(X)$.

Entropy vi phân

Mối quan hệ giữa Entropy vi phân và Entropy rời rạc



- $X \to X^{\Delta} = \{x_i\}$ $(i\Delta \leq X \leq (i+1)\Delta)$.
- $p(X^{\Delta} = x_i) = p(x_i) = f(x_i)\Delta = \int_{i\Delta}^{(i+1)\Delta} f(x)dx$
- $\to H(X^{\Delta}) = -\sum_{-\infty}^{\infty} f(x_i)\Delta \log(f(x_i)\Delta) = -\sum_{-\infty}^{\infty} \Delta f(x_i)\log(f(x_i)) + \log(1/\Delta)$

Định lý

Một nguồn liên tục X với hàm mật độ phân bố xác suất f(x) khả tích theo tiêu chuẩn Riemann thì:

$$H(X^{\Delta}) + \log(\Delta) \to h(X) \text{ khi } \Delta \to 0$$

- Entropy của một nguồn rời rạc thu được từ nguồn liên tục X bằng phép lượng tử hóa sử dụng n bít có giá trị xấp xỉ bằng $h(X) + n$

Entropy vi phân

Minh họa Entropy của nguồn liên tục

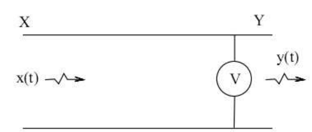
$\lim_{\Delta \to 0} \log(\frac{1}{\Delta}) \to \infty \Rightarrow H(X)$ lớn vô hạn.

Ví dụ

Xét việc truyền thông tin từ nguồn liên tục X đến nguồn Y bằng dây dẫn lý tưởng (không tổn hao, không nhiễu). Tín hiệu phát x(t) nhận các giá trị liên tục trong khoảng [0,1] (V). Ở đầu thu Y ta đặt một vôlt kế lý tưởng (tạp âm nội bằng 0, $Z_V = \infty$). Khi đó việc thu tín hiệu thỏa mãn $y(t) = x(t)$. Xem xét việc lượng tử hóa, và tính toán $H(X)$.

Lượng tử đều:

- 10 mức $\Delta = 0,1$: $X^{\Delta} = \{x_i\}$ $(i = \overline{1,10}) \Rightarrow H(X^{\Delta}) = \log(10)$.
- $\Delta = 0,01 \Rightarrow H(X^{\Delta}) = \log(100)$.
- $\Delta \to 0 \Rightarrow H(X^{\Delta}) \to H(X) \to \infty$.



Entropy vi phân

Một số tính chất

- $h(X)$ có thể âm, dương.
- $h(X)$ có giá trị hữu hạn.
- Với một hằng số c: $h(X + c) = h(X)$.
- Với một hằng số $c \neq 0$: $h(cX) = h(X) + \log(|c|)$.
  - $h(X)$ phụ thuộc vào thang tỷ lệ (đơn vị đo)

Định lý

Trong số những quá trình ngẫu nhiên (tín hiệu) có cùng công suất trung bình $P_x = \sigma^2$, quá trình (tín hiệu) có hàm mật độ phân bố chuẩn (phân bố Gausse) sẽ cho Entropy vi phân lớn nhất. Nói cách khác

$$h(X) \leq \log(\sqrt{2\pi e P_x})$$

- Trong số các tín hiệu nhiễu (tạp âm) có cùng công suất trung bình, tín hiệu nhiễu Gausse có tác hại lớn nhất với việc truyền tin.

Entropy vi phân hợp, Entropy vi phân có điều kiện

Định nghĩa (Entropy vi phân hợp)

Entropy vi phân hợp của cặp nguồn liên tục (X, Y) với hàm mật độ phân bố hợp (phân bố đồng thời) $f(x, y)$, được định nghĩa:

$$h(X, Y) = -\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\log(f(x, y))dxdy$$

Định nghĩa (Entropy vi phân có điều kiện)

Các Entropy vi phân có điều kiện của cặp nguồn liên tục (X, Y) với hàm mật độ phân bố hợp (phân bố đồng thời) $f(x, y)$, được định nghĩa:

$$h(X|Y) = -\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\log(f(x|y))dxdy$$

$$h(Y|X) = -\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\log(f(y|x))dxdy$$

Entropy vi phân hợp, Entropy vi phân có điều kiện

Một số tính chất

$h(X,Y) = h(X) + h(Y|X) = h(Y) + h(X|Y)$

$h(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \sum_{i=1}^{n} h(X_i|X_{i-1}, \ldots, X_1)$

$h(X|Y) \leq h(X)$; $h(Y|X) \leq h(Y)$

- Xảy ra đẳng thức khi và chỉ khi X và Y độc lập nhau.

$h(X_1, X_2, \ldots, X_n) \leq \sum_{i=1}^{n} h(X_i)$

Lượng thông tin tương hỗ của các nguồn liên tục

Định nghĩa (Entropy vi phân tương đối)

Xét một nguồn liên tục X, với nguồn X giả sử có hai phân bố $f(x)$ và $g(x)$. Entropy vi phân tương đối hay còn gọi là khoảng cách Kullback Leibler được tính bằng công thức:

$$D(f(x)||g(x)) = \int_S f(x) \log\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) dx$$

- $D(f||g) < \infty$ iff miền xác định (support set) của $f()$ chứa miền của $g()$.
- Quy ước $0 \log \frac{0}{0} = 0$

Định nghĩa (Lượng thông tin tương hỗ)

Lượng thông tin tương hỗ $I(X;Y)$ giữa hai nguồn liên tục X và Y có xác suất phân bố hợp $f(x,y)$ được xác định bởi công thức:

$$I(X;Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) \log\left(\frac{f(x,y)}{f(x)f(y)}\right) dxdy$$

Lượng thông tin tương hỗ của các nguồn liên tục

Một số tính chất

$D(f(x)|g(x)) \geq 0$

- Xảy ra đẳng thức iff $f() = g()$ trên gần toàn miền xác định.

$I(X;Y) = D(f(x,y)|f(x)f(y))$

$I(X;Y) \geq 0$

- Xảy ra đẳng thức iff X và Y độc lập nhau.

$I(X;Y) = I(Y;X)$

$I(X;Y) = h(X) - h(X|Y) = h(Y) - h(Y|X)$

$I(X^{\Delta}; Y^{\Delta}) \approx I(X;Y)$

- $I(X;Y)$ là giới hạn của lượng thông tin tương hỗ giữa các nguồn rời rạc hóa (lượng tử hóa) tương ứng.

Kết thúc phần Entropy và các khái niệm liên quan.