HỌC VIỆN CÔNG NGHỆ BƯU CHÍNH VIỄN THÔNG

- - - - - - - 🕮 - - - - - - -

BÀI GIẢNG

TOÁN CAO CẤP (A2)

Biên soạn : Ts. LÊ BÁ LONG

Ths. ĐỖ PHI NGA

Lưu hành nội bộ

HÀ NỘI - 2006

LỜI NÓI ĐẦU

Toán cao cấp A_1, A_2, A_3 là chương trình toán đại cương dành cho sinh viên các nhóm ngành toán và nhóm ngành thuộc khối kỹ thuật. Nội dung của toán cao cấp A_1, A_3 chủ yếu là phép tính vi tích phân của hàm một hoặc nhiều biến, còn toán cao cấp A_2 là các cấu trúc đại số và đại số tuyến tính. Có khá nhiều sách giáo khoa và tài liệu tham khảo viết về các chủ đề này. Tuy nhiên với phương thức đào tạo từ xa có những đặc thù riêng, đòi hỏi học viên làm việc độc lập nhiều hơn, do đó cần phải có tài liệu hướng dẫn học tập thích hợp cho từng môn học. Tập tài liệu hướng dẫn học môn toán cao cấp A_2 này được biên soạn cũng nhằm mục đích trên.

Tập tài liệu này được biên soạn theo chương trình qui định năm 2001 của Học viện Công nghệ Bưu Chính Viễn Thông. Nội dung của cuốn sách bám sát các giáo trình của các trường đại học kỹ thuật, giáo trình dành cho hệ chính qui của Học viện Công nghệ Bưu Chính Viễn Thông biên soạn năm 2001 và theo kinh nghiệm giảng dạy nhiều năm của tác giả. Chính vì thế, giáo trình này cũng có thể dùng làm tài liệu học tập, tài liệu tham khảo cho sinh viên của các trường, các ngành đại học và cao đẳng.

Giáo trình được trình bày theo cách thích hợp đối với người tự học, đặc biệt phục vụ đắc lực cho công tác đào tạo từ xa. Trước khi nghiên cứu các nội dung chi tiết, người đọc nên xem phần giới thiệu của mỗi chương cũng như mục đích của chương (*trong sách Hướng dẫn học tập Toán A2 đi kèm*) để thấy được mục đích ý nghĩa, yêu cầu chính của chương đó. Trong mỗi chương, mỗi nội dung, người đọc có thể tự đọc và hiểu được cặn kẽ thông qua cách diễn đạt và chứng minh rõ ràng. Đặc biệt bạn đọc nên chú ý đến các nhận xét, bình luận để hiểu sâu hơn hoặc mở rộng tổng quát hơn các kết quả. Hầu hết các bài toán được xây dựng theo lược đồ: Đặt bài toán, chứng minh sự tồn tại lời giải bằng lý thuyết và cuối cùng nêu thuật toán giải quyết bài toán này. Các ví dụ là để minh hoạ trực tiếp khái niệm, định lý hoặc các thuật toán, vì vậy sẽ giúp người đọc dễ dàng hơn khi tiếp thu bài học.

Giáo trình gồm 7 chương tương ứng với 4 đơn vị học trình (60 tiết):

Chương I: Lô gích toán học, lý thuyết tập hợp, ánh xạ và các cấu trúc đại số.

Chương II: Không gian véc tơ.

Chương III: Ma trận.

Chương IV: Định thức.

Chương V: Hệ phương trình tuyến tính

Chương VI: Ánh xạ tuyến tính.

Chương VII: Không gian véc tơ Euclide và dạng toàn phương.

Ngoài vai trò là công cụ cho các ngành khoa học khác, toán học còn được xem là một ngành khoa học có phương pháp tư duy lập luận chính xác chặt chẽ. Vì vậy việc học toán cũng giúp ta rèn luyện phương pháp tư duy. Các phương pháp này đã được giảng dạy và cung cấp từng bước trong quá trình học tập ở phổ thông, nhưng trong chương I các vấn đề này được hệ thống hoá lại. Nội dung của chương I được xem là cơ sở, ngôn ngữ của toán học hiện đại. Một vài nội dung trong chương này đã được học ở phổ thông nhưng chỉ với mức độ đơn giản. Các cấu trúc đại số thì hoàn toàn mới và khá trừu tượng vì vậy đòi hỏi học viên phải đọc lại nhiều lần mới tiếp thu được.

Các chương còn lại của giáo trình là đại số tuyến tính. Kiến thức của các chương liên hệ chặt chẽ với nhau, kết quả của chương này là công cụ của chương khác. Vì vậy học viên cần thấy được mối liên hệ này. Đặc điểm của môn học này là tính khái quát hoá và trừu tượng cao. Các khái niệm thường được khái quát hoá từ những kết quả của hình học giải tích ở phổ thông. Khi học ta nên liên hệ đến các kết quả đó.

Tuy rằng tác giả đã rất cố gắng, song vì thời gian bị hạn hẹp cùng với yêu cầu cấp bách của Học viện, vì vậy các thiếu sót còn tồn tại trong giáo trình là điều khó tránh khỏi. Tác giả rất mong sự đóng góp ý kiến của bạn bè đồng nghiệp, học viên xa gần và xin cám ơn vì điều đó.

Cuối cùng chúng tôi bày tỏ sự cám ơn đối với Ban Giám đốc Học viện Công nghệ Bưu Chính Viễn Thông, Trung tâm Đào tạo Bưu Chính Viễn Thông 1 và bạn bè đồng nghiệp đã khuyến khích động viên, tạo nhiều điều kiện thuận lợi để chúng tôi hoàn thành tập tài liệi này.

Hà Nội, cuối năm 2004.

Ts. Lê Bá Long

Khoa cơ bản 1

Học Viện Công nghệ Bưu chính Viễn thông

CHƯƠNG 1: MỞ ĐẦU VỀ LÔGÍC MỆNH ĐỀ, TẬP HỢP ÁNH XẠ VÀ CÁC CẤU TRÚC ĐẠI SỐ

1.1 SƠ LƯỢC VỀ LÔGÍC MỆNH ĐỀ

1.1.1 Mệnh đề

Lôgíc mệnh đề là một hệ thống lôgích đơn giản nhất, với đơn vị cơ bản là các mệnh đề mang nội dung của các phán đoán, mỗi phán đoán được giả thiết là có một giá trị chân lý nhất định là đúng hoặc sai.

Để chỉ các mệnh đề chưa xác định ta dùng các chữ cái $p,q,r...$ và gọi chúng là các biến mệnh đề. Nếu mệnh đề p đúng ta cho p nhận giá trị 1 và p sai ta cho nhận giá trị 0. Giá trị 1 hoặc 0 được gọi là thể hiện của p.

Mệnh đề phức hợp được xây dựng từ các mệnh đề đơn gián hơn bằng các phép liên kết lôgích mệnh đề.

1.1.2 Các phép liên kết lôgíc mệnh đề

1. Phép phủ định (negation): Phủ định của mệnh đề p là mệnh đề được ký hiệu $\overline{p}$, đọc là không p. Mệnh đề $\overline{p}$ đúng khi p sai và $\overline{p}$ sai khi p đúng.

2. Phép hội (conjunction): Hội của hai mệnh đề p,q là mệnh đề được ký hiệu $p \wedge q$ (đọc là p và q). Mệnh đề $p \wedge q$ chỉ đúng khi p và q cùng đúng.

3. Phép tuyển (disjunction): Tuyển của hai mệnh đề p,q là mệnh đề được ký hiệu $p \vee q$ (đọc là p hoặc q). $p \vee q$ chỉ sai khi p và q cùng sai.

4. Phép kéo theo (implication): Mệnh đề p kéo theo q, ký hiệu $p \Rightarrow q$, là mệnh đề chỉ sai khi p đúng q sai.

5. Phép tương đương (equivalence): Mệnh đề $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ được gọi là mệnh đề p tương đương q, ký hiệu $p \Leftrightarrow q$.

Một công thức gồm các biến mệnh đề và các phép liên kết mệnh đề được gọi là một công thức mệnh đề. Bảng liệt kê các thể hiện của công thức mệnh đề được gọi là bảng chân trị.

Từ định nghĩa của các phép liên kết mệnh đề ta có các bảng chân trị sau

p	$\overline{p}$
1	0
0	1

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$
1	1	1	1
1	0	0	1
0	1	0	1
0	0	0	0

p	q	$p \Rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$p \Leftrightarrow q$
1	1	1	1	1
1	0	0	1	0
0	1	1	0	0
0	0	1	1	1

Như vậy $p \Leftrightarrow q$ là một mệnh đề đúng khi cả hai mệnh đề p và q cùng đúng hoặc cùng sai và mệnh đề $p \Leftrightarrow q$ sai trong trường hợp ngược lại.

Một công thức mệnh đề được gọi là hằng đúng nếu nó luôn nhận giá trị 1 trong mọi thể hiện của các biến mệnh đề có trong công thức. Ta ký hiệu mệnh đề tương đương hằng đúng là "$\equiv$" thay cho "$\Leftrightarrow$".

1.1.3 Các tính chất

Dùng bảng chân trị ta dễ dàng kiểm chứng các mệnh đề hằng đúng sau:

1) $\overline{\overline{p}} \equiv p$ luật phủ định kép.

2) $(p \Rightarrow q) \equiv (\overline{p} \vee q)$.

3) $p \wedge q \equiv q \wedge p, \ p \vee q \equiv q \vee p$ luật giao hoán.

4) $p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$

$p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$ luật kết hợp.

5) $[p \wedge (q \vee r)] \equiv [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$

$[p \vee (q \wedge r)] \equiv [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$ luật phân phối.

6) Mệnh đề $p \vee \overline{p}$ luôn đúng luật bài chung.

$p \wedge \overline{p}$ luôn sai luật mâu thuẫn.

7) $\overline{p \vee q} \equiv \overline{p} \wedge \overline{q}$

$\overline{p \wedge q} \equiv \overline{p} \vee \overline{q}$ luật De Morgan.

8) $p \Rightarrow q \equiv \overline{q} \Rightarrow \overline{p}$ luật phản chứng.

9) $p \vee p \equiv p;\ p \wedge p \equiv p$ luật lũy đẳng.

10) $p \vee (p \wedge q) \equiv p;\ p \wedge (p \vee q) \equiv p$ luật hấp thu.

1.2 TẬP HỢP

1.2.1 Khái niệm tập hợp

Khái niệm tập hợp và phần tử là khái niệm cơ bản của toán học, không thể định nghĩa qua các khái niệm đã biết. Các khái niệm "tập hợp", "phần tử" xét trong mối quan hệ phần tử của tập hợp trong lý thuyết tập hợp là giống với khái niệm "đường thẳng", "điểm" và quan hệ điểm trên đường thẳng được xét trong hình học. Nói một cách nôm na, ta có thể xem tập hợp như một sự tụ tập các vật, các đối tượng nào đó mà mỗi vật hay đối tượng là một phần tử của tập hợp. Có thể lấy ví dụ về các tập hợp có nội dung toán học hoặc không toán học. Chẳng hạn: tập hợp các số tự nhiên là tập hợp mà các phần tử của nó là các số 1,2,3..., còn tập hợp các cuốn sách trong thư viện của Học viện Công nghệ Bưu chính Viễn thông là tập hợp mà các phần tử của nó là các cuốn sách.

Ta thường ký hiệu các tập hợp bởi các chữ in hoa $A, B, \ldots X, Y, \ldots$ còn các phần tử bởi các chữ thường $x, y, \ldots$ Nếu phần tử x thuộc A ta ký hiệu $x \in A$, nếu x không thuộc A ta ký hiệu $x \notin A$. Ta cũng nói tắt "tập" thay cho thuật ngữ "tập hợp".

1.2.2 Cách mô tả tập hợp

Ta thường mô tả tập hợp theo hai cách sau:

a) Liệt kê các phần tử của tập hợp

Ví dụ 1.1: Tập các số tự nhiên lẻ nhỏ hơn 10 là $\{1,3,5,7,9\}$.

Tập hợp các nghiệm của phương trình $x^2 - 1 = 0$ là $\{-1,1\}$.

b) Nêu đặc trưng tính chất của các phần tử tạo thành tập hợp

Ví dụ 1.2: Tập hợp các số tự nhiên chẵn $P = \{n \in \mathbb{N} \mid n = 2m,\ m \in \mathbb{N}\}$

Hàm mệnh đề trên tập hợp D là một mệnh đề $S(x)$ phụ thuộc vào biến $x \in D$. Khi cho biến x một giá trị cụ thể thì ta được mệnh đề lôgích (mệnh đề chỉ nhận một trong hai giá trị hoặc đúng hoặc sai).

Nếu $S(x)$ là một mệnh đề trên tập hợp D thì tập hợp các phần tử $x \in D$ sao cho $S(x)$ đúng được ký hiệu $\{x \in D \mid S(x)\}$ và được gọi là miền đúng của hàm mệnh đề $S(x)$.

i) Xét hàm mệnh đề $S(x)$ xác định trên tập các số tự nhiên $\mathbb{N}$: "$x^2 + 1$ là một số nguyên tố" thì $S(1), S(2)$ đúng và $S(3), S(4)$ sai ...

ii) Mỗi một phương trình là một hàm mệnh đề

$$\left\{ x \in \mathbb{Z} \,\middle|\, x^2 - 1 = 0 \right\} = \{-1, 1\}.$$

Để có hình ảnh trực quan về tập hợp, người ta thường biểu diễn tập hợp như là miền phẳng giới hạn bởi đường cong khép kín không tự cắt được gọi là giản đồ Ven.

c) Một số tập hợp số thường gặp

- Tập các số tự nhiên $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, ...\}$.
- Tập các số nguyên $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, ...\}$.
- Tập các số hữu tỉ $\mathbb{Q} = \{ p/q \mid q \neq 0,\ p, q \in \mathbb{Z} \}$.
- Tập các số thực $\mathbb{R}$.
- Tập các số phức $\mathbb{C} = \{ z = x + iy \mid x, y \in \mathbb{R};\ i^2 = -1 \}$.

1.2.3 Tập con

<u>Định nghĩa 1.1</u>: Tập A được gọi là tập con của B nếu mọi phần tử của A đều là phần tử của B, khi đó ta ký hiệu $A \subset B$ hay $B \supset A$.

Khi A là tập con của B thì ta còn nói A bao hàm trong B hay B bao hàm A hay B chứa A.

Ta có: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

<u>Định nghĩa 1.2</u>: Hai tập A, B bằng nhau, ký hiệu $A = B$, khi và chỉ khi $A \subset B$ và $B \subset A$.

Như vậy để chứng minh $A \subset B$ ta chỉ cần chứng minh $x \in A \Rightarrow x \in B$ và vì vậy khi chứng minh $A = B$ ta chỉ cần chứng minh $x \in A \Leftrightarrow x \in B$.

<u>Định nghĩa 1.3</u>: Tập rỗng là tập không chứa phần tử nào, ký hiệu ϕ.

Một cách hình thức ta có thể xem tập rỗng là tập con của mọi tập hợp.

Tập hợp tất cả các tập con của X được ký hiệu $\mathscr{P}(X)$. Vậy $A \in \mathscr{P}(X)$ khi và chỉ khi $A \subset X$. Tập X là tập con của chính nó nên là phần tử lớn nhất còn ϕ là phần tử bé nhất trong $\mathscr{P}(X)$.

<u>Ví dụ 1.3</u>: $X = \{a, b, c\}$

có $\mathscr{P}(X) = \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{b,c\}, \{c,a\}, X\}$.

Ta thấy X có 3 phần tử thì $\mathscr{P}(X)$ có $2^3 = 8$ phần tử. Ta có thể chứng minh tổng quát rằng nếu X có n phần tử thì $\mathscr{P}(X)$ có 2^n phần tử.

1.2.4 Các phép toán trên các tập hợp

1. Phép hợp: Hợp của hai tập A và B, ký hiệu $A \cup B$, là tập gồm các phần tử thuộc ít nhất một trong hai tập A, B.

Vậy $$(x \in A \cup B) \Leftrightarrow ((x \in A) \vee (x \in B)).$$

2. Phép giao: Giao của hai tập A và B, ký hiệu $A \cap B$, là tập gồm các phần tử thuộc đồng thời cả hai tập A, B.

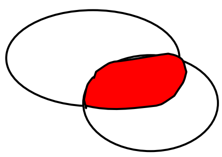
Vậy $$(x \in A \cap B) \Leftrightarrow ((x \in A) \wedge (x \in B)).$$

3. Hiệu của hai tập: Hiệu của hai tập A và B, ký hiệu $A \setminus B$ hay $A - B$, là tập gồm các phần tử thuộc A nhưng không thuộc B.

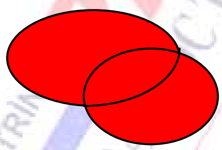
Vậy $$(x \in A \setminus B) \Leftrightarrow ((x \in A) \wedge (x \notin B)).$$

Đặc biệt nếu $B \subset X$ thì tập $X \setminus B$ được gọi là phần bù của B trong X và được ký hiệu là C_X^B. Nếu tập X cố định và không sợ nhầm lẫn thì ta ký hiệu $\overline{B}$ thay cho C_X^B.

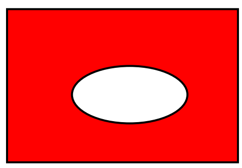
Ta có thể minh hoạ các phép toán trên bằng giản đồ Ven:



$A \cap B$



$A \cup B$



C_X^B

Áp dụng lôgích mệnh đề ta dễ dàng kiểm chứng lại các tính chất sau:

1. $A \cup B = B \cup A$,

   $A \cap B = B \cap A$ tính giao hoán.

2. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$,

   $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ tính kết hợp.

3. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$,

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \qquad \text{tính phân bố.}$$

Giả sử A, B là hai tập con của X thì:

4. $\overline{\overline{A}} = A$; $A \cup \phi = A$; $A \cap X = A$

5. $A \cup \overline{A} = X$; $A \cap \overline{A} = \phi$

6. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$; $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ luật De Morgan

7. $A \setminus B = A \cap \overline{B} = A \cap \left(\overline{A \cap B}\right) = A \setminus (A \cap B) = C_A^{A \cap B}$.

1.2.5 Lượng từ phổ biến và lượng từ tồn tại

Giả sử $S(x)$ là một hàm mệnh đề xác định trên tập D có miền đúng $D_{S(x)} = \{x \in D | S(x)\}$. Khi đó:

a) Mệnh đề $\forall x \in D,\ S(x)$ (đọc là với mọi $x \in D,\ S(x)$) là một mệnh đề đúng nếu $D_{S(x)} = D$ và sai trong trường hợp ngược lại.

Ký hiệu $\forall$ (đọc là với mọi) được gọi là lượng từ phổ biến.

Khi D đã xác định thì ta thường viết tắt $\forall x,\ S(x)$ hay $(\forall x),\ S(x)$.

b) Mệnh đề $\exists x \in D,\ S(x)$ (đọc là tồn tại $x \in D,\ S(x)$) là một mệnh đề đúng nếu $D_{S(x)} \neq \phi$ và sai trong trường hợp ngược lại.

Ký hiệu $\exists$ (đọc là tồn tại) được gọi là lượng từ tồn tại.

Để chứng minh một mệnh đề với lượng từ phổ biến là đúng thì ta phải chứng minh đúng trong mọi trường hợp, còn với mệnh đề tồn tại ta chỉ cần chỉ ra một trường hợp đúng.

c) Người ta mở rộng khái niệm lượng từ tồn tại với ký hiệu $\exists! x \in D,\ S(x)$ (đọc là tồn tại duy nhất $x \in D,\ S(x)$) nếu $D_{S(x)}$ có đúng một phần tử.

d) Phép phủ định lượng từ

$$\overline{\forall x \in D,\ S(x)} \Leftrightarrow \left(\exists x \in D,\ \overline{S(x)}\right)$$

$$\overline{\exists x \in D,\ S(x)} \Leftrightarrow \left(\forall x \in D,\ \overline{S(x)}\right) \qquad (1.1)$$

Ví dụ 1.4: Theo định nghĩa của giới hạn

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0; \forall x:\ \ 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Sử dụng tính chất hằng đúng $(p \Rightarrow q) \equiv (\overline{p} \vee q)$ (xem tính chất 1.3) ta có

$0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$ tương đương với

$$\big((|x-a| \geq \delta) \vee (x = a)\big) \vee \big(|f(x) - L| < \varepsilon\big).$$

Vậy phủ định của $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ là

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0; \exists x:\ \big(0 < |x-a| < \delta\big) \wedge \big(|f(x) - L| \geq \varepsilon\big).$$

1.2.6 Phép hợp và giao suy rộng

Giả sử $(A_i)_{i \in I}$ là một họ các tập hợp. Ta định nghĩa $\bigcup\limits_{i \in I} A_i$ là tập gồm các phần tử thuộc ít nhất một tập A_i nào đó và $\bigcap\limits_{i \in I} A_i$ là tập gồm các phần tử thuộc mọi tập A_i.

Vậy
$$\Big(x \in \bigcup_{i \in I} A_i\Big) \Leftrightarrow \big(\exists i_0 \in I;\ x \in A_{i_0}\big)$$
$$\Big(x \in \bigcap_{i \in I} A_i\Big) \Leftrightarrow \big(\forall i \in I;\ x \in A_i\big). \qquad (1.2)$$

Ví dụ 1.5: $A_n = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq n/(n+1)\}$

$$B_n = \{x \in \mathbb{R} \mid -1/(n+1) \leq x < 1 + 1/(n+1)\}$$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = [0;1),\quad \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = [0;1].$$

1.2.7 Quan hệ

1.2.7.1 Tích Đề các của các tập hợp

Định nghĩa 1.4: Tích Đề các của hai tập X, Y là tập, ký hiệu $X \times Y$, gồm các phần tử có dạng (x, y) trong đó $x \in X$ và $y \in Y$.

Vậy $$X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X \text{ và } y \in Y\}. \qquad (1.3)$$

Ví dụ 1.6: $X = \{a, b, c\}$, $Y = \{1, 2\}$

$$X \times Y = \{(a,1), (b,1), (c,1), (a,2), (b,2), (c,2)\}$$

Ta dễ dàng chứng minh được rằng nếu X có n phần tử, Y có m phần tử thì $X \times Y$ có $n \times m$ phần tử.

Cho $X_1,\ X_2,...,\ X_n$ là n tập hợp nào đó, ta định nghĩa và ký hiệu tích Đề các của n tập hợp này như sau:

$$X_1 \times X_2 \times ... \times X_n = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \mid x_i \in X_i,\ i = 1,2,...,n\}. \qquad (1.4)$$

Chú ý 1.1:

1. Khi $X_1 = ... = X_n = X$ thì ta ký hiệu X^n thay cho $\underbrace{X \times ... \times X}_{n \text{ lần}}$.

2. Tích Đề các $X_1 \times X_2 \times ... \times X_n$ còn được ký hiệu $\prod_{i \in I} X_i$.

3. Giả sử $(x_1,...,x_n) \in X_1 \times ... \times X_n$; $(x'_1,...,x'_n) \in X_1 \times ... \times X_n$ thì

$(x_1,...,x_n) = (x'_1,...,x'_n) \Leftrightarrow x_i = x'_i, \forall i = 1,...,n$

4. Tích Đề các của các tập hợp không có tính giao hoán.

1.2.7.2 Quan hệ hai ngôi

Định nghĩa 1.5: Cho tập $X \neq \phi$, mỗi tập con $\mathscr{R} \subset X \times X$ được gọi là một quan hệ hai ngôi trên X. Với $x, y \in X$ mà $(x, y) \in \mathscr{R}$ ta nói x có quan hệ với y theo quan hệ $\mathscr{R}$ và ta viết $x\mathscr{R}y$.

Ví dụ 1.7: Ta xét các quan hệ sau trên tập các số:

$\mathscr{R}_1 : x\mathscr{R}_1 y \Leftrightarrow x \vdots y$ $\quad$ (x chia hết cho y), $\forall x, y \in \mathbb{N}$

$\mathscr{R}_2 : x\mathscr{R}_2 y \Leftrightarrow (x, y) = 1$ (x và y nguyên tố cùng nhau) $\forall x, y \in \mathbb{Z}$

$\mathscr{R}_3 : x\mathscr{R}_3 y \Leftrightarrow x \leq y$ (x nhỏ hơn hay bằng y) $\forall x, y \in \mathbb{R}$

$\mathscr{R}_4 : x\mathscr{R}_4 y \Leftrightarrow x - y \vdots m$, $\quad \forall x, y \in \mathbb{Z}$. Ta ký hiệu $x \equiv y (\mathrm{mod}\, m)$ và đọc là x đồng dư với y môđulô m.

Định nghĩa 1.6: Quan hệ hai ngôi $\mathscr{R}$ trên X được gọi là có tính:

a) Phản xạ, nếu $x\mathscr{R}x,\ \forall x \in X$;

b) Đối xứng, nếu $\forall x, y \in X$ mà $x\mathscr{R}y$ thì cũng có $y\mathscr{R}x$;

c) Bắc cầu, nếu $\forall x, y, z \in X$ mà $x\mathscr{R}y$ và $y\mathscr{R}z$ thì cũng có $x\mathscr{R}z$;

d) Phản đối xứng, nếu $\forall x, y \in X$ mà $x\mathscr{R}y$ và $y\mathscr{R}x$ thì $x = y$.

Ví dụ 1.8: $\mathscr{R}_1$ phản đối xứng, bắc cầu nhưng không đối xứng, không phản xạ (vì 0 không chia hết cho 0). $\mathscr{R}_2$ đối xứng, không phản xạ, không phản xứng, không bắc cầu. $\mathscr{R}_3$ phản xạ, phản đối xứng, bắc cầu. $\mathscr{R}_4$ phản xạ, đối xứng, bắc cầu.

1.2.7.3 Quan hệ tương đương

Định nghĩa 1.8: Quan hệ hai ngôi $\mathscr{R}$ trên $X \neq \phi$ được gọi là quan hệ tương đương nếu có ba tính chất phản xạ, đối xứng, bắc cầu.

Với quan hệ tương đương $\mathscr{R}$ ta thường viết $x \sim y(\mathscr{R})$ hoặc $x \sim y$ thay cho $x\mathscr{R}y$.

Ta định nghĩa và ký hiệu lớp tương đương của phần tử $x \in X$ là tập hợp $\overline{x} = \{y \in X | y \sim x\}$. Mỗi phần tử bất kỳ của lớp tương đương $\overline{x}$ được gọi là phần tử đại diện của $\overline{x}$. Người ta cũng ký hiệu lớp tương đương của x là $cl(x)$.

Hai lớp tương đương bất kỳ thì hoặc bằng nhau hoặc không giao nhau, nghĩa là $\overline{x} \cap \overline{x'}$ hoặc bằng $\overline{x} = \overline{x'}$ hoặc bằng ϕ, nói cách khác các lớp tương đương tạo thành một phân hoạch các tập con của X.

Tập tất cả các lớp tương đương được gọi là tập hợp thương, ký hiệu $X/\sim$. Vậy $X/\sim = \{\overline{x} | x \in X\}$.

Ví dụ 1.9: Quan hệ $\mathscr{R}_4$ trong ví dụ 1.7 là một quan hệ tương đương gọi là quan hệ đồng dư môđulô m trên tập các số nguyên $\mathbb{Z}$. Nếu $x \sim y$, ta viết

$$x \equiv y(\mathrm{mod}\, m).$$

Ta ký hiệu tập thương gồm m số đồng dư môđulô m:

$\mathbb{Z}_m = \{\overline{0}, \overline{1}, ..., \overline{m-1}\}.$

Ví dụ 1.10: Trong tập hợp các véc tơ tự do trong không gian thì quan hệ "véc tơ $\vec{u}$ bằng véc tơ $\vec{v}$ " là một quan hệ tương đương. Nếu ta chọn gốc O cố định thì mỗi lớp tương đương bất kỳ đều có thể chọn véc tơ đại diện dạng $\overrightarrow{OA}$.

1.2.7.4 Quan hệ thứ tự

Định nghĩa 1.8: Quan hệ hai ngôi $\mathscr{R}$ trên $X \neq \phi$ được gọi là quan hệ thứ tự nếu có ba tính chất phản xạ, phản đối xứng, bắc cầu.

Ví dụ 1.11:

1) Trong $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ quan hệ "$x \leq y$" là một quan hệ thứ tự.

2) Trong $\mathbb{N}$ quan hệ "$x \vdots y$" là một quan hệ thứ tự.

3) Trong $\mathscr{P}(X)$, tập hợp tất cả các tập con của X, quan hệ "tập con" ($A \subset B$) là một quan hệ thứ tự.

Khái niệm quan hệ thứ tự được khái quát hoá từ khái niệm lớn hơn (hay đứng sau) trong các tập số, vì vậy theo thói quen người ta cũng dùng ký hiệu "$\leq$" cho quan hệ thứ tự bất kỳ.

Quan hệ thứ tự "$\leq$" trên tập X được gọi là quan hệ thứ tự toàn phần nếu hai phần tử bất kỳ của X đều so sánh được với nhau. Nghĩa là với mọi $x, y \in X$ thì $x \leq y$ hoặc $y \leq x$. Quan hệ thứ tự không toàn phần được gọi là quan hệ thứ tự bộ phận.

Tập X với quan hệ thứ tự "$\leq$" được gọi là tập được sắp. Nếu "$\leq$" là quan hệ thứ tự toàn phần thì X được gọi là tập được sắp toàn phần hay sắp tuyến tính.

Ví dụ 1.12: Các tập $(\mathbb{N},\leq), (\mathbb{Z},\leq), (\mathbb{Q},\leq), (\mathbb{R},\leq)$ được sắp toàn phần, còn $(\mathbb{N},\vdots)$ và $(\mathscr{P}(X),\subset)$ được sắp bộ phận (nếu X có nhiều hơn 1 phần tử).

Định nghĩa 1.9: Cho tập được sắp $(X,\leq)$ và tập con $A \subset X$. Tập A được gọi là bị chặn trên nếu tồn tại $q \in X$ sao cho $a \leq q$, với mọi $a \in A$. Khi đó q được gọi là một chặn trên của A.

Hiển nhiên rằng nếu q là một chặn trên của A thì mọi $p \in X$ mà $q \leq p$ đều là chặn trên của A.

Phần tử chặn trên nhỏ nhất q của A (theo nghĩa $q \leq q'$, với mọi chặn trên q' của A) được gọi là cận trên của A và được ký hiệu $q = \sup A$. Rõ ràng phần tử cận trên nếu tồn tại là duy nhất.

Tương tự tập A được gọi là bị chặn dưới nếu tồn tại $p \in X$ sao cho $p \leq a$, với mọi $a \in A$. Phần tử chặn dưới lớn nhất được gọi là cận dưới của A và được ký hiệu $\inf A$. Cận dưới nếu tồn tại cũng duy nhất.

Nói chung $\sup A$, $\inf A$ chưa chắc là phần tử của A. Nếu $q = \sup A \in A$ thì q được gọi là phần tử lớn nhất của A ký hiệu $q = \max A$.

Tương tự nếu $p = \inf A \in A$ thì p được gọi là phần tử bé nhất của A ký hiệu $p = \min A$.

Ví dụ 1.13: Trong $(\mathbb{R},\leq)$, tập $A = [0;1) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 1\}$ có

$$1 = \sup A \notin A, \quad \inf A = 0 \in A$$

do đó không tồn tại $\max A$ nhưng tồn tại $\min A = \inf A = 0$.

1.3 ÁNH XẠ

1.3.1 Định nghĩa và ví dụ

Khái niệm ánh xạ được khái quát hoá từ khái niệm hàm số trong đó hàm số thường được cho dưới dạng công thức tính giá trị của hàm số phụ thuộc vào biến số. Chẳnghạn, hàm số $y = 2x$ với $x \in \mathbb{N}$ là quy luật cho ứng

$$0 \mapsto 0, 1 \mapsto 2, 2 \mapsto 4, 3 \mapsto 6, \ldots$$

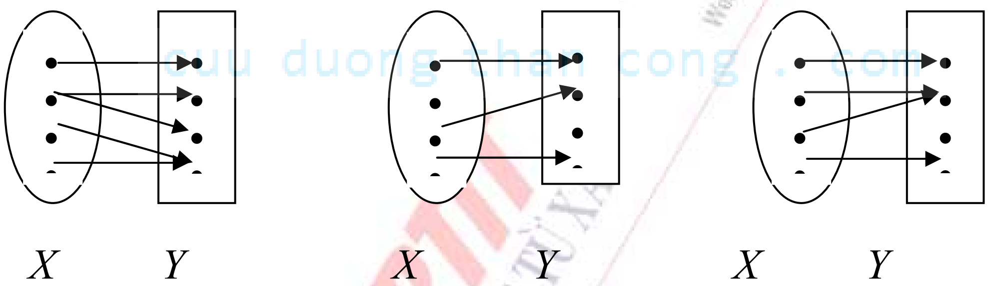
Ta có thể định nghĩa ánh xạ một cách trực quan như sau:

<u>Định nghĩa 1.10</u>: Một ánh xạ từ tập X vào tập Y là một quy luật cho tương ứng mỗi một phần tử $x \in X$ với một phần tử duy nhất $y = f(x)$ của Y.

Ta ký hiệu $\begin{aligned} f : X &\longrightarrow Y \\ x &\mapsto y = f(x) \end{aligned}$ hay $\begin{aligned} X &\xrightarrow{\ f\ } Y \\ x &\mapsto y = f(x) \end{aligned}$

X được gọi là tập nguồn, Y được gọi là tập đích.

<u>Ví dụ 1.14</u>:



Trong 3 tương ứng trên chỉ có tương ứng thứ 3 xác định một ánh xạ từ X vào Y.

<u>Ví dụ 1.15</u>: Mỗi hàm số $y = f(x)$ bất kỳ có thể được xem là ánh xạ từ tập D là miền xác định của $y = f(x)$ vào $\mathbb{R}$. Chẳng hạn:

Hàm lôgarit $y = \ln x$ là ánh xạ $\begin{aligned} \ln : \mathbb{R}_+^* &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto y = \ln x \end{aligned}$

Hàm căn bậc hai $y = \sqrt{x}$ là ánh xạ $\begin{aligned} \sqrt{\ } : \mathbb{R}_+ &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto y = \sqrt{x}. \end{aligned}$

<u>Định nghĩa 1.11</u>: Cho ánh xạ $f : X \to Y$ và $A \subset X$, $B \subset Y$.

$$f(A) = \{ f(x) \mid x \in A \} \qquad (1.5)$$

được gọi là ảnh của A qua ánh xạ f.

Nói riêng $f(X) = \operatorname{Im} f$ được gọi là tập ảnh hay tập giá trị của f.

$$f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\} \tag{1.6}$$

được gọi là nghịch ảnh của tập con B của Y.

Khi B là tập hợp chỉ có một phần tử $\{y\}$ thì ta viết $f^{-1}(y)$ thay cho $f^{-1}(\{y\})$. Vậy

$$f^{-1}(y) = \{x \in X \mid y = f(x)\}. \tag{1.7}$$

1.3.2 Phân loại các ánh xạ

Định nghĩa 1.12:

1) Ánh xạ $f: X \to Y$ được gọi là đơn ánh nếu ảnh của hai phần tử phân biệt là hai phần tử phân biệt.

Nghĩa là: Với mọi $x_1, x_2 \in X$; $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ hay một cách tương đương, với mọi $x_1, x_2 \in X$; .

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2 \tag{1.8}$$

2) Ánh xạ $f: X \to Y$ được gọi là toàn ánh nếu mọi phần tử của Y là ảnh của phần tử nào đó của X. Nghĩa là $f(X) = Y$ hay

$$\forall y \in Y,\ \exists x \in X \text{ sao cho } y = f(x). \tag{1.9}$$

3) Ánh xạ $f: X \to Y$ vừa đơn ánh vừa toàn ánh được gọi là song ánh.

Chú ý 1.2: Khi ánh xạ $f: X \to Y$ được cho dưới dạng công thức xác định ảnh $y = f(x)$ thì ta có thể xác định tính chất đơn ánh, toàn ánh của ánh xạ f bằng cách giải phương trình:

$$y = f(x),\ y \in Y \tag{1.10}$$

trong đó ta xem x là ẩn và y là tham biến.

♦ Nếu với mọi $y \in Y$ phương trình (1.10) luôn có nghiệm $x \in X$ thì ánh xạ f là toàn ánh.

♦ Nếu với mỗi $y \in Y$ phương trình (1.10) có không quá 1 nghiệm $x \in X$ thì ánh xạ f là đơn ánh.

♦ Nếu với mọi $y \in Y$ phương trình (1.10) luôn có duy nhất nghiệm $x \in X$ thì ánh xạ f là song ánh.

Ví dụ 1.16: Cho ánh xạ
$$f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$
$$x \mapsto y = f(x) = x(x+1)$$

Xét phương trình $y = f(x) = x(x+1) = x^2 + x$ hay $x^2 + x - y = 0$.

Biệt số $\Delta = 1 + 4y > 0$ (vì $y \in \mathbb{N}$). Phương trình luôn có 2 nghiệm thực $x_1 = \left(-1 + \sqrt{1+4y}\right)/2, x_2 = \left(-1 - \sqrt{1+4y}\right)/2$. Vì $x_2 < 0$ nên phương trình có không quá 1 nghiệm trong $\mathbb{N}$. Vậy f là đơn ánh. Mặt khác tồn tại $y \in \mathbb{N}$ mà nghiệm $x_1 \notin \mathbb{N}$ (chẳng hạn $y = 1$), nghĩa là phương trình trên vô nghiệm trong $\mathbb{N}$. Vậy f không toàn ánh.

Ví dụ 1.17: Các hàm số đơn điệu chặt:

- Đồng biến chặt: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
- Nghịch biến chặt: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

là các song ánh từ tập xác định lên miền giá trị của nó.

Ví dụ 1.18: Giả sử A là tập con của X thì ánh xạ
$$i : A \to X$$
$$x \mapsto i(x) = x$$

là một đơn ánh gọi là nhúng chính tắc.

Đặc biệt khi $A = X$ ánh xạ i được ký hiệu Id_X gọi là ánh xạ đồng nhất của X.

Ví dụ 1.19: Giả sử $\sim$ là một quan hệ tương đương thì ánh xạ sau là một toàn ánh
$$p : X \to X/\sim$$
$$x \mapsto p(x) = \overline{x}$$

1.3.3 Ánh xạ ngược của một song ánh

Định nghĩa 1.13: Giả sử $f : X \to Y$ là một song ánh khi đó với mỗi $y \in Y$ tồn tại duy nhất $x \in X$ sao cho $y = f(x)$. Như vậy ta có thể xác định một ánh xạ từ Y vào X bằng cách cho ứng mỗi phần tử $y \in Y$ với phần tử duy nhất $x \in X$ sao cho $y = f(x)$. Ánh xạ này được gọi là ánh xạ ngược của f và được ký hiệu f^{-1}.

Vậy $$f^{-1} : Y \to X \text{ và } f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow y = f(x).$$
(1.11)

f^{-1} cũng là một song ánh.

Ví dụ 1.20: Hàm mũ $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$

là một song ánh (vì hàm mũ đơn điệu chặt) có hàm ngược là hàm lôgarit

$$y = a^x \Leftrightarrow x = \log_a y .$$

Ví dụ 1.21 Các hàm lượng giác ngược

Xét hàm

$$\begin{aligned} \sin : [-\pi/2; \pi/2] &\to [-1;1] \\ x &\mapsto \sin x \end{aligned}$$

đơn điệu tăng chặt … h. Hàm ngược được ký hiệu

$$\begin{aligned} \arcsin : [-1;1] &\to [-\pi/2; \pi/2] \\ y &\mapsto \arcsin y \end{aligned}$$

$x = \arcsin y \Leftrightarrow y = \sin x$, $\forall x \in [-1;1], y \in [-\pi/2; \pi/2]$.

Tương tự hàm $\cos : [0;\pi] \to [-1;1]$ đơn điệu giảm chặt có hàm ngược

$\arccos : [-1;1] \to [0;\pi]$;

$x = \arccos y \Leftrightarrow y = \cos x$.

Hàm ngược arctg, arcotg được xác định như sau

$x = \operatorname{arctg} y \Leftrightarrow y = \operatorname{tg} x$, $\forall x \in (-\infty;\infty), y \in (-\pi/2; \pi/2)$.

$x = \operatorname{arc\,cot\,g} y \Leftrightarrow y = \operatorname{cot\,g} x$, $\forall x \in (-\infty;\infty), y \in (0;\pi)$.

1.3.4 Hợp (tích) của hai ánh xạ

Định nghĩa 1.14: Với hai ánh xạ $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ thì tương ứng $x \mapsto g(f(x))$ xác định một ánh xạ từ X vào Z được gọi là hợp (hay tích) của hai ánh xạ f và g, ký hiệu $g \circ f$. Vậy $g \circ f : X \to Z$ có công thức xác định ảnh

$$g \circ f(x) = g(f(x)). \qquad (1.12)$$

Ví dụ 1.22: Cho $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ với công thức xác định ảnh $f(x) = \sin x$, $g(x) = 2x^2 + 4$. Ta có thể thiết lập hai hàm hợp $g \circ f$ và $f \circ g$ từ $\mathbb{R}$ vào $\mathbb{R}$.

$$f \circ g(x) = \sin(2x^2 + 4), \; g \circ f(x) = 2\sin^2 x + 4 .$$

Qua ví dụ trên ta thấy nói chung $f \circ g \neq g \circ f$, nghĩa là phép hợp ánh xạ không có tính giao hoán.

Nếu $f: X \to Y$ là một song ánh có ánh xạ ngược $f^{-1}: Y \to X$, khi đó ta dễ dàng kiểm chứng rằng $f^{-1} \circ f = Id_X$ và $f \circ f^{-1} = Id_Y$. Hơn nữa ta có thể chứng minh được rằng ánh xạ $f: X \to Y$ là một song ánh khi và chỉ khi tồn tại ánh xạ $g: Y \to X$ sao cho $g \circ f = Id_X$ và $f \circ g = Id_Y$, lúc đó $g = f^{-1}$.

1.3.5 Lực lượng của một tập hợp

Khái niệm lực lượng của tập hợp có thể xem như là sự mở rộng khái niệm số phần tử của tập hợp.

Định nghĩa 1.15: Hai tập hợp X, Y được gọi là cùng lực lượng nếu tồn tại song ánh từ X lên Y.

Tập cùng lực lượng với tập $\{1,2,...,n\}$ được gọi là có lực lượng n. Vậy X có lực lượng n khi và chỉ khi X có n phần tử. n còn được gọi là bản số của X, ký hiệu $\text{Card}\, X$ hay $|X|$. Quy ước lực lượng của ϕ là 0.

Định nghĩa 1.16: Tập có lực lượng n hoặc 0 được gọi là các tập hữu hạn. Tập không hữu hạn được gọi là tập vô hạn. Tập có cùng lực lượng với tập các số tự nhiên $\mathbb{N}$ hay hữu hạn được gọi là tập đếm được.

Chú ý 1.3:

1) Tập vô hạn đếm được là tập cùng lực lượng với $\mathbb{N}$.

2) Bản thân tập $\mathbb{N}$ là tập vô hạn đếm được.

3) Người ta chứng minh được $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ là tập vô hạn đếm được, còn tập $\mathbb{R}$ không đếm được.

4) Giả sử X, Y là hai tập hữu hạn cùng lực lượng. Khi đó ánh xạ $f: X \to Y$ là đơn ánh khi và chỉ khi là toàn ánh, do đó là một song ánh.

1.4 GIẢI TÍCH TỔ HỢP- NHỊ THỨC NEWTON

1.4.1 Hoán vị, phép thế

Cho tập hữu hạn $E = \{x_1, x_2, ... x_n\}$. Mỗi song ánh từ E lên E được gọi là một phép thế, còn ảnh của song ánh này được gọi là một hoán vị n phần tử của E.

Nếu ta xếp các phần tử của E theo một thứ tự nào đó thì mỗi hoán vị là một sự đổi chỗ các phần tử này.

Đặc biệt nếu $E = \{1,2,...n\}$ thì mỗi phép thế được ký hiệu bởi ma trận

$$\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & ... & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & ... & \sigma(n) \end{bmatrix} \tag{1.13}$$

trong đó hàng trên là các số từ 1 đến n sắp theo thứ tự tăng dần, hàng dưới là ảnh tương ứng của nó qua song ánh σ. Còn $[\sigma(1),\sigma(2),...,\sigma(n)]$ là hoán vị của phép thế σ.

Ví dụ 1.23: $[4 \quad 2 \quad 1 \quad 3]$ là hoán vị từ phép thế $\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ có $\sigma(1)=4$, $\sigma(2)=2$, $\sigma(3)=1$, $\sigma(4)=3$.

Tập hợp $\{1,2\}$ có hai hoán vị là $[1\ 2]$ và $[2\ 1]$.

Tập hợp $\{1,2,3\}$ có sáu hoán vị là $[1\ 2\ 3]$, $[2\ 1\ 3]$, $[3\ 1\ 2]$, $[1\ 3\ 2]$, $[2\ 3\ 1]$ và $[3\ 2\ 1]$.

Với tập $E=\{x_1,x_2,...,x_n\}$ thì có n cách chọn giá trị $\sigma(x_1)$, $n-1$ cách chọn giá trị $\sigma(x_2)$ .... cho một phép thế σ bất kỳ.

Vậy có $n(n-1)(n-2)...1=n!$ hoán vị (phép thế) của tập n phần tử.

1.4.2 Chỉnh hợp

Cho tập hợp hữu hạn có n phần tử $E=\{x_1,x_2,...,x_n\}$ và tập hợp hữu hạn $B=\{1,2,...,p\}$.

Định nghĩa 1.17: Một chỉnh hợp lặp chập p các phần tử của E là ảnh của một ánh xạ từ B đến E.

Ta cũng có thể xem một chỉnh hợp lặp chập p như một bộ gồm p thành phần là các phần tử có thể trùng nhau của E. Nói cách khác, một chỉnh hợp lặp chập p là một phần tử của tích Descartes E^p. Vậy số các chỉnh hợp lặp chập p của n vật là n^p.

Ví dụ 1.24: Cho n vật $E=\{x_1,x_2,...,x_n\}$ và tiến hành bốc có hoàn lại p lần theo cách sau: Bốc lần thứ nhất từ tập E được x_{i_1}, ta trả x_{i_1} lại cho E và bốc tiếp lần thứ hai ... Mỗi kết quả sau p lần bốc $(x_{i_1},x_{i_2},...,x_{i_p})$ là một chỉnh hợp có lặp n chập p.

Định nghĩa 1.18: Một chỉnh hợp (không lặp) chập p gồm n phần tử của $E\ (p \le n)$ là ảnh của một đơn ánh từ B vào E.

Hai chỉnh hợp n chập p là khác nhau nếu:

- hoặc chúng có ít nhất một phần tử khác nhau,
- hoặc gồm p phần tử như nhau nhưng có thứ tự khác nhau.

Như vậy ta có thể xem mỗi chỉnh hợp là một bộ có p thành phần gồm các phần tử khác nhau của E hay có thể xem như một cách sắp xếp n phần tử của E vào p vị trí.

Có n cách chọn vào vị trí thứ nhất, $n-1$ cách chọn vào vị trí thứ hai, ... và $n-p+1$ cách chọn vào vị trí thứ p. Vậy số các chỉnh hợp n chập p là

$$A_n^p = n(n-1)...(n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!} \tag{1.14}$$

1.4.3 Tổ hợp

Định nghĩa 1.19: Một tổ hợp n vật của E chập p là một cách lấy ra đồng thời p vật từ E có n vật. Như vậy ta có thể xem một tổ hợp n chập p là một tập con p phần tử của tập có n phần tử E.

Nếu ta hoán vị p vật của một tổ hợp thì ta có các chỉnh hợp khác nhau của cùng p vật này. Vậy ứng với một tổ hợp p vật có đúng $p!$ chỉnh hợp của p vật này. Ký hiệu C_n^p là số các tổ hợp n chập p thì

$$C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}. \tag{1.15}$$

Ví dụ 1.25: a) Có bao nhiêu cách bầu một lớp trưởng, một lớp phó và một bí thư chi đoàn mà không kiêm nhiệm của một lớp có 50 học sinh.

b) Có bao nhiêu cách bầu một ban chấp hành gồm một lớp trưởng, một lớp phó và một bí thư chi đoàn mà không kiêm nhiệm của một lớp có 50 học sinh.

Giải:

a) Mỗi kết quả bầu là một chỉnh hợp 50 chập 3.

Vậy có $A_{50}^3 = 50 \times 49 \times 48 = 117.600$ cách bầu.

b) Mỗi kết quả bầu một ban chấp hành là một tổ hợp 50 chập 3.

Vậy có $C_{50}^3 = \frac{50!}{3!47!} = \frac{50 \times 49 \times 48}{6} = 19.600$ cách bầu.

1.4.4 Nhị thức Niu-tơn

Xét đa thức bậc n: $(x+1)^n = \underbrace{(x+1)(x+1)...(x+1)}_{n \text{ thừa số}}$

Khai triển đa thức này ta được:

$$(x+1)^n = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + 1$$

Hệ số của x^p bằng số cách chọn p thừa số trong n thừa số trên. Mỗi cách chọn là một tổ hợp n chập p, do đó $a_p = C_n^p$.

Vậy $$(x+1)^n = C_n^n x^n + C_n^{n-1}x^{n-1} + \ldots + C_n^p x^p + \ldots + C_n^0$$

Thay $x = a/b$ (nếu $b \neq 0$) ta có:

$$(a+b)^n = C_n^n a^n + C_n^{n-1}a^{n-1}b + \ldots + C_n^0 b^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p a^p b^{n-p} \qquad (1.16)$$

Công thức này được gọi là nhị thức Niu-tơn, đúng với mọi $a, b \in \mathbb{C}$ (kể cả trường hợp $b = 0$).

1.4.5 Sơ lược về phép đếm

Khi muốn đếm số phần tử của các tập hữu hạn ta có thể áp dụng các cách đếm hoán vị, chỉnh hợp, tổ hợp và các công thức sau:

a) $|A \cup B| + |A \cap B| = |A| + |B|$, (công thức cộng) (1.17)

b) $|A \times B| = |A| \cdot |B|$, (công thức nhân) (1.18)

c) $|\{f : A \to B\}| = |A|^{|B|}$, (chỉnh hợp có lặp) (1.19)

d) $|\mathscr{P}(A)| = 2^{|A|}$, (1.20)

e) Nếu $f : A \to B$ song ánh thì $|A| = |B|$. (1.21)

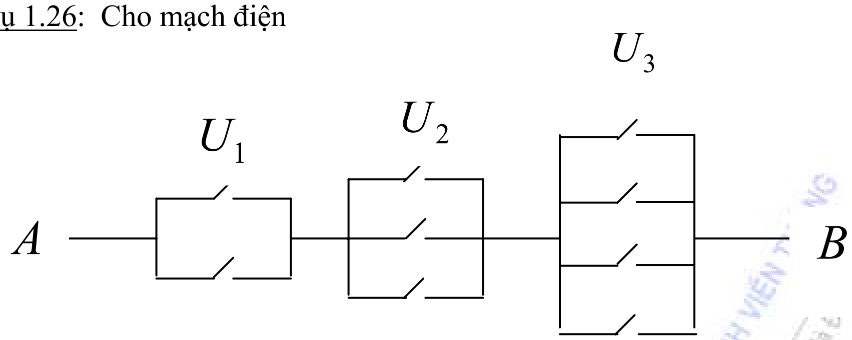
Công thức cộng a) thường được sử dụng trong trường hợp đặc biệt khi A, B rời nhau $A \cap B = \phi$, lúc đó $|A \cup B| = |A| + |B|$.

Công thức nhân b) có thể mở rộng cho k tập bất kỳ

$$|A_1 \times \ldots \times A_k| = |A_1| \cdot \ldots \cdot |A_k| \qquad (1.22)$$

Hoặc nếu một hành động H gồm k giai đoạn $A_1, \ldots, A_k$. Mỗi giai đoạn A_i có thể thực hiện theo n_i phương án thì cả thảy có $n_1 \times \ldots \times n_k$ phương án thực hiện H.

Ví dụ 1.26: Cho mạch điện



a) Có bao nhiêu trạng thái của mạch.

b) Có bao nhiêu trạng thái có thể của mạch để có dòng điện chạy từ A đến B

Giải:

Áp dụng công thức nhân ta có:

a) Số các trạng thái của mạch $2^2.2^3.2^4 = 2^9 = 512$.

b) Ở U_1 có 2^2 trạng thái nhưng có 1 trạng thái dòng điện không qua được, do đó ở U_1 có 3 trạng thái dòng điện qua được. Tương tự ở U_2 có $2^3 - 1$ và ở U_3 có $2^4 - 1$ trạng thái dòng điện qua được. Vậy số các trạng thái của mạch có dòng điện chạy từ A đến B là $3 \times 7 \times 15 = 315$.

Ví dụ 1.27: Có bao nhiêu số tự nhiên viết dưới dạng thập phân có n chữ số $(n \geq 3)$ trong đó có đúng hai chữ số 8.

Giải: Giả sử N là số tự nhiên có n chữ số mà chữ số thứ nhất bên trái khác chữ số 0 và có đúng hai chữ số 8.

♦Trường hợp 1: Nếu chữ số thứ nhất bên trái là chữ số 8 thì có $n-1$ vị trí để đặt chữ số 8 thứ hai, có 9 cách chọn cho mỗi chữ số ở $n-2$ vị trí còn lại. Vậy có đúng $(n-1)9^{n-2}$ số N thuộc loại này.

♦Trường hợp 2: Nếu chữ số thứ nhất bên trái không phải là chữ số 8 thì có C_{n-1}^2 vị trí để đặt 2 chữ số 8, có 8 cách chọn chữ số cho vị trí thứ nhất, có 9 cách chọn cho mỗi chữ số ở $n-3$ vị trí khác vị trí thứ nhất và hai vị trí đã chọn cho chữ số 8. Vậy có đúng $C_{n-1}^2 \cdot 8 \cdot 9^{n-3} = \dfrac{(n-1)(n-2)}{2} \cdot 8 \cdot 9^{n-3}$ số N thuộc loại này.

Sử dụng công thức cộng ta suy ra số các số tự nhiên cần tìm là:

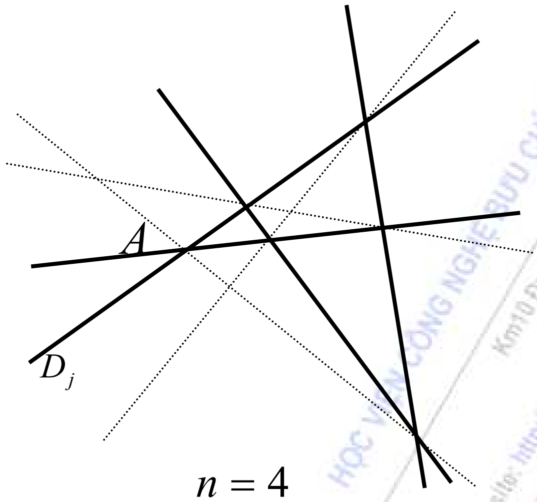
$$(n-1)9^{n-2} + 4(n-1)(n-2)9^{n-3} = (4n+1)(n-1)9^{n-3}$$

<u>Ví dụ 1.28</u>: Trong mặt phẳng cho n đường thẳng đôi một cắt nhau và các giao điểm này khác nhau $(n \geq 4)$.

a) Tìm số các giao điểm của chúng.

b) Tìm số các đường thẳng mới được tạo bởi các giao điểm trên.

Giải:



$n = 4$

a) Số các giao điểm của n đường thẳng bằng số các cặp của n đường thẳng này. Vậy có C_n^2 giao điểm.

b) Xét tại điểm A bất kỳ trong C_n^2 giao điểm của câu a). Tồn tại đúng hai đường trong n đường trên đi qua A là $D_i, D_j; i < j$.

Trên mỗi đường có đúng $n-1$ điểm trong số C_n^2 giao điểm của câu a).

Vậy trên D_i, D_j có $2(n-1)-1$ điểm, do đó có

$C_n^2 - (2(n-1)-1) = \dfrac{(n-2)(n-3)}{2}$ đường thẳng mới nối đến A. Vì mỗi đường thẳng mới đều nối hai điểm ở câu a) nên số đường thẳng mới là:

$$\frac{1}{2} C_n^2 \frac{(n-2)(n-3)}{2} = \frac{1}{8} n(n-1)(n-2)(n-3).$$

<u>Ví dụ 1.29</u>: Cho tập con A có p phần tử của tập E có n phần tử. Hãy đếm số các cặp (X, Y) các tập con của E sao cho:

$$X \cup Y = E,\ X \cap Y \supset A \qquad (1.23)$$

Giải: Ký hiệu $B = E \setminus A$.

Đặt $$\mathscr{A} = \{(X, Y) \mid X \cup Y = E,\ X \cap Y \supset A\}$$

$$\mathscr{B} = \{(X', Y') \mid X' \subset B, Y' \subset B;\ X' \cup Y' = B\}$$

Tương ứng $f : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$; $f(X, Y) \mapsto (X \cap B, Y \cap B)$ là một song ánh.

Mặt khác $X' \subset B, Y' \subset B, X' \cup Y' = B \Leftrightarrow B \setminus X' \subset Y'$.

Vậy số các cặp (X, Y) thoả mãn điều kiện (1.23) cần tìm bằng bản số của tập

$\{(X'', Y') \mid X'' \subset B, Y' \subset B, X'' \subset Y'\}$.

Với mỗi tập $Y' \subset B$ có bản số y' thì bản số của tập $\{X'' \mid X'' \subset Y'\}$ là $2^{y'}$; Số các tập con $Y' \subset B$ có y' phần tử là $C_{n-p}^{y'}$. Áp dụng công thức cộng suy ra bản số cần tìm là $\sum_{y'=0}^{n-p} 2^{y'} C_{n-p}^{y'} = 3^{n-p}$.

1.5 CÁC CẤU TRÚC ĐẠI SỐ

1.5.1 Luật hợp thành trong

Định nghĩa 1.20: Một luật hợp thành trong trên tập $X \neq \phi$ là ánh xạ từ $X \times X$ vào X.

Ta thường ký hiệu $$* : X \times X \to X$$
$$(x, y) \mapsto x * y$$

Luật hợp thành trong kết hợp hai phần tử x, y của X thành một phần tử $x * y$ của X vì vậy luật hợp thành trong còn được gọi là phép toán hai ngôi.

Ví dụ 1.30: Phép cộng và phép nhân là các luật hợp thành trong của các tập số $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$.

Ví dụ 1.31: Phép cộng véc tơ theo quy tắc hình bình hành là phép toán trong của tập R_3 các véc tơ tự do trong không gian, nhưng tích vô hướng không phải là phép toán trong vì $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cos(\vec{u}, \vec{v}) \notin R_3$.

Định nghĩa 1.21: Luật hợp thành trong * của tập X được gọi là:

1) Có tính kết hợp nếu $\forall x, y, z \in X : x * (y * z) = (x * y) * z$

2) Có tính giao hoán nếu $\forall x, y \in X : x * y = y * x$

3) Có phần tử trung hoà (hay có phần tử đơn vị) là $e \in X$ nếu

$\forall x \in X : x * e = e * x = x$

4) Giả sử $*$ có phần tử trung hoà $e \in X$. Phần tử $x' \in X$ được gọi là phần tử đối xứng của $x \in X$ nếu $x * x' = x' * x = e$.

Ta dễ dàng thấy rằng phần tử trung hoà có phần tử đối xứng là chính nó.

Các phép hợp thành trong hai ví dụ trên đều có tính kết hợp và giao hoán. Số 0 là phần tử trung hoà đối với phép cộng và 1 là phần tử trung hoà đối với phép nhân trong. Véc tơ $\vec{0}$ là phần tử trung hoà của phép toán cộng véc tơ trong R_3. Đối với phép cộng thì mọi phần tử x trong $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ đều có phần tử đối là $-x$. Phần tử đối của $x \neq 0$ ứng với phép nhân trong $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ là $1/x$, nhưng mọi phần tử khác 0 trong $\mathbb{N}$ với phép + không có phần tử đối.

Tính chất 1.4:

1) Phần tử trung hoà nếu tồn tại là duy nhất.

2) Nếu * có tính kết hợp, thì phần tử đối của mỗi phần tử là duy nhất.

3) Nếu * có tính kết hợp và phần tử a có phần tử đối thì có luật giản ước: $a * x = a * y \Rightarrow x = y$ và phương trình $a * x = b$ có duy nhất nghiệm $x = a' * b$ với a' là phần tử đối của a.

Chứng minh:

1) Giả sử e và e' là hai phần tử trung hoà thì $e' = e' * e = e$ (dấu "=" thứ nhất có được do e là phần tử trung hoà, còn dấu "=" thứ hai là do e' là phần tử trung hoà).

2) Giả sử a có hai phần tử đối xứng là a' và a'', khi đó:

$$a' = e * a' = (a'' * a) * a' = a'' * (a * a') = a'' * e = a''.$$

Theo thói quen ta thường ký hiệu các luật hợp thành trong có tính giao hoán bởi dấu $"+"$, khi đó phần tử trung hoà được ký hiệu là 0 và phần tử đối của x là $-x$. Nếu ký hiệu luật hợp thành bởi dấu nhân $"."$ thì phần tử trung hoà được ký hiệu 1 và gọi là phần tử đơn vị, phần tử đối của x là x^{-1}.

1.5.2 Nhóm

Định nghĩa 1.22: Giả sử G là tập khác trống với luật hợp thành *, cặp $(G,*)$ được gọi là một vị nhóm nếu thoả mãn hai điều kiện sau:

G1: * có tính kết hợp.

G2: * có phần tử trung hoà e.

Vị nhóm $(G,*)$ là một nhóm nếu thoả mãn thêm điều kiện:

G3: Mọi phần tử của G đều có phần tử đối.

Nhóm $(G,*)$ được gọi là nhóm giao hoán hay nhóm Abel nếu :

G4: * có tính giao hoán.

<u>Ví dụ 1.32</u>: $(\mathbb{Z},+)$, $(\mathbb{Q},+)$, $(\mathbb{R},+)$, $(\mathbb{C},+)$, $(R_3,+)$, $(\mathbb{Q}^*,\cdot)$, $(\mathbb{R}^*,\cdot)$, $(\mathbb{Q}^*_+,\cdot)$, $(\mathbb{R}^*_+,\cdot)$, $(\mathbb{C}^*,\cdot)$ là các nhóm Abel.

<u>Chú ý 1.5</u>: Một nhóm là tập khác rỗng G với luật hợp thành * thoả mãn G1, G2, G3, nhưng nếu * đã xác định và không sợ nhầm lẫn thì ta nói tắt nhóm G thay cho nhóm $(G,*)$.

<u>Định nghĩa 1.23</u>: Đồng cấu nhóm từ nhóm $(G,*)$ vào nhóm $(G',\square)$ là ánh xạ $f:G\to G'$ sao cho

$$\forall x,y\in G: f(x*y)=f(x)\square f(y). \qquad (1.24)$$

Nếu f đơn ánh (toàn ánh, song ánh) thì f được gọi là đơn cấu (toàn cấu, đẳng cấu, một cách tương ứng).

$\log_a:\mathbb{R}^*_+\to\mathbb{R};\ 0<a\neq 1$ là một đẳng cấu nhóm từ nhóm $(\mathbb{R}^*_+,\cdot)$ lên nhóm $(\mathbb{R},+)$.

1.5.3 Vành

<u>Định nghĩa 1.24</u>: Giả sử trên tập $A\neq\phi$ có hai luật hợp thành trong ký hiệu bởi dấu cộng và dấu nhân, khi đó $(A,+,\cdot)$ được gọi là một vành nếu:

A1: $(A,+)$ là một nhóm Abel,

A2: Luật nhân có tính kết hợp,

A3: Luật nhân có tính phân phối hai phía đối với luật cộng, nghĩa là:

$\forall x,y,z\in A:\ x\cdot(y+z)=x\cdot y+x\cdot z$ phân phối bên trái

$\forall x,y,z\in A:\ (x+y)\cdot z=x\cdot z+y\cdot z$ phân phối bên phải

Nếu thoả mãn thêm điều kiện:

A4: Luật nhân có tính giao hoán thì $(A,+,\cdot)$ là vành giao hoán.

A5: Luật nhân có phần tử đơn vị là 1 thì $(A,+,\cdot)$ là vành có đơn vị.

Chú ý 1.6:

1) Tồn tại vành giao hoán nhưng không có đơn vị và ngược lại.

2) Ta nói tắt vành A thay cho vành $(A,+,\cdot)$.

Định nghĩa 1.25:

1) Phần tử $x \neq 0$ của A được gọi là ước của 0 nếu tồn tại $y \in A, y \neq 0$ sao cho $x \cdot y = 0$ (0 là phần tử trung hoà của luật cộng của vành $(A,+,\cdot)$).

2) Vành không có ước của 0 được gọi là vành nguyên.

Vậy vành $(A,+,\cdot)$ là vành nguyên khi và chỉ khi mọi $x, y \in A$ sao cho $x \cdot y = 0$ thì $x = 0$ hoặc $y = 0$.

Ví dụ 1.33:

1) $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ là một vành nguyên.

2) Ký hiệu $C_{[a;b]}$ là tập hợp các hàm liên tục trên đoạn $[a;b]$. Ta định nghĩa phép cộng và phép nhân trong $C_{[a;b]}$ xác định như sau:

$$\forall f, g \in C_{[a;b]} : (f+g)(x) = f(x) + g(x); fg(x) = f(x)g(x)$$

Ta có thể kiểm chứng được rằng với hai phép toán này thì $C_{[a;b]}$ là một vành giao hoán có đơn vị và có ước của 0.

3) $(K[x],+,\cdot)$ là một vành nguyên, trong đó $K[x]$ là tập các đa thức của biến x có hệ số thuộc vào vành số $K = \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

4) Tập $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/\bmod n$ các số đồng dư môđulô n.

Ta có thể chứng minh được rằng nếu $x \equiv x' (\bmod n)$, $y \equiv y' (\bmod n)$ thì $x + y \equiv x' + y' (\bmod n)$ và $xy \equiv x'y' (\bmod n)$. Vì vậy ta có thể định nghĩa phép cộng và phép nhân trong $\mathbb{Z}_n$ bởi:

$$\overline{x} + \overline{y} = \overline{x+y} \text{ và } \overline{x} \cdot \overline{y} = \overline{x \cdot y} \tag{1.25}$$

Chẳng hạn $5(\bmod 7) + 4(\bmod 7) = 2(\bmod 7)$

$5(\bmod 7) \cdot 4(\bmod 7) = -1(\bmod 7) = 6(\bmod 7)$.

Với hai phép toán này $(\mathbb{Z}_n,+,\cdot)$ là một vành giao hoán có đơn vị.

1.5.4 Trường

Định nghĩa 1.26: Vành giao hoán có đơn vị $(K,+,\cdot)$ được gọi là một trường nếu mọi phần tử $x \neq 0$ của K đều khả nghịch (có phần tử đối của luật nhân). Nghĩa là:

K1: $(K,+)$ là nhóm Abel,

K2: $(K^*,\cdot)$ là nhóm Abel, $K^* = K \setminus \{0\}$,

K3: Luật nhân phân phối đối với luật cộng.

Rõ ràng rằng mọi trường là vành nguyên, nhưng điều ngược lại không đúng. $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ là một ví dụ về vành giao hoán nguyên có đơn vị nhưng không phải là trường.

Ví dụ 1.34: $(\mathbb{Q},+,\cdot)$, $(\mathbb{R},+,\cdot)$, $(\mathbb{C},+,\cdot)$ là trường.

Ví dụ 1.35: $(\mathbb{Z}_n,+,\cdot)$ là trường khi và chỉ khi n là số nguyên tố.

Giải:

Giả sử n là số nguyên tố và $\overline{m} \in \mathbb{Z}_n$, $\overline{m} \neq \overline{0} (\bmod n)$ thì $(m,n)=1$ do đó tồn tại hai số nguyên u,v sao cho $um + vn = 1$ (Định lý Bezout) $\Rightarrow \overline{u}\cdot\overline{m} = \overline{1}(\bmod n)$. Vậy $\overline{u}$ là phần tử nghịch đảo của $\overline{m}$.

Ngược lại, nếu $\mathbb{Z}_n$ là trường thì với mọi $m \in \mathbb{Z}$ $(0 < m < n)$ tồn tại $m' \in \mathbb{Z}$ sao cho:

$$\overline{m}\cdot\overline{m}' = \overline{1} \;\Rightarrow\; mm' = 1 + kn \;\Rightarrow\; (m,n) = 1$$

Vậy n là số nguyên tố.

1.6 ĐẠI SỐ BOOLE

Lý thuyết đại số Boole được George Boole (1815 - 1864) giới thiệu vào năm 1854 trong bài báo "Các quy luật của tư duy", trong đó kỹ thuật đại số được dùng để phân tích các quy luật của lôgích và các phương pháp suy diễn. Sau đó đại số Boole được áp dụng trong các lĩnh vực khác nhau của toán học như đại số, giải tích, xác suất... Vào khoảng năm 1938, Claude Shannon (Clau Sê-nôn) (một kỹ sư viễn thông người Mỹ) là người đầu tiên đã áp dụng đại số Boole vào lĩnh vực máy tính điện tử và lý thuyết mạng.

1.6.1 Định nghĩa và các tính chất cơ bản của đại số Boole

Định nghĩa 1.27: Một đại số Boole $(B,\vee,\wedge,')$ là một tập khác trống B với hai phép toán hai ngôi $\vee,\wedge : B\times B \to B$

và phép toán một ngôi $': B \to B$ thoả mãn các tiên đề sau:

- B1: $\vee,\wedge$ có tính kết hợp, nghĩa là với mọi $a,b,c \in B$

$$a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c,\ \ a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$$

• B2: $\vee, \wedge$ có tính giao hoán, nghĩa là với mọi $a, b \in B$

$$a \vee b = b \vee a,\ \ a \wedge b = b \wedge a$$

• B3: Tồn tại các phần tử không và phần tử đơn vị $0,1 \in B$ sao cho $0 \neq 1$ và với mọi $a \in B$ $a \vee 0 = a,\ \ a \wedge 1 = a$

• B4: Với mọi $a \in B$ thì $a' \in B$ là phần tử đối theo nghĩa là:

$$a \vee a' = 1,\ \ a \wedge a' = 0$$

• B5: Luật $\vee$ phân phối đối với luật $\wedge$ và luật $\wedge$ phân phối đối với luật $\vee$, nghĩa là với mọi $a, b, c \in B$

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c),\ \ a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c).$$

Ví dụ 1.36: Giả sử $X \neq \phi$, xét $\mathscr{P}(X)$ là tập các tập con của X. Các luật hợp thành $\vee, \wedge$ là phép hợp, phép giao các tập con của X và phép toán một ngôi ' là phép lấy phần bù của tập con trong X. Khi đó $(\mathscr{P}(X), \cup, \cap, ')$ là đại số Boole với phần tử không là ϕ và phần tử đơn vị là chính tập X.

Ví dụ 1.37: Xét $B_2 = \{0;1\}$ tập gồm hai số 0 và 1. Ta định nghĩa:

$$a \vee b = \max(a,b),\ \ a \wedge b = \min(a,b),\ a' = 1 - a$$

thì $(B_2, \vee, \wedge, ')$ là một đại số Boole.

Ví dụ 1.38: Xét $B_4 = \{0;1;a;b\}$, ta định nghĩa các phép toán

$\vee$	0	1	a	b
0	0	1	a	b
1	1	1	1	1
a	a	1	a	1
b	b	1	1	b

$\wedge$	0	1	a	b
0	0	0	0	0
1	0	1	a	b
a	0	a	a	0
b	0	b	0	b

	'
0	1
1	0
a	b
b	a

thì $(B_4, \vee, \wedge, ')$ là đại số Boole.

Định nghĩa 1.28: Hai công thức Boole trong đại số Boole $(B, \vee, \wedge, ')$ được gọi là đối ngẫu nếu trong một công thức ta thay $\vee, \wedge, 0, 1,$ bằng $\wedge, \vee, 1, 0$ thì ta được công thức hai.

Ví dụ 1.39: Hai công thức $x \wedge (y \vee 1)$ và $x \vee (y \wedge 0)$ là đối ngẫu.

Trong mỗi tiên đề của hệ tiên đề B1-B5 của đại số Boole đều chứa từng cặp công thức đối ngẫu nhau, vì vậy ta có nguyên lý đối ngẫu sau:

Nguyên lý đối ngẫu: Nếu một công thức của đại số Boole được chứng minh là đúng dựa trên cơ sở hệ tiên đề B1-B5 thì công thức đối ngẫu của chúng cũng đúng.

Chẳng hạn, ta sẽ chứng minh $a \vee 1 = 1$, do đó theo nguyên lý đối ngẫu ta cũng có $a \wedge 0 = 0$.

Tính chất 1.7: Giả sử $(B, \vee, \wedge, ')$ là đại số Boole với phần tử không và đơn vị là $0, 1$ thì với mọi $a, b \in B$ ta có:

1) $a \vee a = a$, $a \wedge a = a$;

2) $0' = 1$, $1' = 0$;

3) $a \vee 1 = 1$, $a \wedge 0 = 0$;

4) $a \vee (a \wedge b) = a$, $a \wedge (a \vee b) = a$; (tính hấp thu)

5) Nếu tồn tại $c \in B$ sao cho $a \vee c = b \vee c$ và $a \wedge c = b \wedge c$ thì $a = b$;

6) Nếu $a \vee b = 1$ và $a \wedge b = 0$ thì $b = a'$; (tính duy nhất của phần bù)

7) $(a \vee b)' = a' \wedge b'$ và $(a \wedge b)' = a' \vee b'$. (công thức De Morgan)

Chứng minh:

Theo nguyên lý đối ngẫu ta chỉ cần chứng minh các đẳng thức thứ nhất từ 1)-7).

1) $a = a \vee 0$ theo B3

$= a \vee (a \wedge a')$ theo B4

$= (a \vee a) \wedge (a \vee a')$ theo B5

$= (a \vee a) \wedge 1$ theo B4

$= a \vee a$ theo B3

2) $0' = 0' \vee 0$ theo B3

$= 1$ theo B2,B4

3) $a \vee 1 = a \vee (a \vee a')$ theo B4

$= (a \vee a) \vee a'$ theo B1

$= a \vee a'$ theo 1)

$= 1$ theo B4

4) $a \vee (a \wedge b) = (a \wedge 1) \vee (a \wedge b)$ theo B3

$= a \wedge (1 \vee b)$ theo B5

$= a \wedge 1$ theo 1)

$= a$ theo B3

5) $a = a \vee (a \wedge c)$ theo 4)

$= a \vee (b \wedge c)$ vì $a \wedge c = b \wedge c$

$= (a \vee b) \wedge (a \vee c)$ theo B5

$= (a \vee b) \wedge (b \vee c)$ vì $a \vee c = b \vee c$

$= b \vee (a \wedge c)$ theo B5

$= b \vee (b \wedge c)$ vì $a \wedge c = b \wedge c$

$= b$ theo 4)

6) Vì $a \vee b = 1 = a \vee a'$ và $a \wedge b = 0 = a \wedge a'$, theo 5) suy ra $b = a'$.

7) Ta dễ dàng kiểm chứng $(a \vee b) \vee (a' \wedge b') = 1$ và $(a \vee b) \wedge (a' \wedge b') = 0$, áp dụng 6) suy ra điều phải chứng minh.

Áp dụng các tính chất này cùng với hệ tiên đề B1-B5 ta có thể đơn giản hoá các công thức Boole bất kỳ.

Ví dụ 1.40: Đơn giản hoá công thức Boole $(x \wedge y) \vee (x \wedge y') \vee (x' \vee y)$.

Giải:

Ta có $(x \wedge y) \vee (x \wedge y') = x \wedge (y \vee y') = x \wedge 1 = x$.

$\Rightarrow \quad (x \wedge y) \vee (x \wedge y') \vee (x' \vee y)$

$= x \vee (x' \vee y) = (x \vee x') \vee y = 1 \vee y = 1$.

Ví dụ 1.41: Đơn giản hoá công thức Boole $(x \wedge y') \vee [x \wedge (y \wedge z)'] \vee z$.

Giải:

Ta có $(x \wedge y') \vee [x \wedge (y \wedge z)'] \vee z$

$= (x \wedge y') \vee [(x \wedge y') \vee (x \wedge z')] \vee z$

$= (x \wedge y') \vee (x \wedge z') \vee z = (x \wedge y') \vee [(x \vee z) \wedge (z' \vee z)]$

$$= (x \wedge y') \vee [(x \vee z) \wedge 1]$$

$$= (x \wedge y') \vee (x \vee z) = [(x \wedge y') \vee x] \vee z = x \vee z .$$

Ví dụ 1.42: Đơn giản công thức $(x \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge z') \vee (x' \wedge y \wedge z)$

Giải: Ta có $(x \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge z') \vee (x' \wedge y \wedge z)$

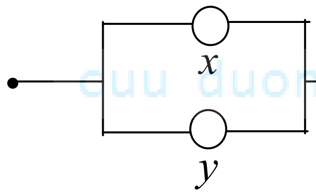
$$= [(x \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge z')] \vee [(x \wedge y \wedge z) \vee (x' \wedge y \wedge z)]$$

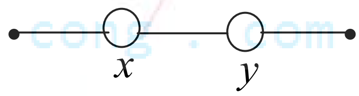
$$= [(x \wedge y) \wedge (z \vee z')] \vee [(y \wedge z) \wedge (x \vee x')]$$

$$= (x \wedge y) \vee (y \wedge z) = y \wedge (x \vee z) .$$

1.6.2 Ứng dụng đại số Boole vào mạng chuyển mạch (switching networks)

Ta chỉ xét các mạng gồm các chuyển mạch có hai trạng thái đóng (dòng điện đi qua được) và mở (dòng điện không qua được). Hai mạng đơn giản nhất là mạng song song cơ bản (basic parallel network) và mạng nối tiếp cơ bản (basic series network) được mô tả trong hình vẽ sau:



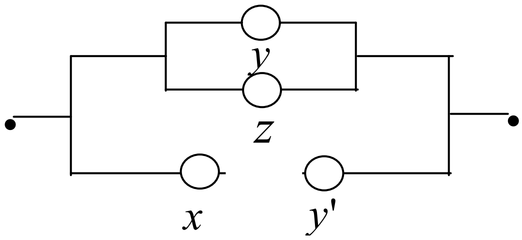


mạng song song cơ bản (hình 1)   mạng nối tiếp cơ bản (hình 2)

Một mạng bất kỳ có thể nhận được bằng cách ghép nối tiếp hay song song các mạng cơ bản này.

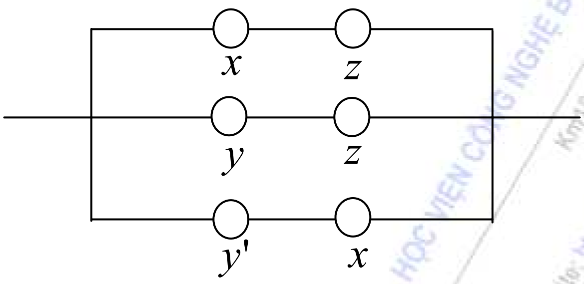
Ta ký hiệu các chuyển mạch bởi các chữ $x, y, z, \ldots$. Nếu x ở trạng thái mở ta x cho nhận giá trị 0 và ở trạng thái đóng ta cho x nhận giá trị 1. Trong một mạng nếu hai chuyển mạch luôn cùng trạng thái thì ta ký hiệu cùng một chữ. Hai chuyển mạch có trạng thái luôn ngược nhau, nếu một chuyển mạch được ký hiệu là x thì chuyển mạch kia được ký hiệu là x'.

Mạng song song (hình 1) nhận giá trị 1 khi có ít nhất một trong hai chuyển mạch x, y nhận giá trị 1, ta ký hiệu $x \vee y$. Còn mạng nối tiếp (hình 2) nhận giá trị 1 khi cả hai chuyển mạch x, y nhận giá trị 1, ta ký hiệu $x \wedge y$. Như vậy $x', x \vee y, x \wedge y$ có thể được xem như các biến nhận giá trị trong đại số Boole B2 (ví dụ 1.37). Bằng phương pháp này ta có thể mô tả một mạng bất kỳ bởi một công thức Boole và ngược lại. Chẳng hạn mạng sau đây:



tương ứng với công thức $(y \vee z) \vee (x \wedge y')$.

Còn công thức Boole $(x \wedge z) \vee (y \wedge z) \vee (y' \wedge x)$ mô tả mạng:



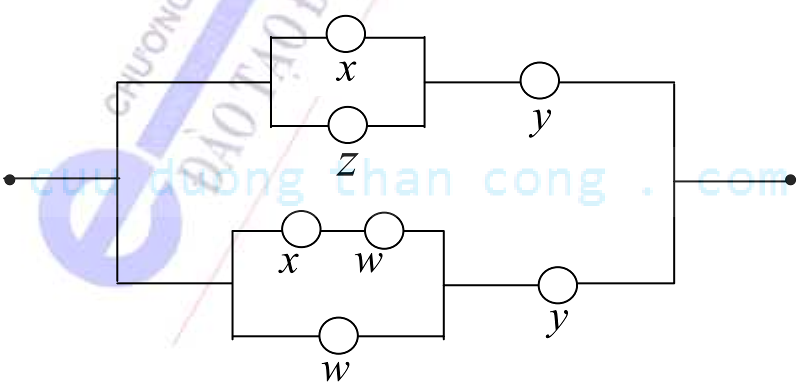
Chú ý rằng trong các công thức cần xét ta thay $(x \vee y)'$ bởi $x' \wedge y'$ và $(x \wedge y)'$ bởi $x' \vee y'$.

Hai mạng N1 và N2 được gọi là tương đương nếu nó thực hiện cùng một chức năng, nghĩa là với bất kỳ cách chọn các trạng thái đóng mở ở mọi vị trí chuyển mạch trong mạng thì trạng thái đầu vào và đầu ra của N1 và N2 đều như nhau.

Ta có thể áp dụng đại số Boole để giải quyết hai vấn đề sau:

1.6.3 Với một mạng cho trước tìm mạng tương đương đơn giản hơn

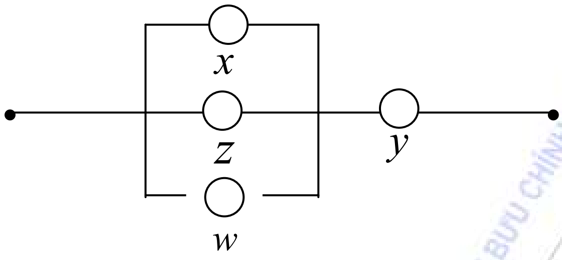
Ví dụ 1.43: Tìm mạng tương đương đơn giản hơn của mạng sau



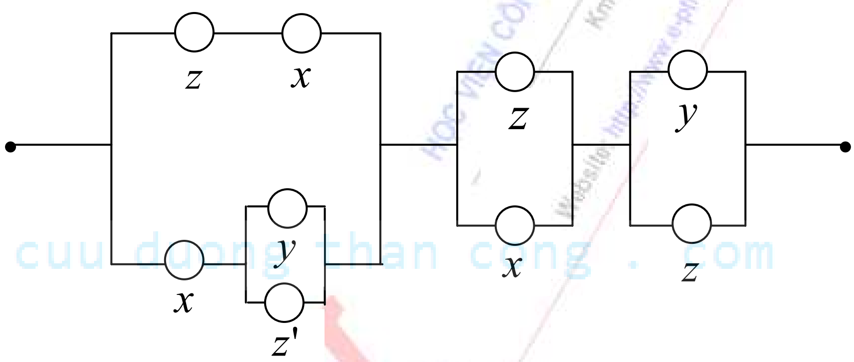
Công thức Boole tương ứng: $[(x \vee z) \wedge y] \vee [((x \wedge w) \vee w) \wedge y]$.

Ta có $(x \wedge w) \vee w = w$ (luật hấp thu), do đó công thức trên có thể biến đổi thành $[(x \vee z) \wedge y] \vee [w \wedge y] = (x \vee z \vee w) \wedge y$.

Vậy ta có mạng tương đương đơn giản hơn



<u>Ví dụ 1.43</u>: Tìm mạng tương đương đơn giản hơn của mạng sau:



Công thức Boole tương ứng: $[(z \wedge x) \vee (x \wedge (y \vee z'))] \wedge (z \vee x) \wedge (z \vee y)$.

Ta có $[(z \wedge x) \vee (x \wedge (y \vee z'))] \wedge (z \vee x) \wedge (z \vee y)$

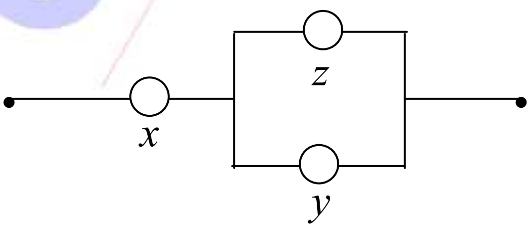
$= [(z \wedge x) \vee ((x \wedge y) \vee (x \wedge z'))] \wedge [z \vee (x \wedge y)]$

$= [(x \wedge (z \wedge z')) \vee (x \wedge y)] \wedge [z \vee (x \wedge y)]$

$= x \wedge [z \vee (x \wedge y)] = (x \wedge z) \vee [x \wedge (x \wedge y)]$

$= (x \wedge z) \vee (x \wedge y) = x \wedge (z \vee y)$

Vậy ta có mạng tương đương đơn giản hơn



1.6.4 Thiết kế một mạng thoả mãn các điều kiện cho trước

Ví dụ 1.45: Thiết kế một mạng điện cho một bóng đèn ở cầu thang mà có thể bật tắt ở cả hai đầu cầu thang.

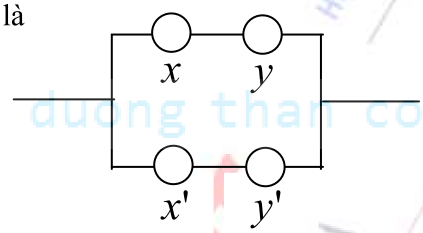
Giải:

Gọi x và y là hai công tắc ở hai đầu cầu thang. Theo yêu cầu đặt ra ta cần thiết kế một mạng điện sao cho khi thay đổi trạng thái của một trong hai vị trí x, y thì trạng thái của đầu ra (bóng đèn) phải thay đổi.

Ta biết rằng, mỗi mệnh đề logic cũng nhận hai giá trị, vì vậy ta có thể xem mệnh đề như một biến nhận giá trị trong B_2 (ví dụ 1.37). Ta biết rằng mệnh đề $x \Leftrightarrow y$ chứa hai mệnh đề x, y và mệnh đề này thay đổi giá trị khi một trong hai mệnh đề x hay y thay đổi giá trị. Mặc dù mệnh đề $x \Leftrightarrow y$ hay $(x \Rightarrow y) \wedge (y \Rightarrow x)$ không phải là công thức Boole nhưng nó có công thức tương đương dưới dạng công thức Boole $(x' \vee y) \wedge (y' \vee x)$. Ta có:

$$(x' \vee y) \wedge (y' \vee x) = [x' \wedge (y' \vee x)] \vee [y \wedge (y' \wedge x)] = (x' \wedge y') \vee (y \wedge x).$$

Vậy mạng cần tìm là



CHƯƠNG 2: KHÔNG GIAN VÉC TƠ

2.1 KHÁI NIỆM KHÔNG GIAN VÉC TƠ

2.1.1 Định nghĩa và các ví dụ

Định nghĩa 2.1: Giả sử V là tập khác ϕ, K là một trường. V được gọi là không gian véc tơ trên trường K nếu có hai phép toán:

- Phép toán trong $+: \begin{array}{l} V \times V \to V \\ (u,v) \mapsto u+v \end{array}$

- Phép toán ngoài $\cdot: \begin{array}{l} K \times V \to V \\ (\alpha,u) \mapsto \alpha u \end{array}$

thoả mãn các tiên đề sau với mọi $u,v,w \in V$ và $\alpha,\beta \in K$

V1) $(u+v)+w = u+(v+w)$

V2) Có $\boldsymbol{0} \in V$ sao cho $u+\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}+u = u$

V3) Với mỗi $u \in V$ có $-u \in V$ sao cho $u+(-u) = (-u)+u = \boldsymbol{0}$

V4) $u+v = v+u$

V5) $(\alpha+\beta)u = \alpha u + \beta u$

V6) $\alpha(u+v) = \alpha u + \alpha v$

V7) $(\alpha\beta)u = \alpha(\beta u)$

V8) $1u = u$, trong đó 1 là phần tử đơn vị của K.

Khi $K = \mathbb{R}$ thì V được gọi là không gian véc tơ thực.

Khi $K = \mathbb{C}$ thì V thì được gọi là không gian véc tơ phức.

Các phần tử của V được gọi là các véc tơ, các phần tử của K được gọi là các phần tử vô hướng.

Bốn tiên đề đầu chứng tỏ $(V,+)$ là nhóm Abel. Tiên đề V5),V6) nói rằng phép nhân số vô hướng với véc tơ phân phối đối với phép cộng của số vô hướng và phép cộng véc tơ. Tiên đề V7) là tính kết hợp của tích các số vô hướng với phép nhân với véc tơ.

Ví dụ 2.1: Tập R_3 các véc tơ tự do trong không gian (trong đó ta đồng nhất các véc tơ tương đẳng: các véc tơ cùng phương, cùng hướng, cùng độ dài). Xét phép cộng hai véc tơ theo quy tắc hình bình hành và tích một số thực với một véc tơ theo nghĩa thông thường thì R_3 là không gian véc tơ thực.

Ví dụ 2.2: Giả sử K là một trường, xét

$$K^n = \left\{ x = (x_1,...,x_n) \,\middle|\, x_i \in K, i = \overline{1,n} \right\}$$

Ta định nghĩa: $(x_1,...,x_n) + (y_1,...,y_n) = (x_1 + y_1,...,x_n + y_n)$

$$\alpha(x_1,...,x_n) = (\alpha x_1,...,\alpha x_n),\ \forall \alpha \in K$$

Dễ dàng kiểm chứng lại hai phép toán này thoả mãn 8 tiên đề của không gian véc tơ có véc tơ không là $\boldsymbol{0} = \underbrace{(0,...,0)}_{n \text{ phần tử}}$.

Khi $K = \mathbb{R}$ ta có không gian véc tơ thực $\mathbb{R}^n$.

$K = \mathbb{C}$ ta có không gian véc tơ phức $\mathbb{C}^n$.

Ví dụ 2.3: Gọi $C_{[a,b]}$ là tập các hàm liên tục trên đoạn $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Ta định nghĩa phép toán cộng và nhân với số thực như sau:

$$(f+g)(t) = f(t) + g(t),\ (\alpha f)(t) = \alpha f(t),\quad \forall t \in [a,b]$$

Rõ ràng $f + g,\ \alpha f \in C_{[a,b]},\ \ \forall f, g \in C_{[a,b]},\ \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

Với hai phép toán này $C_{[a,b]}$ có cấu trúc không gian véc tơ thực với véc tơ không là $\boldsymbol{0}(t) = 0, \forall t \in [a,b]$.

Ví dụ 2.4: Gọi P_n là tập các đa thức bậc $\le n$, n là số nguyên dương cho trước: $P_n = \left\{ p \,\middle|\, p = a_0 + a_1 t + ... + a_n t^n; a_0, a_1,..., a_n \in \mathbb{R} \right\}$.

Ta định nghĩa phép cộng hai đa thức và phép nhân một số với một đa thức như phép cộng hàm số và phép nhân một số với hàm số trong Ví dụ 2.3 thì P_n là không gian véc tơ với véc tơ không là đa thức $\boldsymbol{0}$.

Ví dụ 2.5: Gọi P là tập các đa thức

$$P=\bigcup_{n\in\mathbb{Z}_+}P_n=\left\{p \middle| p=a_0+a_1t+\ldots+a_nt^n; a_0,a_1,\ldots,a_n\in\mathbb{R}, n\in\mathbb{Z}_+\right\}$$

Ta định nghĩa phép cộng là phép cộng hai đa thức và phép nhân với một số với đa thức theo nghĩa thông thường ở Ví dụ 2.4 thì P là không gian véc tơ và $P_n\subset P$ với mọi $n\in\mathbb{Z}_+$.

2.1.2 Tính chất

1) Vì $(V,+)$ là một nhóm Abel nên véc tơ 0 và véc tơ đối $-u$ của u là duy nhất với mọi $u\in V$.

2) Có luật giản ước: $u+v=u+w\Rightarrow v=w$.

3) Với mọi $u\in V$, $0u=\boldsymbol{0}$, $(-1)u=-u$.

4) Với mọi $\alpha\in K$, $\alpha\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}$.

5) Nếu $\alpha u=\boldsymbol{0}$ thì $\alpha=0$ hoặc $u=\boldsymbol{0}$.

Chứng minh:

1) 2) Xem Tính chất 1.4.

3) Với mọi $u\in V$, $(0+0)u=0u+0u$. Mặt khác $(0+0)u=0u=0u+\boldsymbol{0}$.

Theo luật giản ước ta có $0u=\boldsymbol{0}$.

Tương tự với mọi $u\in V$, $u+(-u)=\boldsymbol{0}=0u=(1-1)u=1u+(-1)u$.

Suy ra $(-1)u=-u$.

4) $\boldsymbol{0}+\alpha 0=\alpha 0=\alpha(0+0)=\alpha 0+\alpha 0 \Rightarrow \alpha 0=\boldsymbol{0}, \forall\alpha\in K$.

5) Nếu $\alpha u=\boldsymbol{0}$ và giả sử $\alpha\neq 0\Rightarrow \exists\alpha^{-1}\in K$

$\boldsymbol{0}=\alpha^{-1}0=\alpha^{-1}(\alpha u)=(\alpha^{-1}\alpha)u=1u=u$.

Từ định nghĩa của không gian véc tơ ta có thể mở rộng các khái niệm sau:

1) Ta định nghĩa $u-v:=u+(-v)$, khi đó

$u+v=w\Leftrightarrow u=w-v$.

2) Do tính kết hợp của phép cộng nên ta có thể định nghĩa theo qui nạp:

$$\sum_{k=1}^{n}u_k=u_1+\ldots+u_n=(u_1+\ldots+u_{n-1})+u_n .$$

Tương tự $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k u_k = \alpha_1 u_1 + ... + \alpha_n u_n = (\alpha_1 u_1 + ... + \alpha_{n-1} u_{n-1}) + \alpha_n u_n$

biểu thức này được gọi là một tổ hợp tuyến tính của các véc tơ $u_1, ..., u_n$.

Từ đây trở đi ta chỉ hạn chế xét các không gian véc tơ thực.

2.2 KHÔNG GIAN VÉC TƠ CON

2.2.1 Định nghĩa và ví dụ

Định nghĩa 2.2: Giả sử $(V,+,.)$ là không gian véc tơ. Tập con $W \neq \phi$ của V sao cho hai phép toán từ V thu hẹp vào W trở thành không gian véc tơ (thoả mãn các tiên đề V1-V8) thì W được gọi là không gian véc tơ con của V (hay nói tắt: không gian con của V).

Định lý sau đây chỉ ra rằng nếu 2 phép toán trong V có thể thu hẹp được vào W thì các tiên đề V1-V8 luôn thoả mãn, do đó W là không gian véc tơ con của V .

Định lý 2.2: Giả sử W là tập con khác rỗng của V . Ba mệnh đề sau đây tương đương:

(i) W không gian véc tơ con của V .

(ii) Với mọi $u, v \in W$, với mọi $\alpha \in \mathbb{R}$ thì $u + v \in W$, $\alpha u \in W$

(iii) Với mọi $u, v \in W$, với mọi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ thì $\alpha u + \beta v \in W$.

Chứng minh: (i) $\Rightarrow$ (ii): Hiển nhiên theo định nghĩa.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Với mọi $u, v \in W$, với mọi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ thì $\alpha u \in W$, $\beta v \in W$ $\Rightarrow$ $\alpha u + \beta v \in W$.

(iii) $\Rightarrow$ (i): $\forall u, v \in W$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$: $u + v = 1u + 1v \in W$, $\alpha u = \alpha u + 0u \in W$.

Vậy phép cộng và phép nhân với số thực thu hẹp được từ V vào W . Hơn nữa $W \neq \phi$ $\Rightarrow$ $\exists u \in W$ $\Rightarrow$ $0 = 0u + 0u \in W$ (tiên đề V2), với mọi $u \in W$, $-u = 0u + (-1)u \in W$ (tiên đề V3), các tiên đề còn lại hiển nhiên đúng. Vậy W là không gian véc tơ con của V .

Ví dụ 2.6: Từ định lý trên ta thấy rằng mọi không gian véc tơ con của V đều phải chứa véc tơ $\mathbf{0}$ của V . Hơn nữa tập $\{\mathbf{0}\}$ chỉ gồm véc tơ không và chính V cũng là các không gian véc tơ con của V .

Ví dụ 2.7: Tập $\{x = (x_1, x_2, 0) | x_1, x_2 \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$ là không gian con của $\mathbb{R}^3$.

Ví dụ 2.8: Tập $C_{[a,b]_0} = \{f \in C_{[a,b]} | f(a) = 0\}$ là không gian con của $C_{[a,b]}$, nhưng tập $C_{[a,b]_1} = \{f \in C_{[a,b]} | f(a) = 1\}$ không là không gian con của $C_{[a,b]}$.

Ví dụ 2.9: P_n là không gian con của P_m nếu $n \le m$, trong đó P_n là không gian các đa thức bậc $\le n$.

2.2.2 Không gian con sinh bởi một họ véc tơ

Định lý 2.3: Nếu $(W_i)_{i\in I}$ là họ các không gian con của V thì $\bigcap_{i\in I} W_i$ cũng là không gian con của V.

Chứng minh: Áp dụng Định lý 2.2. ta dễ dàng suy ra điều cần chứng minh.

Từ Định lý 2.3 suy ra rằng với mọi tập con S bất kỳ của V luôn tồn tại không gian con W bé nhất của V chứa S. W chính là giao của tất cả các không gian con của V chứa S.

Định nghĩa 2.4: Không gian W bé nhất chứa S được gọi là không gian sinh bởi hệ S, ký hiệu $W = \text{span}S$, và S được gọi là hệ sinh của W.

Định lý 2.4: $W = \text{span}S$ bằng tập hợp tất cả các tổ hợp tuyến tính của S.

Chứng minh: Gọi W' là tập tất cả các tổ hợp tuyến tính của S. Ta chứng minh W' là không gian con bé nhất chứa S.

(i) Với mọi $u \in S$ thì $u = 1u \in W'$ vậy $S \subset W'$.

(ii) $u \in W', v \in W', u = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n, v = \beta_1 v_1 + \ldots + \beta_m v_m \in W'$

với $u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_m \in S$.

Do đó $\gamma u + \delta v = \gamma\alpha_1 u_1 + \ldots + \gamma\alpha_n u_n + \delta\beta_1 v_1 + \ldots + \delta\beta_m v_m \in W'$

Vậy W' là không gian con của V chứa S. Giả sử W'' là không gian con của V chứa S. Với mọi $u \in W'$, $u = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n$, $u_1, \ldots, u_n \in S$. Vì W'' chứa S nên $u_1, \ldots, u_n \in W''$ $\Rightarrow u = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n \in W''$. Do đó $W' \subset W''$. Nói cách khác W' là không gian con nhỏ nhất của V chứa S. Vậy $W' = W = \text{span}S$.

2.2.3 Tổng của một họ không gian véc tơ con

Giả sử $W_1, \ldots, W_n$ là n không gian con của V. Sử dụng định lý 2.2 ta chứng minh được tập $\{u_1 + \ldots + u_n \in V | u_i \in W_i, i = 1, \ldots, n\}$ cũng là một không gian véc tơ con của V. Ta gọi không gian véc tơ con này là tổng của các không gian con $W_1, \ldots, W_n$ và ký hiệu $W_1 + \ldots + W_n$.

Vậy $u \in W_1 + \ldots + W_n \Leftrightarrow u = u_1 + \ldots + u_n,\, u_i \in W_i;\, i = 1,\ldots,n$. (2.1)

Tuy nhiên, nói chung cách viết trên không duy nhất .

Ta có thể chứng minh được $W_1 + \ldots + W_n = \operatorname{span}(W_1 \cup \ldots \cup W_n)$ (2.2)

Một cách tổng quát ta định nghĩa tổng của một họ các không gian véc tơ con như sau.

Định nghĩa 2.5: Nếu $(W_i)_{i\in I}$ là họ các không gian con của V. Không gian con sinh bởi $\bigcup_{i\in I} W_i$ được gọi là tổng của các không gian W_i, ký hiệu $\sum_{i\in I} W_i$.

Vậy $\sum_{i\in I} W_i = \operatorname{span}(\bigcup_{i\in I} W_i)$. Theo định lý 2.4 ta có

$$\sum_{i\in I} W_i = \left\{ u_{i_1} + \ldots + u_{i_k} \,\middle|\, u_{i_j} \in W_{i_j}, i_j \in I, j = 1,\ldots,k; k = 1,2,\ldots \right\}. \quad (2.3)$$

Định nghĩa 2.6: Nếu mọi $u \in W_1 + \ldots + W_n$ được viết một cách duy nhất dưới dạng $u = u_1 + \ldots + u_n, u_i \in W_i, i = 1,\ldots,n$ thì tổng các không gian con này được gọi là tổng trực tiếp. Lúc đó ta ký hiệu $W_1 \oplus \ldots \oplus W_n$.

Định lý 2.5: Giả sử W_1, W_2 là hai không gian con của V, khi đó tổng hai không gian con này là tổng trực tiếp $W_1 \oplus W_2$ khi và chỉ khi $W_1 \cap W_2 = \{\boldsymbol{0}\}$.

Chứng minh:

($\Rightarrow$): Giả sử $W_1 \oplus W_2, v \in W_1 \cap W_2$ thì $v = \boldsymbol{0} + v = v + \boldsymbol{0} \in W_1 \oplus W_2$. Do cách viết duy nhất suy ra $v = \boldsymbol{0}$. Vậy $W_1 \cap W_2 = \{\boldsymbol{0}\}$.

($\Leftarrow$): Giả sử $u = u_1 + u_2 = v_1 + v_2 \in W_1 + W_2$ thì

$u_1 - v_1 = v_2 - u_2 \in W_1 \cap W_2 = \{\boldsymbol{0}\} \Rightarrow u_1 = v_1, u_2 = v_2$.

Vậy tổng của hai không gian con là tổng trực tiếp $W_1 \oplus W_2$.

2.3 ĐỘC LẬP TUYẾN TÍNH, PHỤ THUỘC TUYẾN TÍNH

Ta xét các hệ véc tơ có tính chất là nếu một véc tơ bất kỳ biểu diễn được thành tổ hợp tuyến tính của hệ này thì cách viết đó là duy nhất.

Định nghĩa 2.7: Cho hệ n véc tơ $S=\{u_1,...,u_n\}$ của V (các véc tơ này có thể trùng nhau). Hệ S được gọi là độc lập tuyến tính nếu từ:

$$\alpha_1u_1+...+\alpha_nu_n=\boldsymbol{0}, \alpha_1,...,\alpha_n\in\mathbb{R} \text{ thì } \alpha_1=...=\alpha_n=0.$$

Hệ không độc lập tuyến tính được gọi là phụ thuộc tuyến tính.

Vậy hệ $S=\{u_1,...,u_n\}$ phụ thuộc tuyến tính khi và chỉ khi ta có thể tìm được $\alpha_1,...,\alpha_n\in\mathbb{R}$ không đồng thời bằng 0 sao cho $\alpha_1u_1+...+\alpha_nu_n=\boldsymbol{0}$.

Ví dụ 2.10: Hệ $\{e_1,e_2\}$ trong đó $e_1=(1,0),\ e_2=(0,1)\in\mathbb{R}^2$ là độc lập, vì nếu $\alpha_1e_1+\alpha_2e_2=(\alpha_1,\alpha_2)=(0,0)$ thì $\alpha_1=\alpha_2=0$.

Ví dụ 2.11: • Hệ chứa véc tơ $\boldsymbol{0}$ là hệ phụ thuộc tuyến tính.

- Hệ hai véc tơ $\{u_1,u_2\}$ là hệ phụ thuộc tuyến tính khi và chỉ khi chúng tỷ lệ, nghĩa là $u_1=\alpha u_2$ hay $u_2=\alpha u_1$.
- Trong R_2 hai véc tơ phụ thuộc tuyến tính khi và chỉ khi cùng phương.
- Trong R_3 ba véc tơ phụ thuộc tuyến tính khi và chỉ khi đồng phẳng.

Tính chất 2.6:

1) Hệ véc tơ chứa hệ con phụ thuộc tuyến tính là hệ phụ thuộc tuyến tính. Vì vậy, mọi hệ con của hệ độc lập tuyến tính là hệ độc lập tuyến tính.

2) Một hệ véc tơ là phụ thuộc tuyến tính khi và chỉ khi có một véc tơ là tổ hợp tuyến tính của các véc tơ còn lại.

3) Giả sử hệ $\{v_1,...,v_n\}$ độc lập tuyến tính. Khi đó hệ $\{v_1,...,v_n,u\}$ phụ thuộc tuyến tính khi và chỉ khi u là tổ hợp tuyến tính của các véc tơ $\{v_1,...,v_n\}$, khi đó ta có thể biểu diễn duy nhất $u=\beta_1v_1+...+\beta_nv_n$.

Chứng minh: Ta chứng minh 3).

($\Leftarrow$): suy từ 2).

($\Rightarrow$): Giả sử $\{v_1,...,v_n,u\}$ phụ thuộc khi đó tồn tại các số $\beta_1',...,\beta_n',\alpha\in\mathbb{R}$ không đồng thời bằng 0 sao cho $\beta_1'v_1+...+\beta_n'v_n+\alpha u=0$, vì hệ $\{v_1,...,v_n\}$ độc lập nên $\alpha\neq 0$, $\Rightarrow u=-\dfrac{\beta_1}{\alpha}v_1-...-\dfrac{\beta_n}{\alpha}v_n$.

Hơn nữa giả sử $u=\beta_1v_1+...+\beta_nv_n$ thì

$$\mathbf{0} = u - u = (\beta_1 + \frac{\beta_1'}{\alpha})v_1 + \ldots + (\beta_n + \frac{\beta_n'}{\alpha})v_n \Rightarrow \beta_1 + \frac{\beta_1'}{\alpha} = \ldots = \beta_n + \frac{\beta_n'}{\alpha} = 0$$

Do đó $\beta_1 = -\frac{\beta_1'}{\alpha}, \ldots, \beta_n = -\frac{\beta_n'}{\alpha}$. Vậy cách viết trên là duy nhất.

2.4 HẠNG CỦA MỘT HỆ HỮU HẠN CÁC VÉC TƠ

2.4.1 Hệ con độc lập tuyến tính tối đại

Định nghĩa 2.8: Cho hệ S các véc tơ của không gian véc tơ V. Hệ con $\{v_1, \ldots, v_n\}$ của hệ S được gọi là độc lập tuyến tính tối đại của S nếu nó là hệ độc lập tuyến tính và nếu thêm bất kỳ véc tơ nào của S thì ta có hệ phụ thuộc tuyến tính.

Nói riêng hệ $\{v_1, \ldots, v_n\}$ là hệ độc lập tuyến tính tối đại của V nếu hệ $\{v_1, \ldots, v_n\}$ độc lập và nếu thêm bất kỳ véc tơ khác của V ta có hệ mới là phụ thuộc.

Tính chất 2.7:

1) Nếu S' là hệ con độc lập tuyến tính tối đại của hệ S thì mọi véc tơ của S là tổ hợp tuyến tính các véc tơ của S' và cách biểu diễn thành tổ hợp tuyến tính là duy nhất (điều này suy từ tính chất 2.6 - 3)).

2) Giả sử $\{v_1, \ldots, v_n\}$ là hệ con độc lập tuyến tính của một hệ hữu hạn S. Khi đó ta có thể bổ sung thêm để được một hệ con độc lập tuyến tính tối đại của S chứa $\{v_1, \ldots, v_n\}$.

Thật vậy, nếu $\{v_1, \ldots, v_n\}$ không tối đại thì tồn tại một véc tơ của S, ta ký hiệu v_{n+1}, sao cho hệ $\{v_1, \ldots, v_n, v_{n+1}\}$ độc lập tuyến tính. Lập luận tương tự và vì hệ S hữu hạn nên quá trình bổ sung thêm này sẽ dừng lại, cuối cùng ta được hệ $\{v_1, \ldots, v_n, v_{n+1}, \ldots, v_{n+k}\}$ độc lập tuyến tính tối đại của S.

2.4.2 Hạng của một hệ hữu hạn các véc tơ

Bổ đề 2.8 (Định lý thế Steinitz (Xtêi-nít)): Nếu hệ S độc lập tuyến tính có n véc tơ và mỗi véc tơ của S là tổ hợp tuyến tính các véc tơ của hệ R có k véc tơ thì $n \le k$.

Chứng minh: Giả sử $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$, $R = \{u_1, \ldots, u_k\}$. Ta sẽ chứng minh rằng có thể thay dần các véc tơ của hệ R bằng các véc tơ của hệ S để có các hệ R_1, R_2,.... mà mỗi véc tơ của hệ S vẫn còn là tổ hợp tuyến tính của R_1, R_2,....

Thật vậy, ta có $v_1 = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_k u_k$, $v_1 \neq 0$ (vì S độc lập) nên $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ không đồng thời bằng 0, ta giả sử $\alpha_1 \neq 0$ (có thể đánh lại số thứ tự của R), suy ra $u_1 = \frac{1}{\alpha_1}v_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_1}u_2 - \ldots - \frac{\alpha_k}{\alpha_1}u_k$.

Xét hệ $R_1 = \{v_1, u_2, ..., u_k\}$. Rõ ràng mọi véc tơ của S vẫn còn là tổ hợp tuyến tính các véc tơ của R_1.

Tương tự ta có $v_2 = \beta_1 v_1 + \beta_2 u_2 + ... + \beta_k u_k$, vì $\{v_1, v_2\}$ độc lập nên $\beta_2, ..., \beta_k \in \mathbb{R}$ không đồng thời bằng 0, ta giả sử $\beta_2 \neq 0$.

Khi đó $$u_2 = \frac{1}{\beta_2} v_2 - \frac{\beta_1}{\beta_2} v_1 - \frac{\beta_3}{\beta_2} u_3 - ... - \frac{\beta_k}{\beta_2} u_k .$$

Xét hệ $R_2 = \{v_1, v_2, u_3, ..., u_k\}$, mọi véc tơ của S cũng là tổ hợp tuyến tính các véc tơ của R_2.

Nếu $n > k$, tiếp tục quá trình này cuối cùng ta được mọi véc tơ của S là tổ hợp tuyến tính các véc tơ của hệ $R_k = \{v_1, v_2, ..., v_k\}$, là hệ con của S. Điều này mâu thuẫn với giả thiết hệ S độc lập tuyến tính. Vậy $n \leq k$.

Định lý 2.9: Mọi hệ con độc lập tuyến tính tối đại của hệ hữu hạn S các véc tơ của V đều có số phần tử bằng nhau.

Chứng minh: Giả sử $\{v_{i_1}, ..., v_{i_k}\}$ và $\{v_{j_1}, ..., v_{j_n}\}$ là hai hệ con độc lập tuyến tính tối đại của hệ S. Từ tính tối đại của mỗi hệ, suy ra rằng mọi véc tơ của hệ này là tổ hợp tuyến tính các véc tơ của hệ kia. Do đó $n \leq k$ và $k \leq n$, vậy $n = k$.

Định nghĩa 2.9: Số các véc tơ của một hệ con độc lập tuyến tính tối đại của hệ S được gọi là hạng (rank) của S, ký hiệu $r(S)$.

Qui ước hệ chỉ có véc tơ 0 có hạng là 0.

2.5 CƠ SỞ, SỐ CHIỀU CỦA KHÔNG GIAN VÉC TƠ

Định nghĩa 2.10:

1) Nếu không gian véc tơ V có một hệ sinh hữu hạn thì V được gọi là không gian hữu hạn sinh.

2) Mỗi hệ sinh độc lập tuyến tính của V được gọi là một cơ sở của V.

Giáo trình này chỉ hạn chế xét các không gian hữu hạn sinh.

Giả sử $S = \{v_1, ..., v_n\}$ là hệ sinh của V thì với mọi $u \in V$

$u = x_1 v_1 + ... + x_n v_n$, $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}$.

Định lý 2.10: Giả sử $\{e_1,...,e_n\}$ là một hệ các véc tơ của V. Các mệnh đề sau là tương đương:

(i) Hệ $\{e_1,...,e_n\}$ là một cơ sở của V.

(ii) Hệ $\{e_1,...,e_n\}$ là hệ độc lập tuyến tính tối đại của V.

(iii) Mọi véc tơ $u \in V$ tồn tại một cách viết duy nhất:

$$u = x_1e_1 + ... + x_ne_n \ , \ \ x_1,...,x_n \in \mathbb{R} . \qquad (2.4)$$

Chứng minh: (i)⇒(ii): Hiển nhiên từ định nghĩa của cơ sở.

(ii)⇒(iii): Suy từ tính chất 3.2 - 3).

(iii)⇒(i): Rõ ràng $\{e_1,..., e_n\}$ là hệ sinh. Ngoài ra nếu $x_1e_1 + ... + x_ne_n = \boldsymbol{0}$, mặt khác $\boldsymbol{0} = 0e_1 + ... + 0e_n$. Do cách viết duy nhất suy ra $x_1 = ... = x_n = 0$.

Định nghĩa 2.11: $(x_1,..., x_n)$ trong (2.4) được gọi là toạ độ của véc tơ u trong cơ sở $\{e_1,...,e_n\}$.

Ta ký hiệu toạ độ của véc tơ u trong cơ sở $\mathscr{B} = \{e_1,...,e_n\}$ là $[u]_{\mathscr{B}}$.

Vậy nếu u thỏa mãn (2.4) thì

$$[u]_{\mathscr{B}} = (x_1,..., x_n) \qquad (2.5)$$

Định lý 2.11: Giả sử V là không gian hữu hạn sinh và $\{v_1,..., v_k\}$ là hệ độc lập tuyến tính các véc tơ của V. Khi đó có thể bổ sung thêm để có được hệ $\{v_1,..., v_k, v_{k+1},..., v_{k+m}\}$ là một cơ sở của V.

Chứng minh: Giả sử V có một hệ sinh có n véc tơ. Nếu $S = \{v_1,..., v_k\}$ không phải là cơ sở thì S không phải là hệ sinh, theo tính chất 2.6-3) tồn tại véc tơ, ta ký hiệu v_{k+1}, sao cho hệ $\{v_1,..., v_k, v_{k+1}\}$ độc lập tuyến tính. Tiếp tục quá trình này cuối cùng ta có hệ $\{v_1,..., v_k, v_{k+1},..., v_{k+m}\}$ độc lập tuyến tính và là hệ sinh, $k + m \le n$ (theo Bổ đề 2.8). Vậy $\{v_1,..., v_k, v_{k+1},..., v_{k+m}\}$ là một cơ sở cần tìm.

Hệ quả 2.12: Mọi không gian hữu hạn sinh đều tồn tại cơ sở.

Định lý 2.13: Số phần tử của mọi cơ sở của đều bằng nhau.

Chứng minh: Áp dụng Bổ đề 2.8 ta có hai cơ sở bất kỳ của V đều có số phần tử bằng nhau.

Định nghĩa 2.12: Số véc tơ của một cơ sở của V được gọi là số chiều của V, ký hiệu $\dim V$. Quy ước $\dim\{\mathbf{0}\}=0$.

Ví dụ 2.12: Trong không gian $\mathbb{R}^n$ ta xét hệ $\mathscr{B}=\{e_1,...,e_n\}$ trong đó:

$$e_1=(1,0,...,0),\ e_2=(0,1,...,0),...,e_n=(0,0,...,1) \tag{2.6}$$

là một cơ sở của $\mathbb{R}^n$ gọi là cơ sở chính tắc. Vậy $\dim\mathbb{R}^n=n$.

Ví dụ 2.13: Hệ $\mathscr{B}=\{1,t,...,t^n\}$ là một cơ sở của P_n, gọi là cơ sở chính tắc. Vậy $\dim P_n=n+1$.

Chú ý 2.14: Không gian $P=\bigcup_{n=1}^{\infty}P_n$ là một ví dụ về không gian véc tơ không hữu hạn sinh. Thật vậy, hệ $\{1,t,t^2,....\}$ có vô hạn véc tơ và độc lập tuyến tính nên không thể là hữu hạn sinh.

Định lý 2.15: Giả sử $\dim V=n$ và $S=\{v_1,...,v_m\}$ là hệ m véc tơ của V. Khi đó: (i) Nếu hệ S độc lập tuyến tính thì $m\le n$.

(ii) Nếu hệ S là hệ sinh của thì $m\ge n$.

(iii) Nếu $m=n$ thì hệ S độc lập tuyến tính khi và chỉ khi S là hệ sinh.

Chứng minh: Gọi $\mathscr{B}$ là một cơ sở của V. Áp dụng bổ đề 2.8 cho hai hệ $\mathscr{B}$ và S suy ra các điều cần chứng minh.

Định lý 2.16: Giả sử W_1,W_2 là hai không gian con của V thì

$$\dim W_1+\dim W_2=\dim(W_1+W_2)+\dim(W_1\cap W_2) \tag{2.7}$$

Đặc biệt: $$\dim(W_1\oplus W_2)=\dim W_1+\dim W_2$$ (2.8)

Chứng minh: Giả sử $\{e_1,...,e_l\}$ là một cơ sở của $W_1\cap W_2$ (nếu $W_1\cap W_2=\phi$ thì $l=0$). Theo định lý 2.11 ta có thể bổ sung thêm để $\{e_1,...,e_l,u_1,...,u_m\}$ là một cơ sở của W_1 và $\{e_1,...,e_l,v_1,...,v_k\}$ là một cơ sở của W_2. Với mọi $v\in W_1+W_2$ thì:

$$v=(x_1+x'_1)e_1+...+(x_l+x'_l)e_l+y_1u_1+...+y_mu_m+z_1v_1+...+z_kv_k.$$

Vậy $\{e_1,...,e_l,u_1,...,u_m,v_1,...,v_k\}$ là hệ sinh của W_1+W_2. Mặt khác, giả sử $x_1e_1+...+x_le_l+y_1u_1+...+y_mu_m+z_1v_1+...+z_kv_k=0$

thì $x_1e_1 + ... + x_le_l + y_1u_1 + ... + y_mu_m = -z_1v_1 - ... - z_kv_k \in W_1 \cap W_2$.

$\Rightarrow -z_1v_1 - ... - z_kv_k = t_1e_1 + ... + t_le_l \in W_1 \cap W_2$

$\Rightarrow z_1v_1 + ... + z_kv_k + t_1e_1 + ... + t_le_l = 0$

$\Rightarrow z_1 = ... = z_k = t_1 = ... = t_l = 0 \Rightarrow x_1 = ... = x_l = y_1 = ... = y_m = 0$.

Vậy $\{e_1,..., e_l, u_1,..., u_m, v_1,..., v_k\}$ là một cơ sở của $W_1 + W_2$.

$$\dim W_1 + \dim W_2 = 2l + m + k = \dim(W_1 + W_2) + \dim(W_1 \cap W_2).$$

<u>Định lý 2.17</u>: Giả sử S là hệ hữu hạn các véc tơ của V. Khi đó

(i) $r(S) = \dim W$, với $W = \text{span} S$.

(ii) Khi thực hiện một số hữu hạn các phép biến đổi sơ cấp sau lên hệ S:

• Nhân một số khác 0 với một véc tơ của hệ S;

• Cộng vào một véc tơ của hệ S một tổ hợp tuyến tính các véc tơ khác của S; thì hệ S biến thành hệ S' có $r(S) = r(S')$.

Chứng minh: (i) Giả sử S_0 là hệ con độc lập tuyến tính tối đại của S thì S_0 cũng sinh ra W, do đó S_0 là một cơ sở của $W \Rightarrow r(S) =$ số véc tơ của $S_0 = \dim W$.

(ii) Nếu $W = spanS,\ W' = spanS'$ thì $W = W' \Rightarrow r(S) = r(S')$.

<u>Nhận xét 2.18</u>: Để tìm hạng của hệ véc tơ $\{v_1, v_2,..., v_n\}$ ta có thể sử dụng 2 cách sau:

1) Áp dụng định lý 2.17 bằng cách thực hiện các phép biến đổi sơ cấp lên hệ véc tơ đã cho để đưa về hệ véc tơ mà ta dễ dàng nhận được hạng của nó.

Khi thực hành ta có thể viết tọa độ các véc tơ thành một bảng, mỗi véc tơ nằm trên một hàng, sau đó biến đổi để bảng số này có dạng tam giác.

2) Áp dụng tính chất 2.6 theo từng bước như sau:

1. Loại các véc tơ $v_i = \boldsymbol{0}$,

2. Giả sử $v_1 \neq \boldsymbol{0}$, loại các véc tơ v_i tỉ lệ với v_1,

3. Giả sử $\{v_{i_1},..., v_{i_k}\}$ độc lập, khi đó $\{v_{i_1},..., v_{i_k}, v_j\}$ độc lập khi và chỉ khi v_j không biểu diễn thành tổ hợp tuyến tính của $\{v_{i_1},..., v_{i_k}\}$.

<u>Ví dụ 2.14</u>: Tìm hạng của hệ véc tơ sau:

$v_1 = (1,1,1,1)$, $v_2 = (1,-1,1,-1)$, $v_3 = (1,3,1,3)$,

$v_4 = (1,2,0,2)$, $v_5 = (1,2,1,2)$.

Giải:

- Cách1:

$$\begin{cases} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{cases}$$

(Hàng1 $\rightarrow$ hàng 1, hàng 2 - hàng1 $\rightarrow$ hàng 2, hàng 3 - hàng1 $\rightarrow$ hàng 3, hàng 4 - hàng1 $\rightarrow$ hàng 4, hàng 5 - hàng4 $\rightarrow$ hàng 5)

$$\rightarrow \begin{cases} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{cases}$$

(Hàng 3 + hàng 2 $\rightarrow$ hàng 3, hàng 4 +(1/2) hàng 2 - hàng 5 $\rightarrow$ hàng 4).

(-1/2hàng 2 $\rightarrow$ hàng 2, hàng 5 $\rightarrow$ hàng 3).

Vậy hệ véc tơ có hạng là 3.

- Cách 2: v_1, v_2 không tỉ lệ nên độc lập. Nếu $v_3 = xv_1 + yv_2$ thì

$$\begin{cases} x+y=1 \\ x-y=3 \\ x+y=1 \\ x-y=3 \end{cases} \Rightarrow x=2,\ y=-1.$$

Vậy $v_3 = 2v_1 - v_2$. Nghĩa là $\{v_1, v_2, v_3\}$ phụ thuộc.

Nếu $v_4 = xv_1 + yv_2$ thì $\begin{cases} x+y=1 \\ x-y=2 \\ x+y=0 \\ x-y=2 \end{cases}$, hệ vô nghiệm. Vậy $\{v_1, v_2, v_4\}$ độc lập.

Nếu $v_5 = xv_1 + yv_2 + zv_4$ thì

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x-y+2z=2 \\ x+y=1 \\ x-y+2z=2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x=3/2,\ y=-1/2, z=0.$$

Vậy $v_5 = 3/2v_1 - 1/2v_2$. Nghĩa là $\{v_1, v_2, v_4, v_5\}$ phụ thuộc.

Vậy $\{v_1, v_2, v_4\}$ là một hệ con độc lập tuyến tính tối đại của $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$.

CHƯƠNG 3: MA TRẬN

3.1 KHÁI NIỆM MA TRẬN

Định nghĩa 3.1: Một bảng số có m hàng n cột

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad (3.1)$$

được gọi là một ma trận cỡ $m\times n$. a_{ij} là phần tử ở hàng thứ i và cột j.

Khi $a_{ij}\in\mathbb{Z}, \forall i,j$ thì A được gọi là ma trận nguyên, $a_{ij}\in\mathbb{C}, \forall i,j$ thì A được gọi là ma trận phức. Nếu không chỉ rõ a_{ij} thì ta quy ước A là ma trận thực.

Ma trận A cỡ $m\times n$ có thể được viết tắt dạng

$$A=\left[a_{ij}\right]_{j=\overline{1,n}}^{i=\overline{1,m}} \quad \text{hay} \quad A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n} \qquad (3.2)$$

Khi $m=n$ ta nói A là ma trận vuông cấp n.

Tập hợp tất cả các ma trận cỡ $m\times n$ được ký hiệu $\mathcal{M}_{m\times n}$.

Tập hợp tất cả các ma trận vuông cấp n được ký hiệu $\mathcal{M}_n$.

Ví dụ 3.1: $\begin{bmatrix} 0 & -1 & \pi \\ -3 & 2 & \sqrt{5} \end{bmatrix}$ là ma trận cỡ 2×3.

Hai ma trận cùng cỡ $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$, $B=\left[b_{ij}\right]_{m\times n}$ bằng nhau, ký hiệu $A=B$, khi và chỉ khi $a_{ij}=b_{ij}$ với mọi $i=\overline{1,m}$; $j=\overline{1,n}$.

3.2 CÁC PHÉP TOÁN MA TRẬN

3.2.1 Phép cộng

Cho hai ma trận cùng cỡ $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$, $B=\left[b_{ij}\right]_{m\times n}$

Tổng của hai ma trận A,B là ma trận cùng cỡ được ký hiệu và định nghĩa bởi

$$A+B=\left[c_{ij}\right]_{m\times n}\ ,\ c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}\ \text{ với mọi }\ i=\overline{1,m}\,;\quad j=\overline{1,n}\,. \tag{3.3}$$

Ví dụ 3.2: $\begin{bmatrix}2 & -3 & 0\\ 9 & 4 & -1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 8 & 5\\ -3 & 1 & 7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 5 & 5\\ 6 & 5 & 6\end{bmatrix}$.

3.2.2 Phép nhân ma trận với một số

Cho ma trận $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ cỡ $m\times n$, và số thực k. Ta định nghĩa và ký hiệu

$$kA=\left[ka_{ij}\right]_{m\times n}\ . \tag{3.4}$$

Ví dụ 3.3: $\dfrac{1}{2}\begin{bmatrix}1/2 & -1 & 0\\ 3 & -8 & 10\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1/4 & -1/2 & 0\\ 3/2 & -4 & 5\end{bmatrix}$.

Tính chất 3.1: Các tính chất sau đây đúng đối với các ma trận cùng cỡ:

1) $A+(B+C)=(A+B)+C$;

2) Ma trận có các phần tử đều bằng 0 gọi là ma trận không và ký hiệu 0.

   Khi đó: $A+0=0+A=A$;

3) $A+(-A)=0$, trong đó $-A=\left[-a_{ij}\right]_{m\times n}$;

4) $A+B=B+A$.

Vậy $(\mathcal{M}_{m\times n},+)$ là một nhóm Abel.

Ta cũng kiểm chứng được các tính chất sau đúng với mọi số thực k,h với mọi ma trận $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$, $B=\left[b_{ij}\right]_{m\times n}$ cỡ $m\times n$:

5) $k(A+B)=kA+kB$;

6) $(k+h)A=kA+hA$;

7) $k(hA) = (kh)A$;

8) $1A = A$.

Với 8 tính chất này tập $\mathcal{M}_{m\times n}$ là không gian véc tơ.

Ký hiệu E_{ij} là ma trận cỡ $m \times n$ có các phần tử đều bằng 0 ngoại trừ phần tử ở hàng i cột j bằng 1 thì hệ các ma trận $\left\{E_{ij} \middle| i = \overline{1,m}\,;\, j = \overline{1,n}\right\}$ là một cơ sở của $\mathcal{M}_{m\times n}$.

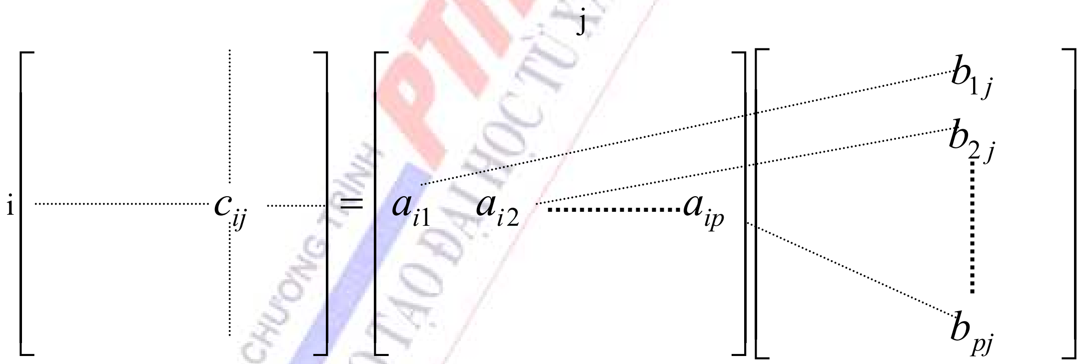
Vậy $\dim \mathcal{M}_{m\times n} = m \times n$.

3.2.3 Phép nhân ma trận

<u>Định nghĩa 3.2</u>: Tích hai ma trận $A = \left[a_{ij}\right]_{m\times p}$ và $B = \left[b_{ij}\right]_{p\times n}$ là ma trận cỡ m×n được ký hiệu và định nghĩa bởi $AB = \left[c_{ij}\right]_{m\times n}$, trong đó

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj} \text{ với mọi } i = \overline{1,m}\,;\, j = \overline{1,n}. \qquad (3.5)$$

Vậy phần tử ở hàng thứ i cột thứ j của AB bằng tổng của tích các phần tử của hàng thứ i của A với các phần tử tương ứng của cột thứ j của B.



<u>Ví dụ 3.4</u>: $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 15 \\ 7 & 17 \end{bmatrix}$.

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 8 & -4 \\ 3 & 12 & -6 \end{bmatrix}.$$

Ta thấy rằng tích của hai ma trận A và B định nghĩa được khi số cột của A bằng số hàng của B. Vì vậy có thể định nghĩa AB nhưng không định nghĩa được BA nếu số cột của B không bằng số hàng của A.

Khi A, B là hai ma trận vuông cùng cấp thì ta có đồng thời AB và BA. Mặc dầu vậy chưa chắc có đẳng thức $AB = BA$, nói cách khác tích ma trận không có tính giao hoán. Chẳng hạn, xét

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & 3 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 3 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 & \dots & 0 \\ 11 & 4 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \neq BA = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 0 & \dots & 0 \\ -3 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

<u>Tính chất 3.2</u>: Giả sử A, B, C là các ma trận với số cột số hàng thích hợp để các phép toán sau xác định được thì ta có các đẳng thức:

1) $A(BC) = (AB)C$ tính kết hợp.

2) $A(B + C) = AB + AC$ tính phân phối bên trái phép nhân ma trận với phép cộng.

3) $(B + C)A = BA + CA$ tính phân phối bên phải phép nhân ma trận với phép cộng.

4) Với mọi $k \in \mathbb{R}$, $k(AB) = (kA)B = A(kB)$.

5) Với mọi số tự nhiên dương n ta xét ma trận I_n vuông cấp n có các phần tử trên đường chéo bằng 1 và các phần tử ở vị trí khác đều bằng 0.

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & & \bigcirc \\ & \ddots & \\ \bigcirc & & 1 \end{bmatrix}$$

Khi đó với mọi ma trận A cỡ $m \times n$ ta có $I_m A = A = AI_n$.

Ma trận I_n được gọi là ma trận đơn vị cấp n.

Từ các tính chất trên ta thấy tập hợp các ma trận vuông cấp $n \geq 2$ cùng với phép cộng và nhân ma trận $(\mathcal{M}_n,+,.)$ là một vành không giao hoán, có đơn vị và không nguyên vì có ước của 0. Chẳng hạn

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & 4 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & -6 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 3 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$A, B \neq 0$ nhưng $AB = 0$.

3.2.4 Ma trận chuyển vị

Định nghĩa 3.3: Cho ma trận A cỡ $m \times n$, nếu ta đổi các hàng của ma trận A thành các cột (và do đó các cột thành các hàng) thì ta được ma trận mới cỡ $n \times m$, gọi là ma trận chuyển vị của ma trận trên A, ký hiệu A^t

$$A^t = \left[c_{ij}\right]_{n\times m} \;;\; c_{ij} = a_{ji} \qquad i = \overline{1,n} \;\; j = \overline{1,m} \,. \tag{3.6}$$

Ví dụ 3.5: $A = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 2 & 0 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}$; $A^t = \begin{bmatrix} -4 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & 9 \end{bmatrix}$.

Tính chất 3.3:

1) $(A+B)^t = A^t + B^t$.

2) $(kA)^t = kA^t$.

3) $(AB)^t = B^t A^t$.

Định nghĩa 3.4:

1) Nếu $A = A^t$ thì A được gọi là ma trận đối xứng (A là ma trận vuông có các phần tử đối xứng nhau qua đường chéo thứ nhất).

2) $A=-A^t$ thì A được gọi là phản đối xứng (hay đối xứng lệch) (A là ma trận vuông có các phần tử đối xứng và trái dấu qua đường chéo thứ nhất, các phần tử trên đường chéo thứ nhất bằng 0).

3.3 MA TRẬN CỦA MỘT HỆ VÉC TƠ TRONG MỘT CƠ SỞ NÀO ĐÓ

Giả sử V là không gian n chiều với một cơ sở $\mathscr{B}=\{e_1,.....e_n\}$.

$\{v_1,...,v_m\}$ là một hệ véc tơ của V có toạ độ trong cơ sở $\mathscr{B}$:

$$v_j=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}e_i \quad ,j=\overline{1,m}$$

Khi đó ma trận $A=\left[a_{ij}\right]_{n\times m}$ có các cột là các toạ độ của các véc tơ $\{v_1,...,v_m\}$ trong cơ sở $\mathscr{B}$ được gọi là ma trận của hệ véc tơ $\{v_1,...,v_m\}$ trong cơ sở $\mathscr{B}$.

Ngược lại, với ma trận A cỡ $n\times m$ cho trước thì ta có hệ m véc tơ mà toạ độ của nó trong cơ sở $\mathscr{B}$ là các cột của A.

Vậy khi không gian véc tơ V với cơ sở cố định $\mathscr{B}=\{e_1,.....e_n\}$ thì có tương ứng 1 - 1 giữa các ma trận cỡ $n\times m$ với các hệ m véc tơ của V.

Ma trận chuyển cơ sở

Giả sử $\mathscr{B}=\{e_1,.....e_n\}$, $\mathscr{B}'=\{e'_1,.....e'_n\}$ là hai cơ sở của V. Ma trận của hệ véc tơ $\mathscr{B}'$ trong cơ sở $\mathscr{B}$ được gọi là ma trận chuyển từ cơ sở $\mathscr{B}$ sang cơ sở $\mathscr{B}'$. Nghĩa là nếu

$$e'_j=\sum_{i=1}^{n}t_{ij}e_i\ ,\ j=\overline{1,n}\ ...\ \text{thì}\ P=\left[t_{ij}\right] \tag{3.7}$$

là ma trận chuyển từ cơ sở $\mathscr{B}$ sang $\mathscr{B}'$.

Khi đó với véc tơ bất kỳ $u\in V$; $u=\sum_{i=1}^{n}x_ie_i=\sum_{i=1}^{n}x'_i\,e'_i$.

Ta có:
$$\left[x_i\right]_{n\times 1}=\left[t_{ij}\right]_{n\times n}\left[x'_j\right]_{n\times 1} \tag{3.8}$$

(3.8) được gọi là công thức đổi tọa độ

Nếu A, A' lần lượt là ma trận của $\{v_1,...,v_m\}$ trong cơ sở $\mathscr{B}$, $\mathscr{B}'$ thì

$$A=PA' \tag{3.9}$$

3.4 HẠNG CỦA MA TRẬN

Định nghĩa 3.5: Ta gọi hạng của ma trận A, ký hiệu $r(A)$, là hạng của các véc tơ cột của A.

Phương pháp tìm hạng của ma trận bằng phép biến đổi sơ cấp

Hạng $r(S)$ của một hệ véc tơ S của không gian V là số véc tơ của một hệ con độc lập tuyến tính tối đại của S hay là chiều của $\text{span}S$ (xem Định lý 2.17). Vì vậy khi ta thực hiện liên tiếp các phép biến đổi sau, gọi là các phép biến đổi sơ cấp, thì $\text{span}S$ không đổi do đó hạng của hệ không thay đổi:

1) Đổi chỗ cho nhau hai véc tơ của hệ.

2) Nhân vào một véc tơ của hệ một số khác 0.

3) Cộng vào một véc tơ của hệ một tổ hợp tuyến tính các véc tơ khác của hệ.

Vì vậy để tìm hạng của một ma trận ta thực hiện các biến đổi sơ cấp lên các cột (sau này ta sẽ chứng minh được rằng ta cũng có thể biến đổi theo các hàng) để đưa ma trận về dạng tam giác, từ đó suy ra hạng của ma trận.

Ví dụ 3.6:

$$A=\begin{bmatrix}1 & -3 & 4 & 2\\ 2 & 1 & 1 & 4\\ -1 & -2 & 1 & -2\end{bmatrix}\xrightarrow[\substack{4c_1+c_3\to c_3\\ -2c_1+c_4\to c_4}]{3c_1+c_2\to c_2}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 2 & 7 & -7 & 0\\ -1 & -5 & 5 & 0\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{c_2\to c_2\\ c_2+c_3\to c_3}]{c_1\to c_1}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 2 & 7 & 0 & 0\\ -1 & -5 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Vậy $r(A)=2$.

$$B=\begin{bmatrix}-1 & 2 & 1 & -1 & 1\\ a & -1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & a & 0 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 2 & -1 & 1\end{bmatrix}\xrightarrow[\substack{c_2\to c_5\\ c_3\to c_1\\ c_4\to c_2\\ c_5\to c_3}]{c_1\to c_4}\begin{bmatrix}1 & -1 & 1 & -1 & 2\\ 1 & -1 & -1 & a & -1\\ 0 & 1 & 1 & 1 & a\\ 2 & -1 & 1 & 1 & 2\end{bmatrix}\xrightarrow[\substack{c_1+c_2\to c_2\\ -c_1+c_3\to c_3\\ c_1+c_4\to c_4\\ -2c_1+c_5\to c_5}]{c_1\to c_1}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & -2 & a+1 & -3\\ 0 & 1 & 1 & 1 & a\\ 2 & 1 & -1 & 3 & -2\end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{-(a+3)c_2+(a+1)c_3+2c_4\to c_4\\ (3-2a)c_2-3c_3+2c_5\to c_5}]{\substack{c_1\to c_1\\ c_2\to c_3\\ c_3\to c_2}} \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & -2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 2 & -1 & 1 & 2-2a & 2-2a\end{bmatrix}$$

Vậy $\quad r(B)=\begin{cases}4 & \text{nếu } \; a\neq 1\\ 3 & \text{nếu } \; a=1\end{cases}.$

Xét các ma trận vuông cấp n sau:

$$R(k,\lambda)=\left[a_{ij}\right]=\begin{array}{c} \\ \begin{bmatrix}1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1\end{bmatrix} \\ \text{cột k}\end{array}\begin{array}{l} \\ \\ \text{hàng } k \\ \\ \\ \\ \end{array} \qquad a_{ij}=\begin{cases}0 & i\neq j\\ 1 & i=j\neq k\\ \lambda & i=j=k\end{cases} \qquad (3.10)$$

$$P(i,j)=\left[a_{kl}\right]=\begin{array}{c}\begin{bmatrix}1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 0 & \cdots & 1 & \\ & & \vdots & \ddots & \vdots & \\ & & 1 & \cdots & 0 & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1\end{bmatrix} \\ \text{cột i} \quad \text{cột j}\end{array}\begin{array}{l} \\ \\ \text{hàng i} \\ \\ \text{hàng j} \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

$$a_{kl}=\begin{cases}1 & k=l\neq i;\, j\\ 0 & k=l \text{ và bằng } i \text{ hay } j\\ 1 & k=i, l=j\\ 1 & k=j, l=i\\ 0 & \text{trong các trường hợp khác}\end{cases} \qquad (3.11)$$

$$Q(i,j,\lambda)=[a_{kl}]=\begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & \lambda & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ \text{hàng } i \\ \\ \end{array} \\ \text{cột } j & \end{array}$$

$$a_{kl}=\begin{cases} 1 & k=l \\ \lambda & k=i, l=j \\ 0 & \text{trong các trường hợp khác} \end{cases} \qquad (3.12)$$

<u>Tính chất 3.5</u>: Ta dễ dàng kiểm tra được:

a) Nếu nhân $R(k,\lambda)$ vào bên phải của ma trận A thì ma trận tích $AR(k,\lambda)$ có được bằng cách nhân thêm λ vào cột k của ma trận A.

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a & \lambda b & c \\ a' & \lambda b' & c' \\ a'' & \lambda b'' & c'' \end{bmatrix}$$

b) Nếu nhân $P(i,j)$ vào bên phải của ma trận A thì ma trận tích $AP(i,j)$ có được bằng cách đổi chỗ hai cột i và j của A cho nhau.

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b & a & c \\ b' & a' & c' \\ b'' & a'' & c'' \end{bmatrix}$$

c) Nếu nhân $Q(i,j,\lambda)$ vào bên phải của ma trận A thì ma trận tích $AQ(i,j,\lambda)$ có được bằng cách nhân λ vào cột i và cộng vào cột j của ma trận A.

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \lambda & 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a+\lambda c & b & c \\ a'+\lambda c' & b' & c' \\ a''+\lambda c'' & b'' & c'' \end{bmatrix}$$

d) Nếu nhân P,Q,R vào bên trái của ma trận A thì ta có các kết quả tương tự như trên, trong đó các tác động lên hàng đổi thành tác động lên cột và ngược lại. Chẳng hạn

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ \lambda a' & \lambda b' & \lambda c' \\ a'' & b'' & c'' \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ \lambda a'+a'' & \lambda b'+b'' & \lambda c'+c'' \end{bmatrix}.$$

CHƯƠNG 4: ĐỊNH THỨC

4.1 HOÁN VỊ VÀ PHÉP THẾ

Định nghĩa 4.1:

1) Mỗi song ánh $\sigma:\{1,2,...,n\}\to\{1,2,...,n\}$ được gọi là một phép thế bậc n.

Ta thường ký hiệu một phép thế bằng một ma trận có hàng thứ nhất là các số 1,2,...,n sắp theo thứ tự tăng dần còn hàng thứ hai là ảnh của nó:

$$\sigma=\begin{bmatrix}1 & 2 & \dots & n\\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n)\end{bmatrix}$$

2) Ảnh của một phép thế được gọi là hoán vị. Với phép thế σ ta có hoán vị tương ứng

$$\begin{bmatrix}\sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n)\end{bmatrix}.$$

3) Dấu của phép thế:

Cho hoán vị $\begin{bmatrix}\sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n)\end{bmatrix}$, nếu có cặp $i<j$ mà $\sigma(i)>\sigma(j)$ thì ta nói có một nghịch thế của σ.

Giả sử k là số các nghịch thế của σ, ta định nghĩa và ký hiệu dấu của phép thế σ là

$$\operatorname{sgn}\sigma=(-1)^k \qquad (4.1)$$

Ta dễ dàng kiểm chứng được rằng tập các phép thế bậc n với luật hợp thành là phép hợp của hai ánh xạ tạo thành một nhóm không giao hoán, gọi là nhóm đối xứng bậc n, ký hiệu S_n.

Trong chương 1 ta đã biết tập S_n có đúng n! phần tử. Chẳng hạn S_2 có 2 phần tử, S_3 có 6 phần tử ...

Ví dụ 4.1: Hoán vị $\begin{bmatrix}1 & 3 & 2\end{bmatrix}$ ứng với phép thế $\sigma=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 2\end{bmatrix}$ có một nghịch thế. Vậy $\operatorname{sgn}\sigma=(-1)^1=-1$.

Để tìm số các nghịch thế k của phép thế σ ta thực hiện các bước sau:

Trong hoán vị $\begin{bmatrix}\sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n)\end{bmatrix}$ có i_1 là giá trị sao cho $\sigma(i_1)=1$.

♦ Gọi k_1 là số các số trong $[\sigma(1) \quad \sigma(2) \quad \ldots \quad \sigma(n)]$ đứng trước $\sigma(i_1)=1$;

♦ Xoá số $\sigma(i_1)=1$, tồn tại i_2 sao cho $\sigma(i_2)=2$, gọi k_2 là số các số còn lại trong $[\sigma(1) \quad \sigma(2) \quad \ldots \quad \sigma(n)]$ đứng trước $\sigma(i_2)=2$;

♦ Xoá số $\sigma(i_2)=2$ và tiếp tục đếm như thế ...

Cuối cùng số các nghịch thế của σ là:

$$k = k_1 + k_2 + \ldots + k_{n-1}$$

Ví dụ 4.2: Hoán vị $[3 \quad 4 \quad 2 \quad 1]$ có $k_1 = 3$, $k_2 = 2$, $k_3 = 0$.

Vậy $k = 5$ và $\operatorname{sgn}\sigma = (-1)^5 = -1$.

Tính chất 4.1:

1) Cặp $(i, j), i \neq j$ là một nghịch thế của phép thế σ (nghĩa là $i < j$ và $\sigma(i) > \sigma(j)$) khi và chỉ khi dấu của $\dfrac{\sigma(i)-\sigma(j)}{i-j}$ bằng -1. Vậy

$$\operatorname{sgn}\sigma = \prod_{1 \le i \neq j \le n} \text{dấu}\left(\frac{\sigma(i)-\sigma(j)}{i-j}\right). \qquad (4.2)$$

2) Chuyển vị $\sigma = [i_0 \quad j_0]$ là phép thế chỉ biến đổi hai phần tử i_0, j_0 cho nhau và giữ nguyên các phần tử còn lại:

$$\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \ldots & i_0 & \ldots & j_0 & \ldots & n \\ 1 & 2 & \ldots & j_0 & \ldots & i_0 & \ldots & n \end{bmatrix} \qquad (4.3)$$

Dễ dàng tính được: $k_1 = \ldots = k_{i_0-1} = 0$, $k_{i_0} = j_0 - i_0$,

$k_{i_0+1} = \ldots = k_{j_0-1} = 1$, $k_{j_0} = \ldots = k_n = 0 \quad \Rightarrow \quad k = 2(j_0 - i_0) - 1$

Vậy $\operatorname{sgn}\sigma = (-1)^k = -1$.

3) Với mọi $\sigma, \mu \in S_n$: $\operatorname{sgn}(\sigma \circ \mu) = \operatorname{sgn}\sigma \operatorname{sgn}\mu$. (4.4)

Thật vậy, khi (i, j) chạy khắp tập $\{1,2,\ldots,n\} \times \{1,2,\ldots,n\} \setminus \{(1,1),\ldots,(n,n)\}$ thì $(\mu(i), \mu(j))$ cũng chạy khắp tập này. Do đó:

$$\operatorname{sgn}\sigma=\prod_{1\le i\ne j\le n}\text{dấu}\left(\frac{\sigma(i)-\sigma(j)}{i-j}\right)=\prod_{1\le \mu(i)\ne \mu(j)\le n}\text{dấu}\left(\frac{\sigma(\mu(i))-\sigma(\mu(j))}{\mu(i)-\mu(j)}\right)$$

$$=\prod_{1\le i\ne j\le n}\text{dấu}\left(\frac{\sigma(\mu(i))-\sigma(\mu(j))}{\mu(i)-\mu(j)}\right).$$

$$\operatorname{sgn}\sigma\operatorname{sgn}\mu=\prod_{1\le i\ne j\le n}\text{dấu}\left(\frac{\sigma(\mu(i))-\sigma(\mu(j))}{\mu(i)-\mu(j)}\right)\cdot\prod_{1\le i\ne j\le n}\text{dấu}\left(\frac{\mu(i)-\mu(j)}{i-j}\right)$$

$$=\prod_{1\le i\ne j\le n}\text{dấu}\left(\frac{\sigma(\mu(i))-\sigma(\mu(j))}{i-j}\right)=\operatorname{sgn}(\sigma\circ\mu).$$

4) Với mọi chuyển vị $[i_0\ \ j_0]$ (xem 4.3) và phép thế σ:

$$\operatorname{sgn}\sigma\circ[i_0\ \ j_0]=-\operatorname{sgn}\sigma.$$

4.2 ĐỊNH THỨC

Khi giải hệ phương trình tuyến tính $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x+b'y=c'\end{cases}$ ta tính các định thức

$$D=\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b'\end{vmatrix}=ab'-ba',\ D_x=\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b'\end{vmatrix}=cb'-bc',\ D_y=\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c'\end{vmatrix}=ac'-ca'.$$

Như vậy định thức của ma trận $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}$ vuông cấp 2 là

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$$

Mặt khác nhóm đối xứng S_2 có 2 phần tử là $\sigma_1=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{bmatrix}$ và $\sigma_2=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{bmatrix}$ có dấu $\operatorname{sgn}\sigma_1=1$, $\operatorname{sgn}\sigma_2=-1$. Vậy

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

$$= \operatorname{sgn}\sigma_1\, a_{1\sigma_1(1)}a_{2\sigma_1(2)} + \operatorname{sgn}\sigma_2\, a_{1\sigma_2(1)}a_{2\sigma_2(2)} = \sum_{\sigma\in S_2} \operatorname{sgn}\sigma\, a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\,.$$

Ta mở rộng định nghĩa này cho ma trận vuông cấp n bất kỳ như sau.

<u>Định nghĩa 4.2</u>: Định thức của ma trận vuông $A = \left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ được ký hiệu là

$\det A$ hay $|A|$ và định nghĩa bởi biểu thức:

$$\det A = \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}\sigma \cdot a_{1\sigma(1)}\ldots a_{n\sigma(n)} \qquad (4.5)$$

Như vậy định thức của ma trận vuông $A = \left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ là tổng tất cả các tích gồm n phần tử trên n hàng mà ở trên n cột khác nhau của ma trận A và nhân với +1 hoặc -1.

<u>Ví dụ 4.3</u>: a) Nhóm đối xứng S_2 có 6 phần tử là (xem ví dụ 1.23 chương 1)

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 3\end{bmatrix},\ \sigma_2 = \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 2\end{bmatrix},\ \sigma_3 = \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 3\end{bmatrix},$$

$$\sigma_4 = \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\end{bmatrix},\ \sigma_5 = \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 2\end{bmatrix},\ \sigma_6 = \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1\end{bmatrix}.$$

có dấu $\operatorname{sgn}\sigma_1 = \operatorname{sgn}\sigma_4 = \operatorname{sgn}\sigma_5 = 1$, $\operatorname{sgn}\sigma_2 = \operatorname{sgn}\sigma_3 = \operatorname{sgn}\sigma_6 = -1$. Vậy

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix} = \sum_{\sigma\in S_3} \operatorname{sgn}\sigma\, a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}a_{3\sigma(3)}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \qquad (4.6)$$
$$+ a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}\,.$$

b) Tính định thức $D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n}\\ & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n}\\ & & a_{33} & \cdots & a_{3n}\\ & \bigcirc & & \ddots & \vdots\\ & & & & a_{nn}\end{vmatrix}$

Xét phép thế $\sigma_0 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{bmatrix}$ có $\operatorname{sgn}\sigma_0 = (-1)^0 = 1$.

Với mọi $\sigma \in S_n$, nếu $\sigma \neq \sigma_0$ thì tồn tại k sao cho $\sigma(k) \neq k \Rightarrow$ tồn tại k' sao cho $\sigma(k') < k' \Rightarrow a_{k'\sigma(k')} = 0 \Rightarrow a_{1\sigma(1)} \dots a_{n\sigma(n)} = 0$. Vậy

$$D_n = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}\sigma \cdot a_{1\sigma(1)} \dots a_{n\sigma(n)} = \operatorname{sgn}\sigma_0 \cdot a_{11} \dots a_{nn} = a_{11} \dots a_{nn}. \quad (4.7)$$

Tương tự $$D'_n = \begin{vmatrix} a_{11} & & \bigcirc & & \\ a_{21} & a_{22} & & & \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \dots a_{nn}. \quad (4.8)$$

c) Tính định thức $$D''_n = \begin{vmatrix} & \bigcirc & & & a_{1n} \\ & & & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \vdots & \vdots \\ & a_{n-1,2} & \dots & \dots & a_{n-1n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Xét phép thế $\sigma_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ n & n-1 & \dots & 1 \end{bmatrix}$ thoả mãn $\sigma_1(k) + k = n + 1, \quad \forall k = 1, \dots, n$.

Ta dễ dàng tính được

$$k_1 = n - 1,\ k_2 = n - 2, \dots, k_{n-1} = 1 \ \Rightarrow k = 1 + \dots + (n-1) = n(n-1)/2$$

$\Rightarrow \operatorname{sgn}\sigma_1 = (-1)^{n(n-1)/2}$. Mặt khác với mọi $\sigma \in S_n$, nếu $\sigma \neq \sigma_1$ thì tồn tại k sao cho $\sigma(k) + k < n + 1 \Rightarrow a_{k\sigma(k)} = 0 \Rightarrow a_{1\sigma(1)} \dots a_{n\sigma(n)} = 0$.

Vậy $$D''_n = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}\sigma \cdot a_{1\sigma(1)} \dots a_{n\sigma(n)} = \operatorname{sgn}\sigma_1 \cdot a_{n1} \dots a_{k,n-k} \dots a_{1n}$$

$$= (-1)^{n(n-1)/2} a_{n1} \dots a_{k,n-k} \dots a_{1n} \quad (4.9)$$

Tương tự

$$D'''_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n-1} & \\ \vdots & \vdots & \iddots & & \\ \vdots & \iddots & & \bigcirc & \\ a_{n1} & & & & \end{vmatrix} = (-1)^{n(n-1)/2} a_{n1} \dots a_{k,n-k} \dots a_{1n} . \quad (4.10)$$

<u>Định nghĩa 4.3</u>: Định thức của ma trận $A = \left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ của hệ véc tơ $\left\{v_1,\dots,v_n\right\}$ ứng với cơ sở $\mathscr{B}$ trong không gian véc tơ V cũng được gọi là định thức của hệ véc tơ $\left\{v_1,\dots,v_n\right\}$ và ký hiệu $D_{\mathscr{B}}\left\{v_1,\dots,v_n\right\}$. Vậy

$$D_{\mathscr{B}}\left\{v_1,\dots,v_n\right\} = \det A . \quad (4.11)$$

4.3 CÁC TÍNH CHẤT CƠ BẢN CỦA ĐỊNH THỨC

<u>Tính chất 4.2</u>:

1) Nếu đổi chỗ hai hàng của ma trận thì định thức đổi dấu:

$$A = \left[a_{ij}\right]_{n\times n}, \ A' = \left[a'_{ij}\right]_{n\times n}, \ a'_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & \text{nếu } i \neq k, m \\ a_{kj} & \text{nếu } i = m \\ a_{mj} & \text{nếu } i = k \end{cases} \quad \text{thì } \det A' = -\det A .$$

Thật vậy: $$\det A' = \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}\sigma \cdot a'_{1\sigma(1)} \dots a'_{k\sigma(k)} \dots a'_{m\sigma(m)} \dots a'_{n\sigma(n)}$$

$$= \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}\sigma \cdot a_{1\sigma(1)} \dots a_{m\sigma(k)} \dots a_{k\sigma(m)} \dots a_{n\sigma(n)}$$

$$= \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}\sigma \cdot a_{1\sigma'(1)} \dots a_{k\sigma'(k)} \dots a_{m\sigma'(m)} \dots a_{n\sigma'(n)}$$

$$= -\sum_{\sigma'\in S_n} \operatorname{sgn}\sigma' \cdot a_{1\sigma'(1)} \dots a_{m\sigma'(k)} \dots a_{k\sigma'(m)} \dots a_{n\sigma'(n)} = -\det A$$

trong đó $\sigma' = \sigma \circ \left[k \quad m\right]$.

2) Định thức có tính chất tuyến tính đối với mỗi hàng:

Cho hai ma trận $A = \left[a_{ij}\right]_{n\times n}$, $B = \left[b_{ij}\right]_{n\times n}$ và ma trận $C = \left[c_{ij}\right]_{n\times n}$ có hàng thứ k là tổ hợp tuyến tính của hàng thứ k của A và B.

Nghĩa là $\begin{cases} c_{ij} = a_{ij} = b_{ij} & \text{nếu } i \neq k \\ c_{kj} = \alpha a_{kj} + \beta b_{kj}\,; & \text{với mọi } j = 1,\ldots,n. \end{cases}$

thì $\det C = \alpha \det A + \beta \det B$.

Thật vậy: $\det C = \sum\limits_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}\sigma \cdot c_{1\sigma(1)} \ldots c_{k\sigma(k)} \ldots c_{n\sigma(n)}$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}\sigma \cdot a_{1\sigma(1)} \ldots (\alpha a_{k\sigma(k)} + \beta b_{k\sigma(k)}) \ldots a_{n\sigma(n)}$$

$$= \alpha \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}\sigma \cdot a_{1\sigma(1)} \ldots a_{k\sigma(k)} \ldots a_{n\sigma(n)} + \beta \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}\sigma \cdot b_{1\sigma(1)} \ldots b_{k\sigma(k)} \ldots b_{n\sigma(n)}$$

$= \alpha \det A + \beta \det B$.

3) Từ 1) và 2) suy ra rằng trong một ma trận có hai hàng tỷ lệ thì định thức bằng 0.

4) Nếu ta cộng vào một hàng một tổ hợp tuyến tính các hàng khác thì định thức không thay đổi.

5) Định thức của ma trận chuyển vị bằng định thức của ma trận đó:

Giả sử $A = \left[a_{ij}\right]_{n\times n}$, $A^t = \left[a'_{ij}\right]_{n\times n}$, $a'_{ij} = a_{ji}, i, j = 1,\ldots,n$

thì $\det A^t = \det A$.

$$\det A^t = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}\sigma \cdot a'_{1\sigma(1)} \ldots a'_{k\sigma(k)} \ldots a'_{n\sigma(n)}$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}\sigma \cdot a_{\sigma(1)1} \ldots a_{\sigma(k)k} \ldots a_{\sigma(n)n}$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}\sigma \cdot a_{1\sigma^{-1}(1)} \ldots a_{k\sigma^{-1}(k)} \ldots a_{n\sigma^{-1}(n)}$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}\sigma^{-1} \cdot a_{1\sigma^{-1}(1)} \ldots a_{k\sigma^{-1}(k)} \ldots a_{n\sigma^{-1}(n)} = \det A$$

vì $\operatorname{sgn}\sigma = \operatorname{sgn}\sigma^{-1}$.

6) Từ 5) suy ra rằng các tính chất của định thức đúng với hàng thì cũng đúng với cột và ngược lại. Vì vậy ta chỉ cần chứng minh các định lý về định thức đúng với hàng. Chẳng hạn, từ 4) suy ra nếu ta cộng vào một cột một tổ hợp tuyến tính các cột khác thì định thức không thay đổi.

Định thức của mọi hệ véc tơ phụ thuộc tuyến tính đều bằng 0.

7) $$\overline{\det(A)}(\operatorname{mod} p)=\sum_{\sigma\in S_n}\operatorname{sgn}\sigma\,\overline{a}_{1\sigma(1)}\ldots\overline{a}_{n\sigma(n)}=\begin{vmatrix}\overline{a}_{11} & \ldots & \overline{a}_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \overline{a}_{n1} & \ldots & \overline{a}_{nn}\end{vmatrix}\qquad(4.12)$$

Ví dụ 4.4:

a) $$D_n=\begin{vmatrix}a & 1 & 1 & \ldots & 1\\ 1 & a & 1 & \ldots & 1\\ 1 & 1 & a & \ldots & 1\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & 1 & 1 & \ldots & a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a+n-1 & 1 & 1 & \ldots & 1\\ a+n-1 & a & 1 & \ldots & 1\\ a+n-1 & 1 & a & \ldots & 1\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a+n-1 & 1 & 1 & \ldots & a\end{vmatrix}$$ (cộng các cột vào cột 1)

$$=(a+n-1)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \ldots & 1\\ 1 & a & 1 & \ldots & 1\\ 1 & 1 & a & \ldots & 1\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & 1 & 1 & \ldots & a\end{vmatrix}=(a+n-1)\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & \ldots & 0\\ 1 & a-1 & 0 & \ldots & 0\\ 1 & 0 & a-1 & \ldots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & 0 & 0 & \ldots & a-1\end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow D_n=(a+n-1)(a-1)^{n-1}.$$

b) $A=\left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ với $a_{ij}=\pm 1$

$$\overline{\det(A)}(\operatorname{mod}2)=\begin{vmatrix}\overline{1} & \ldots & \overline{1}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \overline{1} & \ldots & \overline{1}\end{vmatrix}=\overline{0}(\operatorname{mod}2)\Rightarrow \det A$$ chẵn.

4.4 CÁC CÁCH TÍNH ĐỊNH THỨC

4.4.1 Khai triển theo hàng, theo cột

Nếu ta nhóm theo cột thứ j công thức (4.5) thì ta được:

$$\det A = a_{1j}\left(\sum_{\sigma\in S_n,\sigma(1)=j}\operatorname{sgn}\sigma\cdot a_{2\sigma(2)}a_{3\sigma(3)}...a_{n\sigma(n)}\right)+$$

$$+a_{2j}\left(\sum_{\sigma\in S_n,\sigma(2)=j}\operatorname{sgn}\sigma\cdot a_{1\sigma(1)}a_{3\sigma(3)}...a_{n\sigma(n)}\right)+...+$$

$$+a_{nj}\left(\sum_{\sigma\in S_n,\sigma(n)=j}\operatorname{sgn}\sigma\cdot a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}...a_{n-1\sigma(n-1)}\right).$$

Vì vậy định thức của ma trận A được viết lại dưới dạng

$$\det A = a_{1j}A_{1j} + ... + a_{nj}A_{nj} \quad (4.13)$$

gọi là công thức khai triển của A theo cột thứ j.

A_{ij} được gọi là phần bù đại số của a_{ij}.

<u>Định lý 4.3</u>: $$A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij} \quad (4.14)$$

Trong đó M_{ij} là định thức của ma trận cấp n-1 có được bằng cách xoá hàng i cột j của ma trận A.

Chứng minh: Trước hết ta chứng minh $A_{11} = M_{11}$. Ta có:

$$A_{11} = \sum_{\sigma\in S_n,\sigma(1)=1}\operatorname{sgn}\sigma\ a_{2\sigma(2)}...a_{n\sigma(n)} = \sum_{\sigma'\in S_{n-1}}\operatorname{sgn}\sigma'\ a_{2\sigma'(2)}...a_{n\sigma'(n)} = M_{11}$$

với $\sigma' = \sigma\big|_{\{2,...,n\}}$ là phép thế trong tập hợp $\{2,...,n\}$.

Trường hợp A_{ij} bất kỳ, ta thực hiện i-1 lần đổi chỗ các hàng và j-1 lần đổi chỗ các cột để đưa về hàng 1 cột 1.

Do đó $A_{ij} = (-1)^{(i-1)+(j-1)}M_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$.

Công thức khai triển theo hàng i được suy từ tính chất 3.7: 6)

$$\det A = a_{i1}A_{i1} + \ldots + a_{in}A_{in} \tag{4.15}$$

Ví dụ 4.5: $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix} \overset{\substack{-c_1+c_3 \to c_3 \\ -2c_1+c_4 \to c_4}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -4 & -6 \\ 1 & 2 & -1 & -7 \end{vmatrix}$

$$= (-1)^{2+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -1 & -4 & -6 \\ 2 & -1 & -7 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & -5 \\ 2 & -3 & -9 \end{vmatrix}$$

$$= (-2)(-3)(-1)\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} = -6(9-5) = -24.$$

4.4.2 Định lý khai triển Laplace (theo k hàng k cột)

Từ ma trận $A = \left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ ta để ý k hàng: $i_1,\ldots,i_k$ và k cột: $j_1,\ldots,j_k$.

Giao của k hàng k cột này là một ma trận cấp k. Định thức của ma trận này được ký hiệu là $M_{i_1,\ldots,i_k}^{j_1,\ldots,j_k}$. Nếu từ ma trận A ta xoá đi k hàng $i_1,\ldots,i_k$ và k cột $j_1,\ldots,j_k$ thì ta có ma trận con cấp n-k. Định thức của ma trận này được ký hiệu là $\overline{M}_{i_1,\ldots,i_k}^{j_1,\ldots,j_k}$ và

$$A_{i_1,\ldots,i_k}^{j_1,\ldots,j_k} = (-1)^{i_1+\ldots+i_k+j_1+\ldots+j_k}\,\overline{M}_{i_1,\ldots,i_k}^{j_1,\ldots,j_k} \tag{4.16}$$

được gọi là phần bù đại số của $M_{i_1,\ldots,i_k}^{j_1,\ldots,j_k}$.

Ví dụ 4.6: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$

Có $M_{13}^{23} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, $A_{13}^{23} = (-1)^{1+3+2+3}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{24} \\ a_{41} & a_{44} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{24} \\ a_{41} & a_{44} \end{vmatrix}$.

Định lý 4.4 (Laplace):

1) Khai triển k hàng $i_1,\ldots,i_k$:

$$\det A = \sum_{1\le j_1<\ldots<j_k\le n} M_{i_1,\ldots,i_k}^{j_1,\ldots,j_k} A_{i_1,\ldots,i_k}^{j_1,\ldots,j_k} \tag{4.17}$$

Định thức của A bằng tổng tất cả các định thức con cấp k nằm trên k hàng $i_1,\ldots,i_k$ nhân với phần bù đại số tương ứng của nó.

2) Khai triển k cột $j_1,\ldots,j_k$:

$$\det A = \sum_{1\le i_1<\ldots<i_k\le n} M_{i_1,\ldots,i_k}^{j_1,\ldots,j_k} A_{i_1,\ldots,i_k}^{j_1,\ldots,j_k} \tag{4.18}$$

Định thức của A bằng tổng tất cả các định thức con cấp k nằm trên k cột $j_1,\ldots,j_k$ nhân với phần bù đại số tương ứng của nó.

Đặc biệt khi k =1 ta có công thức khai triển theo hàng và theo cột (3.4).

Chứng minh: Trường hợp $i_1=1,\ldots,i_k=k$:

$$M_{1,\ldots,k}^{1,\ldots,k} = \sum_{\sigma\in S_k} \operatorname{sgn}\sigma\cdot a_{1\sigma(1)}\ldots a_{k\sigma(k)}$$

$$\overline{M}_{1,\ldots,k}^{1,\ldots,k} = \sum_{\sigma'\in S_{n-k}} \operatorname{sgn}\sigma'\cdot a_{k+1\sigma'(k+1)}\ldots a_{n\sigma'(n)} = A_{1,\ldots,k}^{1,\ldots,k}$$

Ứng với mỗi phép thế σ của tập $\{1,\ldots,k\}$ và σ' của $\{k+1,\ldots,n\}$ thì phép thế μ có hoán vị tương ứng $[\sigma(1),\ldots,\sigma(k),\sigma(k+1),\ldots,\sigma(n)]$ có số các nghịch thế bằng số các nghịch thế của σ cộng với số các nghịch thế của σ'. Do đó $\operatorname{sgn}\mu=\operatorname{sgn}\sigma\cdot\operatorname{sgn}\sigma'$. Vì vậy mỗi tích

$$\operatorname{sgn}\sigma\cdot a_{1\sigma(1)}\ldots a_{k\sigma(k)}\cdot\operatorname{sgn}\sigma'\cdot a_{k+1\sigma'(k+1)}\ldots a_{n\sigma'(n)}$$

là một hạng tử trong tổng của $\det A$. Nói cách khác $M_{1,\ldots,k}^{1,\ldots,k}\overline{M}_{1,\ldots,k}^{1,\ldots,k}$ chỉ bao gồm các hạng tử của $\det A$; nó là một bộ phận trong biểu thức tổng của $\det A$. Trường hợp tổng quát $M_{i_1,\ldots,i_k}^{j_1,\ldots,j_k}$, ta biến đổi hàng và cột của $\det A$ để đưa $M_{i_1,\ldots,i_k}^{j_1,\ldots,j_k}$ về định thức con bậc k góc trên bên trái. Ta thực hiện i_1-1 lần đổi chỗ hàng thứ i_1 để đưa về hàng thứ 1, ..., i_k-1 lần đổi chỗ hàng thứ i_k để đưa về hàng thứ k. Tương tự đổi chỗ $j_1-1,\dots,j_k-1$ lần để đưa các cột $j_1,\dots,j_k$ về các cột 1,..., k. Vì vậy định thức đổi dấu

$$(-1)^{(i_1-1)+\dots+(i_k-1)+(j_1-1)+\dots+(j_k-1)}=(-1)^{i_1+\dots+i_k+j_1+\dots+j_k}.$$

Khi đổi vị trí như vậy định thức bù của $M_{i_1,\dots,i_k}^{j_1,\dots,j_k}$ vẫn là $\overline{M}_{i_1,\dots,i_k}^{j_1,\dots,j_k}$.

Do đó $A_{i_1,\dots,i_k}^{j_1,\dots,j_k}=(-1)^{i_1+\dots+i_k+j_1+\dots+j_k}\overline{M}_{i_1,\dots,i_k}^{j_1,\dots,j_k}$, như vậy các hạng tử của $M_{i_1,\dots,i_k}^{j_1,\dots,j_k}\cdot A_{i_1,\dots,i_k}^{j_1,\dots,j_k}$ cũng chỉ là các hạng tử của $\det A$.

Mặt khác mỗi $M_{i_1,\dots,i_k}^{j_1,\dots,j_k}\cdot A_{i_1,\dots,i_k}^{j_1,\dots,j_k}$ có $k!(n-k)!$ hạng tử. Số các định thức con $M_{i_1,\dots,i_k}^{j_1,\dots,j_k}$ trên k hàng $i_1,\dots,i_k$ bằng số các tổ hợp n chập k và bằng C_n^k. Các hạng tử của $M_{i_1,\dots,i_k}^{j_1,\dots,j_k}\cdot A_{i_1,\dots,i_k}^{j_1,\dots,j_k}$ và $M_{i_1,\dots,i_k}^{j'_1,\dots,j'_k}\cdot A_{i_1,\dots,i_k}^{j'_1,\dots,j'_k}$ khác nhau từng đôi một nếu $\{j_1,\dots,j_k\}\neq\{j'_1,\dots,j'_k\}$.

Do đó tổng $\sum\limits_{1\le j_1<\dots<j_k\le n} M_{i_1,\dots,i_k}^{j_1,\dots,j_k}A_{i_1,\dots,i_k}^{j_1,\dots,j_k}$ có $C_n^k k!(n-k)!=n!$ hạng tử phân biệt của $\det A$ nhưng $\det A$ cũng chỉ có $n!$ hạng tử. Vậy mỗi hạng tử của $\det A$ đều là hạng tử nào đó của một trong những $M_{i_1,\dots,i_k}^{j_1,\dots,j_k}\cdot A_{i_1,\dots,i_k}^{j_1,\dots,j_k}$ với $1\le j_1<\dots<j_k\le n$. Vậy ta có đẳng thức (3.6).

Công thức khai triển theo cột (3.7) được chứng minh trực tiếp hoàn toàn tương tự cách trên hoặc có thể suy ra từ kết quả trên và áp dụng tính chất $\det A=\det A^t$.

<u>Ví dụ 4.7</u>: $D_n=\left|\begin{array}{ccc:ccc} a_{11} & \cdots & a_{1k} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & 0 & \cdots & 0 \\ \hdashline a_{k+11} & \cdots & a_{k+1k} & a_{k+1k+1} & \cdots & a_{k+1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk} & a_{kk+1} & \cdots & a_{nn} \end{array}\right|$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{k+1k+1} & \cdots & a_{k+1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{nk+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Vì $M_{1,\ldots,k}^{j_1,\ldots,j_k} = 0$ nếu $\{j_1,\ldots,j_k\} \neq \{1,\ldots,k\}$.

<u>Ví dụ 4.8</u>: Với mọi ma trận cùng cấp A, B luôn có $\det AB = \det A \det B$.

Thật vậy, giả sử $A = \left[a_{ij}\right]_{n\times n}$, $B = \left[b_{ij}\right]_{n\times n}$,

$$C = AB = \left[c_{ij}\right]_{n\times n} \quad , \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

Xét định thức cấp 2n:

$$D_{2n} = \begin{vmatrix} & & & 0 & & 0 \\ & a_{ij} & & & \bigcirc & \\ & & & 0 & & 0 \\ -1 & & & & & \\ & \ddots\, -1 & \bigcirc & & b_{ij} & \\ \bigcirc & & \ddots\, -1 & & & \end{vmatrix}$$

Khai triển Laplace theo n hàng đầu ta có $D_{2n} = \det A \det B$. Mặt khác, nhân b_{11} với cột 1, b_{21} với cột 2,..., b_{n1} với cột n của D_{2n} xong cộng tất cả vào cột n+1 thì định thức D_{2n} trở thành:

$$D_{2n} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & c_{11} & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & c_{n1} & 0 & 0 \\ -1 & & \bigcirc & 0 & b_{12} & b_{1n} \\ & -1 & & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bigcirc & & -1 & 0 & b_{n2} & b_{nn} \end{vmatrix}$$

Tiếp tục biến đổi tương tự như trên cuối cùng được:

$$D_{2n} = \left|\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \cdots & a_{1n} & c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & c_{n1} & \cdots & c_{nn} \\ \hline -1 & & \bigcirc & 0 & & 0 \\ & -1 & & & \bigcirc & \\ \bigcirc & & -1 & 0 & & 0 \end{array}\right|$$

Khai triển Laplace theo n hàng cuối ta được:

$$D_{2n} = (-1)^{1+2+\ldots+n+n+1+\ldots+2n} \left|\begin{array}{ccc} -1 & & \bigcirc \\ & -1 & \\ \bigcirc & & -1 \end{array}\right| \left|\begin{array}{ccc} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{array}\right|$$

$$= (-1)^{\frac{2n(2n+1)}{2}+n} \cdot \det C = \det C.$$

4.5 ỨNG DỤNG ĐỊNH THỨC ĐỂ TÌM MA TRẬN NGHỊCH ĐẢO

4.5.1 Định nghĩa ma trận nghịch đảo

Ta đã biết vành $(\mathcal{M}_n,+,.)$ các ma trận vuông cấp n là không nguyên, vì vậy với ma trận vuông cho trước chưa chắc đã có ma trận nghịch đảo đối với phép nhân ma trận.

Định nghĩa 4.4: Ma trận vuông A được gọi là khả nghịch nếu tồn tại ma trận vuông cùng cấp B sao cho $AB = BA = I$.

Phép nhân ma trận có tính kết hợp nên ma trận B ở định nghĩa trên nếu tồn tại thì duy nhất, ta gọi ma trận này là ma trận nghịch đảo của A, ký hiệu A^{-1}.

4.5.2 Điều kiện cần và đủ để tồn tại ma trận nghịch đảo

Định lý 4.5: (điều kiện cần) Nếu A khả nghịch thì $\det A \neq 0$ (lúc đó ta nói ma trận A không suy biến).

Chứng minh: $AA^{-1} = I \Rightarrow \det A \det A^{-1} = \det AA^{-1} = \det I = 1$.

Do đó $\det A = \dfrac{1}{\det A^{-1}} \neq 0$.

Định nghĩa 4.5: Ma trận $B = \left[A_{ij}\right]_{n\times n}$, trong đó A_{ij} là phần bù đại số của phần tử a_{ij} của ma trận $A = \left[a_{ij}\right]_{n\times n}$, được gọi là ma trận phụ hợp của A.

Định lý 4.6: (điều kiện đủ) Nếu $\det A \neq 0$ thì A khả nghịch và

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} B^t , \qquad (4.19)$$

với B là ma trận phụ hợp của A.

Chứng minh: Khai triển định thức của ma trận A theo hàng thứ k ta được:

$$a_{k1}A_{k1} + \ldots + a_{kn}A_{kn} = \det A$$

Vậy $a_{i1}A_{k1} + \ldots + a_{in}A_{kn}$ là khai triển theo hàng thứ k của định thức của ma trận có được bằng cách thay hàng thứ k của A bởi hàng thứ i của A, do đó bằng 0.

Tóm lại $a_{i1}A_{k1} + \ldots + a_{in}A_{kn} = \begin{cases} \det A & \text{nếu } i = k \\ 0 & \text{nếu } i \neq k \end{cases} \Rightarrow AB^t = (\det A)I$.

Tương tự, khai triển theo cột ta có:

$$a_{1i}A_{1k} + \ldots + a_{ni}A_{nk} = \begin{cases} \det A & \text{nếu } i = k \\ 0 & \text{nếu } i \neq k \end{cases} \Rightarrow B^t A = (\det A)I . \qquad (4.20)$$

Hệ quả 4.7: Nếu $BA = I$ hoặc $AB = I$ thì tồn tại A^{-1} và $A^{-1} = B$.

Chứng minh: $BA = I \Rightarrow \det A \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$ và

$$B = B(AA^{-1}) = (BA)A^{-1} = A^{-1}.$$

Ví dụ 4.9: Ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$ có $\det A = -1$.

$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} = 40$, $\qquad A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = -13$,

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}2 & 5\\ 1 & 0\end{vmatrix}=-5, \qquad A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}2 & 3\\ 0 & 8\end{vmatrix}=-16,$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1 & 3\\ 1 & 8\end{vmatrix}=5, \qquad A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 0\end{vmatrix}=2,$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}2 & 3\\ 5 & 3\end{vmatrix}=-9, \qquad A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & 3\end{vmatrix}=3,$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 5\end{vmatrix}=1,$$

Vậy

$$A^{-1}=\frac{1}{-1}\begin{bmatrix}40 & -13 & -5\\ -16 & 5 & 2\\ -9 & 3 & 1\end{bmatrix}^t=-\begin{bmatrix}40 & -16 & -9\\ -13 & 5 & 3\\ -5 & 2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-40 & 16 & 9\\ 13 & -5 & -3\\ 5 & -2 & -1\end{bmatrix}.$$

4.5.3 Tìm ma trận nghịch đảo theo phương pháp Gauss-Jordan

Khi ta thực hiện liên tiếp các phép biến đổi sơ cấp lên các hàng của ma trận A để đưa A về ma trận đơn vị, theo tính chất 3.5 chương 3 thì điều này cũng có nghĩa là ta nhân bên trái của A các ma trận sao cho $E_1 ... E_k A = I$, trong đó $E_1,..., E_k$ là các ma trận dạng $R(k,\lambda)$, $P(i, j)$, $Q(i, j,\lambda)$ (xem 3.10, 3.11, 3.12). Mặt khác theo Hệ quả 4.7 thì $A^{-1} = E_1 ... E_k$.

Cũng với lập luận như trên ta có: $E_1 ... E_k = E_1 ... E_k I$ là ma trận có được bằng cách thực hiện bởi cùng các phép biến đổi sơ cấp tương ứng như đã thực hiện đối với ma trận A lên các hàng của ma trận đơn vị I. Vì vậy để tìm ma trận A^{-1} ta thực hiện các bước sau:

1) Viết ma trận đơn vị I bên phải ma trận A: $A|I$

2) Thực hiện các phép biến đổi sơ cấp đồng thời lên các hàng của $A|I$ để đưa ma trận A ở vế trái về ma trận đơn vị.

3) Khi vế trái trở thành ma trận đơn vị thì vế phải là ma trận A^{-1}.

$$A|I \to .... \to I|A^{-1}. \qquad (4.21)$$

Ví dụ 4.10: Tìm A^{-1} với $A=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&5&3\\1&0&8\end{bmatrix}$

$$\left.\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\2&5&3&0&1&0\\1&0&8&0&0&1\end{array}\right.\xrightarrow{\begin{subarray}{c}h_1\to h_1\\-2h_1+h_2\to h_2\\-h_1+h_3\to h_3\end{subarray}}\left.\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\0&1&-3&-2&1&0\\0&-2&5&-1&0&1\end{array}\right.$$

$$\xrightarrow{\begin{subarray}{c}h_1\to h_1\\h_2\to h_2\\2h_2+h_3\to h_3\end{subarray}}\left.\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\0&1&-3&-2&1&0\\0&0&-1&-5&2&1\end{array}\right.\xrightarrow{\begin{subarray}{c}h_1\to h_1\\-h_2\to h_2\\-h_3\to h_3\end{subarray}}\left.\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\0&1&-3&-2&1&0\\0&0&1&5&-2&-1\end{array}\right.$$

$$\xrightarrow{\begin{subarray}{c}-3h_3+h_1\to h_1\\3h_3+h_2\to h_2\\h_3\to h_3\end{subarray}}\left.\begin{array}{ccc|ccc}1&2&0&-14&6&3\\0&1&0&13&-5&-3\\0&0&1&5&-2&-1\end{array}\right.\xrightarrow{\begin{subarray}{c}-3h_2+h_1\to h_1\\h_2\to h_2\\h_3\to h_3\end{subarray}}\left.\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-40&16&9\\0&1&0&13&-5&-3\\0&0&1&5&-2&-1\end{array}\right.$$

Vậy $A^{-1}=\begin{bmatrix}-40&16&9\\13&-5&-3\\5&-2&-1\end{bmatrix}$.

Chú ý 4.8: Tìm A^{-1} theo phương pháp Gauss-Jordan sẽ dễ dàng khi các phần tử của A^{-1} là các số nguyên (thường gặp khi $\det A=\pm 1$).

4.6 TÌM HẠNG CỦA MA TRẬN BẰNG ĐỊNH THỨC

Từ tính chất 4.2 ta biết rằng định thức của một hệ phụ thuộc tuyến tính bằng 0. Do đó nếu định thức $D_{\mathcal{B}}\{v_1,\dots,v_n\}\neq 0$ thì hệ $\{v_1,\dots,v_n\}$ độc lập tuyến tính.

Ngược lại, giả sử hệ $\{v_1,\dots,v_n\}$ độc lập tuyến tính, ta sẽ chứng minh $D_{\mathcal{B}}\{v_1,\dots,v_n\}\neq 0$. Thật vậy, giả sử $v_j=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}e_i$, $A=[a_{ij}]$,

$\det A=D_{\mathcal{B}}\{v_1,\dots,v_n\}$, vì hệ $\{v_1,\dots,v_n\}$ độc lập tuyến tính nên nó là một cơ sở của V.

Vậy ta có $e_j = \sum_{i=1}^{n} b_{ij} v_i$, $B = \left[b_{ij}\right]$ $\Rightarrow$ $AB = I \Rightarrow \det A \neq 0$. (4.22)

Định lý 4.9: Hệ $\{v_1,...,v_n\}$ độc lập khi và chỉ khi $D_{\mathscr{B}}\{v_1,...,v_n\} \neq 0$.

Định lý 4.10: Giả sử $A = \left[a_{ij}\right]$ là một ma trận cỡ $m \times n$. Nếu có định thức con cấp p khác 0 và mọi định thức con cấp $p+1$ bao quanh nó đều bằng 0 thì $r(A) = p$.

Chứng minh: Không mất tính tổng quát ta có thể giả thiết định thức con cấp p góc trái $M_{1,...,p}^{1,...,p} \neq 0$. Khi đó p véc tơ cột đầu độc lập tuyến tính, vì nếu có một véc tơ là tổ hợp tuyến tính của $p-1$ véc tơ còn lại thì mâu thuẫn với giả thiết $M_{1,...,p}^{1,...,p} \neq 0$, do đó $r(A) \geq p$. Ta cần chứng minh bất đẳng thức ngược lại.

Với mọi $k = 1,...,m;\ s = p+1,...,n$; Xét ma trận cấp $p+1$:

$$B = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1p} & a_{1s} \\ a_{21} & \cdots & \cdots & a_{2p} & a_{2s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{p1} & \cdots & \cdots & a_{pp} & a_{ps} \\ a_{k1} & \cdots & \cdots & a_{kp} & a_{ks} \end{bmatrix}$$

Khi $k \leq p$: Ma trận B có hai hàng bằng nhau, do đó $\det B = 0$.

Khi $k > p$: $\det B = 0$, vì $\det B$ là định thức cấp $p+1$ bao $M_{1,...,p}^{1,...,p}$.

Mặt khác khai triển theo hàng cuối ta được dạng sau:

$$a_{k1}\mu_1 + ... + a_{kp}\mu_p + a_{ks} M_{1,...,p}^{1,...,p} = 0$$

$\Rightarrow$ $a_{ks} = \lambda_1 a_{k1} + ... + \lambda_p a_{kp}$, với mọi k = 1, 2, ..., m

Vì vậy véc tơ cột v_s là tổ hợp tuyến tính của p véc tơ cột đầu. Vậy $r(A) \leq p$.

Hệ quả 4.11: A là một ma trận cỡ $m \times n$ thì $r(A) = r(A^t) \leq \min(m,n)$.

Chú ý 4.12: 1) Từ công thức (4.20) ta đã chứng minh được nếu A là ma trận chuyển từ từ cơ sở $\mathscr{B}$ sang cơ sở $\mathscr{B}'$ thì A^{-1} là ma trận chuyển từ từ cơ sở $\mathscr{B}'$ sang cơ sở $\mathscr{B}$.

2) Để tìm hạng ma trận A ta tìm định thức con cấp 2 khác 0. Bao định thức này bởi các định thức con cấp 3. Nếu tất cả các định thức cấp 3 bao quanh đều bằng 0 thì $r(A) = 2$. Nếu có định thức con cấp 3 khác 0 thì ta tiếp tục bao định thức cấp 3 này bởi các định thức cấp 4...

Ví dụ 4.11: a) Ma trận $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 & 3 \\ -2 & 9 & -4 & 7 \\ -4 & 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

có $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 9 \end{vmatrix} = 20$, $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -2 & 9 & -4 \\ -4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -2 & 9 & 7 \\ -4 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0$.

Vậy $r(A) = 2$

b) Ma trận $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 \\ -4 & -2 & 1 & -7 \\ 3 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & -4 & 3 & -4 \end{bmatrix}$ có $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} = 0$ nhưng $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1$.

Bao định thức này bởi định thức cấp 3 $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1$.

Định thức cấp 4 duy nhất $|B| = 0$. Vậy $r(B) = 3$.

Ví dụ 4.12: Tìm hạng của ma trận $A = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{bmatrix}$

Ta có $|A| = (a+3)(a-1)^3$.

Vậy: • Khi $a \neq -3, a \neq 1$ thì $r(A) = 4$;

• Khi $a = 1$ thì $r(A) = 1$;

• Khi $a = -3$, $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow r(A) = 3$.

Trong thực hành ta có thể kết hợp phương pháp này với phương pháp biến đổi sơ cấp lên các hàng các cột ma trận thì quá trình tìm hạng ma trận sẽ nhanh hơn.

CHƯƠNG 5: HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

5.1 KHÁI NIỆM VỀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

5.1.1 Dạng tổng quát của hệ phương trình tuyến tính

Hệ m phương trình tuyến tính n ẩn có dạng tổng quát:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (5.1)$$

Hay $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i$, i = 1, ..., m

Trong đó $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là n ẩn,

a_{ij} là hệ số của ẩn thứ j trong phương trình i,

b_i là vế phải của phương trình thứ i; i = 1,..., n; j = 1,..., m.

Khi các vế phải $b_i = 0$ thì hệ phương trình được gọi là thuần nhất.

Nghiệm của hệ phương trình là bộ gồm n số $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sao cho khi thay vào (5.1) ta có các đẳng thức đúng. Giải một hệ phương trình là đi tìm tập hợp nghiệm của hệ. Hai hệ phương trình cùng ẩn là tương đương nếu tập hợp nghiệm của chúng bằng nhau. Vì vậy để giải một hệ phương trình ta có thể giải hệ phương trình tương đương của nó.

5.1.2 Dạng ma trận của hệ phương trình tuyến tính

Với hệ (5.1) ta xét các ma trận:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

A, B, X lần lượt được gọi là ma trận hệ số, ma trận vế sau và ma trận ẩn. Khi đó hệ phương trình (5.1) được viết lại dưới dạng ma trận:

$$AX = B \tag{5.3}$$

5.1.3 Dạng véc tơ của hệ phương trình tuyến tính

Nếu ta ký hiệu véc tơ cột thứ i của ma trận A là $v_i = (a_{1i},..., a_{mi}) \in \mathbb{R}^m$ và véc tơ vế sau $b = (b_1,..., b_m) \in \mathbb{R}^m$, thì hệ (5.1) được viết dưới dạng véc tơ:

$$x_1v_1 + x_2v_2 + ... + x_nv_n = b \tag{5.4}$$

Với cách viết này ta thấy rằng hệ phương trình (5.1) có nghiệm khi và chỉ khi $b \in Span\{v_1,..., v_n\}$.

5.2 ĐỊNH LÝ TỒN TẠI NGHIỆM

Định lý 3.18: (Kronecker-Kapelli) Hệ phương trình (5.1) có nghiệm khi và chỉ khi $r(A) = r(\widetilde{A})$ trong đó $\widetilde{A}$ là ma trận có được bằng cách bổ sung thêm vào ma trận hệ số A một cột cuối là vế phải của hệ phương trình.

$$\widetilde{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right] \tag{5.5}$$

Chứng minh: Hệ (5.1) có nghiệm khi và chỉ khi tồn tại $x_1, x_2,..., x_n \in \mathbb{R}^n$ sao cho $x_1v_1 + x_2v_2 + ... + x_nv_n = b$. Nghĩa là b được biểu diễn thành tổ hợp tuyến tính của $\{v_1,..., v_n\}$. Vậy $r(v_1,..., v_n) = r(v_1,..., v_n, b)$. Do đó $r(A) = r(\widetilde{A})$.

5.3 PHƯƠNG PHÁP CRAMER

Định nghĩa 5.1: Hệ n phương trình tuyến tính n ẩn có ma trận hệ số A không suy biến được gọi là hệ Cramer.

Định lý 5.2: Mọi hệ Cramer đều tồn tại duy nhất nghiệm. Cụ thể

hệ $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i$, i = 1, ..., n có nghiệm $x_i = D_i / D$, i = 1,..., n;

Trong đó $D = \det A = D_{\mathscr{B}}\{v_1,..., v_{i-1}, v_i, v_{i+1},..., v_n\}$

$$D_i = D_{\mathscr{B}}\{v_1,..., v_{i-1}, b, v_{i+1},..., v_n\} \tag{5.6}$$

D_i là định thức của hệ các véc tơ cột là các hệ số của hệ phương trình nhưng véc tơ cột thứ i được thay bởi véc tơ cột vế sau.

Chứng minh: $\det A \neq 0 \Rightarrow$ hệ $\{v_1,...,v_n\}$ là một cơ sở của $\mathbb{R}^n$. Do đó b được biểu diễn duy nhất thành tổ hợp tuyến tính của $\{v_1,...,v_n\}$. Nghĩa là tồn tại duy nhất $x_1, x_2,..., x_n$ sao cho $x_1v_1 + x_2v_2 + ... + x_nv_n = b$.

Gọi $\mathscr{B} = \{e_1,...,e_n\}$ là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^n$. Khi đó:

$$D_i = D_{\mathscr{B}}\{v_1,...,v_{i-1}, b, v_{i+1},..., v_n\} = D_{\mathscr{B}}\left\{v_1,...,v_{i-1}, \sum_{k=1}^{n} x_k v_k, v_{i+1},..., v_n\right\}$$

$$= x_i D_{\mathscr{B}}\{v_1,...,v_{i-1}, v_i, v_{i+1},..., v_n\} = x_i D \Rightarrow x_i = D_i / D, \text{ i = 1,..., n;}$$

Giải hệ phương trình tuyến tính trường hợp tổng quát

Giả sử hệ phương trình có nghiệm, do đó $r(v_1,...,v_n) = r(v_1,...,v_n, b)$. Giả sử $r(v_1,...,v_n) = r(v_1,...,v_p)$; $p \leq n$ (trong trường hợp khác cách giải hoàn toàn tương tự). Với giả thiết này p véc tơ hàng phía trên của A tạo thành hệ độc lập tuyến tính tối đại của hệ các véc tơ hàng của A. Vì vậy hệ (5.1) tương đương với p phương trình đầu

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + ... + a_{pn}x_n = b_p \end{cases}$$

Giả sử $\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & \cdots & a_{pp} \end{vmatrix} \neq 0$ (trường hợp khác cách giải hoàn toàn tương tự)

Hệ phương trình trên được viết lại:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1p}x_p = b_1 - a_{1p+1}x_{p+1} - ... - a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2p}x_p = b_2 - a_{2p+1}x_{p+1} - ... - a_{2n}x_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + ... + a_{pp}x_p = b_p - a_{pp+1}x_{p+1} - ... - a_{pn}x_n \end{cases}$$

đây là hệ Cramer có vế sau phụ thuộc vào các ẩn $x_{p+1},...,x_n$. Vậy hệ có vô số nghiệm phụ thuộc $x_{p+1},...,x_n$.

Ví dụ 5.1: Giải và biện luận theo tham số λ hệ $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + \lambda x_4 = 1 \end{cases}$

Từ ví dụ 4.12 chương 4 ta có $\det A = (\lambda+3)(\lambda-1)^3$.

♦ Khi $\lambda \neq -3, \lambda \neq 1$: Hệ đã cho là hệ Cramer nên có nghiệm duy nhất. Ngoài ra vai trò của các ẩn trong hệ đều như nhau, do đó nghiệm của hệ:

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 \;\Rightarrow\; x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = \frac{1}{\lambda+3}$$

♦ Khi $\lambda = 1$: $r(A) = r(\widetilde{A}) = 1$, hệ phương trình đã cho tương đương với phương trình $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$

Hệ phương trình có vô số nghiệm $x_1 = 1 - x_2 - x_3 - x_4$ với x_2, x_3, x_4 tuỳ ý.

♦ Khi $\lambda = -3$: $\det A = 0 \;\Rightarrow\; r(A) < 4$ (theo Ví dụ 3.18 $r(A) = 3$) nhưng ma trận bổ sung $\widetilde{A}$ có định thức con cấp 4

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 64 \neq 0 \;\Rightarrow\; r(\widetilde{A}) = 4 \;\Rightarrow\; \text{hệ vô nghiệm.}$$

5.4 PHƯƠNG PHÁP MA TRẬN NGHỊCH ĐẢO

Định lý 5.3: Hệ Cramer $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i$, i = 1, ..., n, với các ma trận tương ứng

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix},\quad X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

có nghiệm $X = A^{-1}B$.

5.5 GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH BẰNG PHƯƠNG PHÁP KHỬ GAUSS

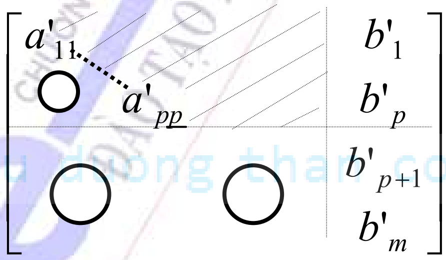
Ta có thể kiểm tra được rằng: khi thực hiện các biến đổi sơ cấp sau lên các phương trình của hệ thì sẽ được hệ mới tương đương:

- Đổi chỗ hai phương trình;
- Nhân, chia một số khác 0 vào cả 2 vế của một phương trình;
- Cộng vào một phương trình một tổ hợp tuyến tính các phương trình khác.

Giải hệ phương trình tuyến tính bằng phương pháp khử Gauss là thực hiện các phép biến đổi sơ cấp (có thể đổi chỉ số các ẩn nếu cần) để đưa hệ phương trình (5.1) $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i$; i = 1,..., m

về hệ tương đương $\sum_{j=1}^{n} a'_{ij}\, x'_j = b'_i$;

i = 1,..., m. Các ẩn $x'_1,\ldots,x'_n$ là các ẩn $x_1,\ldots,x_n$ nhưng có thể thay đổi thứ tự chỉ số và ma trận bổ sung của hệ mới có dạng



(5.7)

trong đó $a'_{11}\ldots a'_{pp} \neq 0$.

♦ Nếu một trong các $b'_{p+1},\ldots,b'_m$ khác 0 thì có phương trình mà vế trái bằng 0, vế phải khác 0 nên hệ vô nghiệm.

♦Nếu $b'_{p+1} = \ldots = b'_m = 0$ thì hệ đã cho tương đương với hệ p phương trình

$$\begin{cases} a'_{11}x'_1 + a'_{12}x'_2 + \quad \ldots \quad + a'_{1n}x'_n = b'_1 \\ \qquad a'_{22}x'_2 + \quad \ldots \quad + a'_{2n}x'_n = b'_2 \\ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad a'_{p1}x'_1 + \ldots + a'_{pn}x'_n = b'_p \end{cases} \tag{5.8}$$

Ta được các nghiệm $x'_1, \ldots, x'_p$ phụ thuộc $x'_{p+1}, \ldots, x'_n$.

Chú ý rằng khi ta biến đổi tương đương lên các phương trình thì thực chất là biến đổi các hệ số trong các phương trình. Vì vậy khi thực hành ta chỉ cần biến đổi ma trận bổ sung (5.5) của hệ để đưa về ma trận có dạng (5.7), từ đó suy ra nghiệm của hệ phương trình.

Ví dụ 5.2: Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 8x_3 = 8 \\ 4x_1 + 3x_2 - 9x_3 = 9 \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 7 \\ x_1 + 8x_2 - 7x_3 = 12 \end{cases}$

$$\widetilde{A} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -8 & 8 \\ 4 & 3 & -9 & 9 \\ 2 & 3 & -5 & 7 \\ 1 & 8 & -7 & 12 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 8 & -7 & 12 \\ 2 & 5 & -8 & 8 \\ 4 & 3 & -9 & 9 \\ 2 & 3 & -5 & 7 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 8 & -7 & 12 \\ 2 & 5 & -8 & 8 \\ 0 & -7 & 7 & -7 \\ 0 & -2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 8 & -7 & 12 \\ 0 & -11 & 6 & -16 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 8 & -7 & 12 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 8 & -7 & 12 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm duy nhất $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 3 \end{cases}$.

Ví dụ 5.3: Giải và biện luận theo tham số m hệ phương trình

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 8x_4 = 5 \\ x_1 - 6x_2 - 9x_3 - 20x_4 = -11 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 + mx_4 = 2 \end{cases}$$

$$\widetilde{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 6 & 8 & 5 \\ 1 & -6 & -9 & -20 & -11 \\ 4 & 1 & 4 & m & 2 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -6 & -9 & -20 & -11 \\ 3 & 2 & 5 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 6 & 8 & 5 \\ 4 & 1 & 4 & m & 2 \end{bmatrix}$$

$$\leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -6 & -9 & -20 & -11 \\ 0 & 20 & 32 & 64 & 36 \\ 0 & 15 & 24 & 48 & 27 \\ 0 & -5 & -8 & m-16 & -8 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -6 & -9 & -20 & -11 \\ 0 & 5 & 8 & 16 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m & 1 \end{bmatrix}$$

$$\leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -4 & -2 \\ 0 & 5 & 8 & 16 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m & 1 \end{bmatrix}.$$

Hệ đã cho tương đương với hệ: $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 - 4x_4 = -2 \\ 5x_2 + 8x_3 + 16x_4 = 9 \\ mx_4 = 1 \end{cases}$

♦ m = 0: hệ vô nghiệm;

♦ m ≠ 0: hệ có vô số nghiệm

$$x_4 = \frac{1}{m}, \quad x_2 = \frac{9m-16}{5m} - \frac{8}{5}x_3, \quad x_1 = \frac{4-m}{5m} - \frac{3}{5}x_3.$$

hay $\left(\frac{4-m}{5m} - \frac{3}{5}x_3, \frac{9m-16}{5m} - \frac{8}{5}x_3, x_3, \frac{1}{m} \right)$; x_3 tùy ý.

Ví dụ 5.4: Giải hệ phương trình $\begin{cases} x_1 \qquad - x_3 + \ x_4 - \ x_5 = -3 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 - 9x_4 \qquad = 2 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 - \ 8x_4 - 4x_5 = -2 \\ 6x_1 + x_2 + x_3 - 16x_4 - 5x_5 = -3 \\ x_1 + x_2 + \qquad x_4 + 2x_5 = -2 \end{cases}$

$$\widetilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & -3 \\ 2 & 2 & 1 & -9 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & -8 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -16 & -5 & -3 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & -2 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & 3 & -11 & 2 & 8 \\ 0 & -1 & 4 & -11 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & 7 & -22 & 1 & 15 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -11 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & 5 & -11 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 6 & -22 & -2 & 14 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -11 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 44 & 22 & -22 \\ 0 & 0 & 0 & 44 & 22 & -22 \end{bmatrix}$$

$$\leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Hệ đã cho tương đương với hệ:

$\begin{cases} x_1 \qquad\qquad = -2 \\ x_2 + x_3 \qquad + 3x_5 = 1 \\ x_3 - 3x_4 \qquad = 2 \\ 2x_4 + \ x_5 = -1 \end{cases}$ có nghiệm $\begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 3 + 3x_4 \\ x_3 = 2 + 3x_4 \\ x_5 = -1 - 2x_4; \ \ x_4 \text{ tuỳ ý} \end{cases}$

5.6 HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH THUẦN NHẤT

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \qquad (5.9)$$

Rõ ràng rằng với hệ phương trình tuyến tính thuần nhất (5.9) thì $r(\widetilde{A}) = r(A) \le n$ và luôn có nghiệm tầm thường $x_1 = \ldots = x_n = 0$.

Định lý 5.4:

a) Hệ (3.14) chỉ có nghiệm tầm thường khi và chỉ khi $r(A) = n$.

b) Nếu $r(A) = p < n$ thì nghiệm của hệ (5.9) là không gian con $n - p$ chiều của $\mathbb{R}^n$.

Chứng minh: Ta chứng minh b). Thực hiện các biến đổi tương đương lên ma trận bổ sung (5.8) của hệ để đưa về hệ tương đương với ma trận bổ sung có dạng

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ \bigcirc & & 1 & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 0 \\ & \bigcirc & & \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{array}\right] \qquad (5.10)$$

Suy ra nghiệm có dạng $\begin{cases} x'_1 = c_{11}x'_{p+1} + \ldots + c_{1n-p}x'_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x'_p = c_{p1}x'_{p+1} + \ldots + c_{pn-p}x'_n \end{cases}$

Trong đó $(x'_1,\ldots,x'_n)$ là một hoán vị của $(x_1,\ldots,x_n)$. Để đơn giản ta giả sử $x'_1 = x_1,\ldots,x'_n = x_n$ (trường hợp khác được chứng minh tương tự), khi đó tập hợp nghiệm:

$$\left\{(c_{11}x_{p+1} + \ldots + c_{1n-p}x_n,\ldots,c_{p1}x_{p+1} + \ldots + c_{pn-p}x_n, x_{p+1},\ldots,x_n) \,\middle|\, x_{p+1},\ldots,x_n \in \mathbb{R}\right\}$$

$$=\left\{(c_{11},...,c_{p1},1,0,...,0)x_{p+1}+...+(c_{1n-p},...,c_{pn-p},0,0,...,1)x_n \middle| x_{p+1},...,x_n \in \mathbb{R}\right\}$$

là không gian con $n-p$ chiều của $\mathbb{R}^n$.

Định lý 5.5: Giả sử $(\overline{x}_1,...,\overline{x}_n)$ là một nghiệm của phương trình không thuần nhất (5.1) thì $(x_1,...,x_n)$ là nghiệm của phương trình thuần nhất tương ứng (5.9) khi và chỉ khi $(x_1+\overline{x}_1,...,x_n+\overline{x}_n)$ là nghiệm của phương trình (5.1).

CHƯƠNG 6: ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH

6.1 KHÁI NIỆM ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH

6.1.1 Định nghĩa và ví dụ

Định nghĩa 6.1: Ánh xạ f từ không gian véc tơ V vào không gian W thoả mãn:

(i) với mọi $u, v \in V$; $f(u+v) = f(u) + f(v)$

(ii) với mọi $u, v \in V$, $\alpha \in \mathbb{R}$; $f(\alpha u) = \alpha f(u)$ (6.1)

được gọi là ánh xạ tuyến tính (đồng cấu tuyến tính hay gọi tắt là đồng cấu) từ V vào W . Khi $V = W$ thì f được gọi là tự đồng cấu.

Ví dụ 6.1: Xét các ánh xạ sau:

1) Ánh xạ không $\begin{aligned} 0: V &\to W \\ u &\mapsto 0(u) = 0 \end{aligned}$

2) Ánh xạ đồng nhất $\begin{aligned} Id_V : V &\to V \\ u &\mapsto Id_V(u) = u \end{aligned}$

3) Phép vị tự tỷ số $k \in \mathbb{R}$ $\begin{aligned} f: V &\to V \\ u &\mapsto f(u) = ku \end{aligned}$

4) Giả sử $W_1 \oplus W_2 \subset V$, xét phép chiếu lên thành phần thứ nhất :

$$\begin{aligned} \Pr_1 : W_1 \oplus W_2 &\to V \\ v_1 + v_2 &\mapsto v_1 \end{aligned}$$

5) Phép tịnh tiến theo véc tơ $v_0 \in V$, $\begin{aligned} T: V &\to V \\ u &\mapsto u + v_0 \end{aligned}$

Ánh xạ 1), 2), 3), 4) là ánh xạ tuyến tính; 2), 3) là tự đồng cấu; 5) không phải là ánh xạ tuyến tính nếu $v_0 \neq 0$.

6) Cho ma trận $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$,

ánh xạ $T:\ \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

$$(x_1,...,x_n)\mapsto T(x_1,...,x_n)=(y_1,...,y_m)$$

xác định bởi

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}=\left[a_{ij}\right]\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad (6.2)$$

là một ánh xạ tuyến tính.

Ngược lại ta có thể chứng minh được (xem mục 4) mọi ánh xạ tuyến tính từ $\mathbb{R}^n$ vào $\mathbb{R}^m$ đều có dạng như trên.

6.1.2 Các tính chất

Định lý 6.1: Nếu $f:V\rightarrow W$ là ánh xạ tuyến tính thì

(i) $f(\mathbf{0})=\mathbf{0}$

(ii) với mọi $v\in V$: $f(-v)=-f(v)$

(iii) $f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i v_i\right)=\sum_{i=1}^{n} x_i f(v_i)$, $\forall x_1,...,x_n\in\mathbb{R}$, $\forall v_1,...,v_n\in V$.

Chứng minh: (i) $f(\mathbf{0})=f(0\cdot\mathbf{0})=0f(\mathbf{0})=\mathbf{0}$

(ii) $f(v)+f(-v)=f(v+(-v))=f(\mathbf{0})=\mathbf{0}$

(iii) Dễ dàng chứng minh bằng cách quy nạp theo n .

Định lý 6.2: ánh xạ $f:V\rightarrow W$ là ánh xạ tuyến tính khi và chỉ khi với mọi $u,v\in V$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$: $f(\alpha u+\beta v)=\alpha f(u)+\beta f(v)$.

Chứng minh: Với mọi $u,v\in V$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$:

$(\Rightarrow)$: $f(\alpha u+\beta v)=f(\alpha u)+f(\beta v)=\alpha f(u)+\beta f(v)$

$$(\Leftarrow):\begin{cases} f(u+v)=f(1u)+f(1v)=1f(u)+1f(v)=f(u)+f(v) \\ f(\alpha u)=f(\alpha u+0v)=\alpha f(u)+0f(v)=\alpha f(u)\ . \end{cases}$$

Định lý 6.3: Mỗi ánh xạ tuyến tính từ V vào W hoàn toàn được xác định bởi ảnh của một cơ sở của V, nghĩa là với cơ sở $\mathscr{B} = \{e_1,...,e_n\}$ của V và hệ véc tơ $u_1,...,u_n \in W$ cho trước thì tồn tại duy nhất một ánh xạ tuyến tính $f: V \to W$ sao cho $f(e_i) = u_i$, $i = 1,...,n$.

Chứng minh:

*) Tồn tại: Với mọi $v \in V$, giả sử $(x_1,...,x_n)$ là toạ độ của v trong cơ sở $\mathscr{B}$, nghĩa là $v = x_1e_1 + ... + x_ne_n$. Đặt $f(v) = x_1u_1 + ... + x_nu_n \in W$.

Ta có thể kiểm chứng được rằng f là ánh xạ tuyến tính và $f(e_i) = u_i$, với mọi $i = 1,...,n$.

*) Duy nhất: Giả sử $g: V \to W$ là ánh xạ tuyến tính sao cho $g(e_i) = u_i$, với mọi $i = 1,...,n$ khi đó với bất kỳ $v \in V, v = x_1e_1 + ... + x_ne_n$,

$$g(v) = g(x_1e_1 + ... + x_ne_n) = x_1g(e_1) + ... + x_ng(e_n)$$

$$= x_1u_1 + ... + x_nu_n = f(v)$$

Vậy $g = f$.

6.1.3 Các phép toán trên các ánh xạ tuyến tính

6.1.3.1 Hom(V,W)

Cho hai không gian véc tơ V, W. Tập các ánh xạ tuyến tính từ V vào W được ký hiệu là $\mathrm{Hom}(V,W)$ hay $L(V,W)$.

Với $f, g \in \mathrm{Hom}(V,W)$, tương ứng $V \to W$

$$v \mapsto f(v) + g(v) \tag{6.3}$$

là một ánh xạ tuyến tính, được ký hiệu $f + g$ và gọi là tổng của f và g.

Tương tự, với $k \in \mathbb{R}$, tương ứng $V \to W$

$$v \mapsto kf(v) \tag{6.4}$$

là ánh xạ tuyến tính được ký hiệu là kf.

Vậy ta đã xác định hai phép toán "$+,\cdot$" trên tập các ánh xạ tuyến tính từ V vào W. Với hai phép toán này thì $(\mathrm{Hom}(V,W),+,\cdot)$ có cấu trúc không gian véc tơ và $\dim \mathrm{Hom}(V,W) = \dim V \cdot \dim W$.

6.1.3.2 EndV

Giả sử $f:V \to V'$ và $g:V' \to V''$ là hai ánh xạ tuyến tính thì ánh xạ hợp $g \circ f:V \to V''$ cũng là một ánh xạ tuyến tính. Vì vậy tập các tự đồng cấu của V, ký hiệu $\mathrm{End}V$, với hai phép toán cộng và hợp ánh xạ thì $(\mathrm{End}V,+,\circ)$ là một vành không giao hoán, có đơn vị , không nguyên. Ngoài ra với hai phép toán định nghiã ở (1.3.1) $(\mathrm{End}V,+,\cdot)$ còn là một không gian véc tơ.

6.2 NHÂN VÀ ẢNH CỦA ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH

Định lý 6.4: Giả sử $f:V \to W$ là ánh xạ tuyến tính, khi đó:

(i) Nếu V_1 là không gian con của V thì $f(V_1)$ là không gian con của W và $\dim f(V_1) \le \dim V_1$.

(ii) Nếu W_1 là không gian con của W thì $f^{-1}(W_1)$ là không gian con của V và $\dim W_1 \le \dim f^{-1}(W_1)$.

Chứng minh: (i) • Với mọi $u_1, u_2 \in f(V_1)$; $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tồn tại $v_1, v_2 \in V_1$ sao cho $u_1 = f(v_1)$, $u_2 = f(v_2)$. Do đó

$$\alpha u_1 + \beta u_2 = \alpha f(v_1) + \beta f(v_2) = f(\alpha v_1) + f(\beta v_2) \in f(V_1).$$

• Giả sử $\{e_1,...,e_n\}$ là một cơ sở của V_1 với mọi $u \in f(V_1)$, tồn tại $v \in V_1$: $v = x_1 v_1 + ... + x_n v_n$ và $f(v) = u \;\Rightarrow u = x_1 f(e_1) + ... + x_n f(e_n)$

$\Rightarrow$ $\{f(e_1),..., f(e_n)\}$ là một hệ sinh của $f(V_1)$.

Điều này suy ra $\dim f(V_1) \le \dim V_1$.

(ii) được chứng minh tương tự.

Định nghĩa 6.2: Với ánh xạ tuyến tính $f:V \to W$ ta ký hiệu và định nghĩa

$$\mathrm{Ker}f = f^{-1}\{0\}, \ \mathrm{Im}\, f = f(V) \tag{6.5}$$

là hạt nhân và là ảnh của f, ký hiệu

$$r(f) = \dim \mathrm{Im}\, f \tag{6.6}$$

là hạng của ánh xạ f.

Định lý 6.5: Với mọi ánh xạ tuyến tính $f:V \to W$

$$\dim V = r(f) + \dim \mathrm{Ker}f \tag{6.7}$$

Chứng minh: Giả sử $\{e_1,\ldots,e_m\}$ là một cơ sở của $\operatorname{Ker}f$ (khi $\operatorname{Ker}f=\{0\}$ thì m = 0). Ta bổ sung để $\{e_1,\ldots,e_m,e_{m+1},\ldots,e_{m+k}\}$ là một cơ sở của V. Ta chứng minh $\{f(e_{m+1}),\ldots,f(e_{m+k})\}$ là một hệ sinh, độc lập tuyến tính của $\operatorname{Im}f$ (do đó là một cơ sở).

- Với mọi $f(v)\in\operatorname{Im}f$;

$$v=x_1e_1+\ldots+x_me_m+x_{m+1}e_{m+1}+\ldots+x_{m+k}e_{m+k}\in V$$

$$f(v)=x_1f(e_1)+\ldots+x_mf(e_m)+x_{m+1}f(e_{m+1})+\ldots+x_{m+k}f(e_{m+k})$$
$$=x_{m+1}f(e_{m+1})+\ldots+x_{m+k}f(e_{m+k}).$$

- Giả sử $y_1f(e_{m+1})+\ldots+y_kf(e_{m+k})=0$ thì

$$y_1e_{m+1}+\ldots+y_ke_{m+k}\in\operatorname{Ker}f$$

$$\Rightarrow\ y_1e_{m+1}+\ldots+y_ke_{m+k}=z_1e_1+\ldots+z_me_m$$

$$\Rightarrow\ y_1e_{m+1}+\ldots+y_ke_{m+k}-z_1e_1-\ldots-z_me_m=0$$

$$\Rightarrow\ y_1=\ldots=y_k=-z_1=\ldots=-z_m=0.$$

6.3 TOÀN CẤU, ĐƠN CẤU, ĐẲNG CẤU

6.3.1 Toàn cấu

Định nghĩa 6.3: Ánh xạ tuyến tính mà toàn ánh được gọi là toàn cấu.

Định lý 6.6: Với ánh xạ tuyến tính $f:V\to W$, các mệnh đề sau tương đương:

(i) f toàn cấu.

(ii) Ảnh của hệ sinh của V là hệ sinh của W.

(iii) $r(f)=\dim W$.

Chứng minh: $(i)\Rightarrow(ii)$: Giả sử $\{v_1,\ldots,v_n\}$ là hệ sinh của V. Khi đó với mọi $u\in W$, tồn tại $v\in V$ sao cho $f(v)=u$ (vì $f(V)=W$).

$$v=x_1v_1+\ldots+x_nv_n\ \Rightarrow\ u=x_1f(v_1)+\ldots+x_nf(v_n).$$

Vậy $\{f(v_1),\ldots,f(v_n)\}$ là hệ sinh của W.

$(ii)\Rightarrow(i)$: Giả sử $\{e_1,\ldots,e_n\}$ là một cơ sở của V thì $\{f(e_1),\ldots,f(e_n)\}$ là hệ sinh của $W\ \Rightarrow\ W=\operatorname{span}\{f(e_1),\ldots,f(e_n)\}=f(V)$.

$$(i)\Leftrightarrow f(V)=W\Leftrightarrow\dim f(V)=\dim W\Leftrightarrow r(f)=\dim W.$$

6.3.2 Đơn cấu

Định nghĩa 6.4: Ánh xạ tuyến tính mà đơn ánh được gọi là đơn cấu.

Định lý 6.7: Với ánh xạ tuyến tính $f: V \to W$, các mệnh đề sau tương đương:

(i) f đơn cấu.

(ii) $\mathrm{Ker} f = \{0\}$.

(iii) Ảnh của hệ độc lập tuyến tính của V là hệ độc lập tuyến tính của W.

(iv) $r(f) = \dim V$.

Chứng minh: $(i) \Rightarrow (ii)$: Hiển nhiên.

$(ii) \Rightarrow (i)$: Giả sử $f(v_1) = f(v_2) \ \Rightarrow\ 0 = f(v_1) - f(v_2) = f(v_1 - v_2)$

$\Rightarrow\ v_1 - v_2 = 0 \ \Rightarrow\ v_1 = v_2$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$: Giả sử $\{v_1, ..., v_m\}$ độc lập:

$$x_1 f(v_1) + ... + x_m f(v_m) = 0 \ \Rightarrow\ x_1 v_1 + ... + x_m v_m \in \mathrm{Ker} f$$

$$\Rightarrow\ x_1 v_1 + ... + x_m v_m = 0 \ \Rightarrow\ x_1 = ... = x_m = 0$$

$(iii) \Rightarrow (iv)$: Giả sử $\{e_1, ..., e_n\}$ là một cơ sở của V thì $\{f(e_1), ..., f(e_n)\}$ là hệ sinh độc lập tuyến tính của $f(V)$. Do đó $r(f) = \dim V$.

$$(iv) \Rightarrow (ii): \left.\begin{array}{l} \dim V = r(f) + \dim \mathrm{Ker} f \\ \dim V = r(f) \end{array}\right\} \Rightarrow \ \dim \mathrm{Ker} f = 0 \Rightarrow \mathrm{Ker} f = \{0\}.$$

6.3.3 Đẳng cấu

Định nghĩa 6.5: Ánh xạ tuyến tính vừa đơn cấu vừa toàn cấu được gọi là đẳng cấu.

Vậy đẳng cấu là một ánh xạ tuyến tính và song ánh.

Hai không gian V, W được gọi là đẳng cấu nếu có ánh xạ tuyến tính đẳng cấu $f: V \to W$.

Phép đẳng cấu $f: V \to V$ được gọi là tự đẳng cấu của không gian V. Tập hợp các tự đẳng cấu của V được ký hiệu là $\mathrm{Gl}(V)$.

Định lý 6.8: V và W đẳng cấu khi và chỉ khi $\dim V = \dim W$.

Chứng minh: $(\Rightarrow)$: Nếu $f: V \to W$ đẳng cấu thì

$$\left.\begin{array}{l}\dim V = r(f) \quad \text{(đơn cấu)} \\ \dim W = r(f) \quad \text{(toàn cấu)}\end{array}\right\} \Rightarrow \dim V = \dim W .$$

$(\Leftarrow)$: Ngược lại nếu $\dim V = \dim W = n$.

Giả sử $\mathscr{B} = \{e_1,...,e_n\}$, $\mathscr{B}' = \{\omega_1,...,\omega_n\}$ là cơ sở lần lượt của V và W. Gọi $f: V \to W$ là ánh xạ tuyến tính thoả mãn $f(e_i) = \omega_i$; $i = 1,...,n$ (xem chứng minh định lý 4.3). Khi đó $r(f) = \dim V = \dim W \Rightarrow f$ đẳng cấu.

Định lý 6.9: $(\mathrm{Gl}(V),\circ)$ là một nhóm (không giao hoán).

Chứng minh: Ta dễ dàng chứng minh nếu f là tự đẳng cấu của V thì ánh xạ ngược f^{-1} cũng là tự đẳng cấu của V. Nếu f, g tự đẳng cấu thì $g \circ f$ cũng tự đẳng cấu.

Ta đã biết rằng ánh xạ từ một tập hữu hạn vào một tập hữu hạn có cùng số phần tử là đơn ánh khi và chỉ khi là toàn ánh (Chú ý 1.3-4, chương 1 trang 20). Điều này cũng còn đúng đối với ánh xạ tuyến tính giữa hai không gian véc tơ có cùng số chiều.

Định lý 6.10: Giả sử $\dim V = \dim W$ và $f: V \to W$ là ánh xạ tuyến tính từ V vào W thì: f đơn cấu khi và chỉ khi f toàn cấu, do đó đẳng cấu.

Chứng minh:

f toàn cấu $\Leftrightarrow r(f) = \dim W \Leftrightarrow r(f) = \dim V \Leftrightarrow f$ đơn cấu.

6.4 ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH VÀ MA TRẬN

6.4.1 Ma trận biểu diễn ánh xạ tuyến tính

Theo định lý 6.3, mọi ánh xạ tuyến tính $f: V \to W$ hoàn toàn được xác định bởi ảnh của một cơ sở của V. Giả sử $\mathscr{B} = \{e_1,...,e_n\}$ là một cơ sở của V thì ánh xạ tuyến tính f hoàn toàn được xác định bởi hệ véc tơ $\{f(e_1),..., f(e_n)\}$. Mặt khác theo chương 3-(1.3), nếu $\mathscr{B}' = \{\omega_1,...,\omega_m\}$ là một cơ sở của W thì hệ $\{f(e_1),..., f(e_n)\}$ hoàn toàn được xác định bởi ma trận cỡ $m \times n$ có n cột là các toạ độ của các véc tơ $f(e_1),..., f(e_n)$ trong cơ sở $\mathscr{B}'$. Vì vậy với hai cơ sở $\mathscr{B}$, $\mathscr{B}'$ cho trước thì ánh xạ tuyến tính f hoàn toàn được xác định bởi ma trận $A = \left[a_{ij}\right]_{m\times n}$, trong đó

$$f(e_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\omega_i ;\ j = 1,...,n \tag{6.8}$$

Định nghĩa 6.6: Ma trận A có các phần tử a_{ij} xác định bởi (6.8) được gọi là ma trận của ánh xạ tuyến tính f trong cơ sở $\mathscr{B}$ của V và $\mathscr{B}'$ của W.

Như vậy ma trận của ánh xạ tuyến tính f trong cơ sở $\mathscr{B}$ của V và $\mathscr{B}'$ của W là ma trận có các cột là toạ độ của $\{f(e_1),..., f(e_n)\}$ viết trong cơ sở $\mathscr{B}'$.

Ví dụ 6.2: Xét ánh xạ $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$$(x, y, z) \mapsto (2x + y - 4z, 3x + 5z)$$

$$f(1,0,0) = (2,3) = 2(1,0) + 3(0,1).$$

$$f(0,1,0) = (1,0) = 1(1,0) + 0(0,1).$$

$$f(0,0,1) = (-4,5) = -4(1,0) + 5(0,1).$$

Vậy ma trận của f trong cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$ và $\mathbb{R}^2$ là

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 3 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Nếu $(x_1,..., x_n)$ là toạ độ của $v \in V$ trong cơ sở $\mathscr{B}$.

$(y_1,..., y_m)$ là toạ độ của $f(v) \in W$ trong cơ sở $\mathscr{B}'$ thì

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = [a_{ij}]_{m \times n} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \tag{6.9}$$

hay

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n \\ .... \\ y_m = a_{m1}x_1 + ... + a_{mn}x_n \end{cases} \tag{6.10}$$

(6.10) được gọi là biểu thức toạ độ của ánh xạ tuyến tính f.

Giả sử V, W là hai không gian véc tơ với hai cơ sở lần lượt $\mathscr{B} = \{e_1,..., e_n\}$ và $\mathscr{B}' = \{\omega_1,...,\omega_m\}$. Với ánh xạ tuyến tính $f: V \to W$ thì có ma trận tương ứng $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ xác định bởi (6.8).

Ngược lại, cho ma trận $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$, biểu thức toạ độ (6.9) xác định ánh xạ $f:V\to W$ có ma trận là $A\in\mathcal{M}_{m\times n}$. Vậy có tương ứng 1 - 1 giữa $\mathrm{Hom}(V,W)$ và $\mathcal{M}_{m\times n}$. Hơn nữa, ta dễ dàng chứng minh được rằng nếu A,B là ma trận của f,g thì $A+B$ là ma trận của $f+g$ và kA là ma trận của kf , với mọi $k\in\mathbb{R}$.

Định lý 6.11: Tương ứng $\mathrm{Hom}(V,W)\to\mathcal{M}_{m\times n}$

$$f\mapsto A$$

xác định bởi (6.8) là một đẳng cấu tuyến tính và $r(f)=r(A)$.

Chứng minh: Hạng $r(A)$ của ma trận A là hạng của hệ các véc tơ cột $\{f(e_1),...,f(e_n)\}$ do đó $r(A)=\dim f(V)=r(f)$.

Cho hai ánh xạ tuyến tính $f,g:\ V\xrightarrow{f}V'\xrightarrow{g}V''$. V,V',V'' có cơ sở lần lượt là $\mathcal{B}=\{e_1,...,e_n\}$, $\mathcal{B}'=\{e'_1,...,e'_m\}$, $\mathcal{B}''=\{e_1'',...,e_l''\}$. Giả sử A là ma trận của f trong cơ sở $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ và B là ma trận của g trong cơ sở $\mathcal{B}'$, $\mathcal{B}''$ thì BA là ma trận của $g\circ f$ trong cơ sở $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}''$ (xem thêm (3.1)). Thật vậy:

$$A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}\text{, trong đó } f(e_j)=\sum_{i=1}^{m}a_{ij}e'_i\ ;\ j=1,...,n$$

$$B=\left[b_{ki}\right]_{l\times m}\text{, trong đó } g(e'_i)=\sum_{k=1}^{l}b_{ki}e''_k\ ;\ i=1,...,m$$

Ta có $$g\circ f(e_j)=g\left(\sum_{i=1}^{m}a_{ij}e'_i\right)=\sum_{i=1}^{m}a_{ij}g(e'_i)$$

$$=\sum_{i=1}^{m}a_{ij}\left(\sum_{k=1}^{l}b_{ki}e''_k\right)=\sum_{k=1}^{l}\left(\sum_{i=1}^{m}b_{ki}a_{ij}\right)e''_k.$$

Điều này chứng tỏ BA là ma trận của $g\circ f$.

Khi $V=V'=V''$ và ta chọn cố định một cơ sở của V thì có tương ứng 1-1 giữa các tự đồng cấu của V và các ma trận vuông cấp n.

Định lý 6.12: Tương ứng $\text{End}(V) \to \mathcal{M}_n$

$$f \mapsto A$$

là một đẳng cấu vành, trong đó A là ma trận của f trong một cơ sở cố định của V xác định bởi (6.8).

Chú ý: Nếu ta ký hiệu ma trận A, B tương ứng với ánh xạ tuyến tính f, g trong một cơ sở cố định của V xác định bởi (6.8) là $f \leftrightarrow A$, $g \leftrightarrow B$ thì:

$$f + g \leftrightarrow A + B$$

$$kf \leftrightarrow kA$$

$$f \circ g \leftrightarrow AB$$

$$r(f) = r(A)$$

6.4.2 Ma trận của ánh xạ tuyến tính trong các cơ sở khác nhau

Giả sử $f : V \to W$ là ánh xạ tuyến tính.

Gọi T là ma trận chuyển cơ sở $\mathcal{B}_1 = \{e_1,\dots,e_n\}$ sang cơ sở $\mathcal{B}'_1 = \{e'_1,\dots,e'_n\}$ của không gian V.

Gọi P là ma trận chuyển cơ sở $\mathcal{B}_2 = \{\omega_1,\dots,\omega_m\}$ sang cơ sở $\mathcal{B}'_2 = \{\omega'_1,\dots,\omega'_m\}$ của W.

A là ma trận của f trong cơ sở $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$,

A' là ma trận của f trong cơ sở $\mathcal{B}'_1, \mathcal{B}'_2$

Thì
$$A' = P^{-1}AT \tag{6.11}$$

Thật vậy: Giả sử $A = [a_{ki}]_{m\times n}$, $A' = [a'_{ki}]_{m\times n}$, $P = [p_{ki}]_{m\times m}$, $T = [t_{ij}]_{m\times n}$.

$$f(e_i) = \sum_{i=1}^{m} a_{ki}\omega_k \; ; \quad f(e'_j) = \sum_{i=1}^{m} a'_{ij}\,\omega'_i$$

$$\omega'_i = \sum_{i=1}^{m} p_{ki}\omega_k \quad ; \quad e'_j = \sum_{i=1}^{n} t_{ij}e_i$$

Ta có $f(e'_j)=\sum_{i=1}^{m}a'_{ij}\,\omega'_i=\sum_{i=1}^{m}a'_{ij}\left(\sum_{k=1}^{m}p_{ki}\omega_k\right)=\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{m}p_{ki}a'_{ij}\right)\omega_k$

Mặt khác:

$$f(e'_j)=f\left(\sum_{i=1}^{n}t_{ij}e_i\right)=\sum_{i=1}^{n}t_{ij}f(e_i)=\sum_{i=1}^{n}t_{ij}\left(\sum_{k=1}^{m}a_{ki}\omega_k\right)=\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n}a_{ki}t_{ij}\right)\omega_k$$

Do đó $\sum_{i=1}^{m}p_{ki}a'_{ij}=\sum_{i=1}^{n}a_{ki}t_{ij}$ với mọi $j=1,\dots,n$; $k=1,\dots,m$.

Suy ra $PA'=AT$. Vậy $A'=P^{-1}AT$.

Đặc biệt nếu f là tự đồng cấu của không gian véc tơ V. Gọi A, A' là ma trận của f trong hai cơ sở $\mathscr{B},\mathscr{B}'$ và T là ma trận chuyển từ cơ sở $\mathscr{B}$ sang $\mathscr{B}'$ thì:

$$A'=T^{-1}AT \tag{6.12}$$

Chú ý: Nếu T là ma trận chuyển cơ sở $\mathscr{B}$ sang cơ sở $\mathscr{B}'$ thì T^{-1} là ma trận chuyển cơ sở $\mathscr{B}'$ sang cơ sở $\mathscr{B}$ (xem chú ý 4.12 chương 4 trang 114).

Định nghĩa 6.7: Hai ma trận A, B được gọi là đồng dạng nếu tồn tại ma trận không suy biến T sao cho $B=T^{-1}AT$.

Từ (6.12) cho thấy hai ma trận của một tự đồng cấu bất kỳ trong hai cơ sở khác nhau là đồng dạng. Nếu A, B đồng dạng thì $\det A=\det B$. Vì vậy ta có thể định nghĩa định thức của một tự đồng cấu f là

$$\det f=\det A \tag{6.13}$$

trong đó A là ma trận của f trong một cơ sở nào đó.

6.4.3 Ánh xạ tuyến tính và hệ phương trình tuyến tính

Cho ánh xạ tuyến tính f có biểu thức toạ độ xác định bởi (6.7), (6.8). Khi đó hệ phương trình tuyến tính (5.1-5.4) tương ứng (trang 130-131) có nghiệm khi và chỉ khi

$$b\in \operatorname{Im} f \tag{6.14}$$

và $(x_1,\dots,x_n)$ là nghiêm khi và chỉ khi $f(x_1,\dots,x_n)=b$.

$(x_1,\ldots,x_n)$ là nghiêm của phương trình tuyến tính thuần nhất (5.9) (trang 137) khi và chỉ khi

$$(x_1,\ldots,x_n)\in \operatorname{Ker} f \tag{6.15}$$

Nhận xét: Từ hai định lý 6.11 và 6.12 ta thấy rằng một bài toán về ánh xạ tuyến tính có thể chuyển sang bài toán ma trận, hệ phương trình tuyến tính và ngược lại. Chẳng hạn để chứng minh định thức của ma trận A khác 0 ta chỉ cần chứng minh tự đồng cấu tuyến tính có ma trận là A là đơn cấu hoặc toàn cấu, hoặc hệ phương trình tuyến tính tương ứng có duy nhất nghiệm.

6.5 CHÉO HOÁ MA TRẬN

Trong phần này ta giải quyết bài toán: Với tự đồng cấu tuyến tính f của không gian V, hãy tìm một cơ sở của V để ma trận của f trong cơ sở này có dạng chéo:

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & & \bigcirc \\ & \ddots & \\ \bigcirc & & \lambda_n \end{bmatrix} \tag{6.16}$$

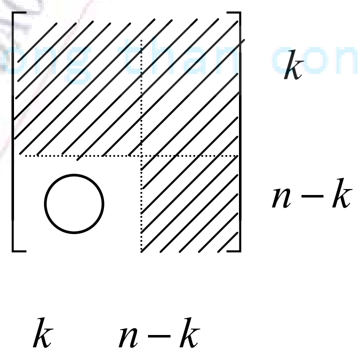
Bài toán trên cũng tương đương với bài toán: Cho ma trận A tìm ma trận không suy biến T sao cho $T^{-1}AT$ có dạng chéo.

Ta sẽ chỉ ra khi nào bài toán này có lời giải, cách tìm ma trận T và tìm cơ sở để ma trận của f trong cơ sở này có dạng chéo.

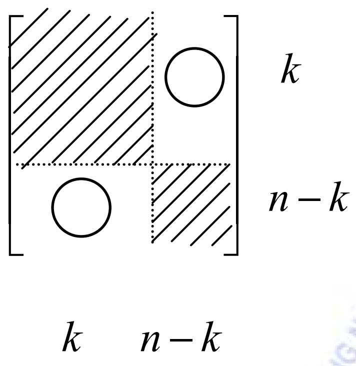
6.5.1 Không gian con bất biến

Định nghĩa 6.8: Không gian con W của không gian V được gọi là bất biến đối với tự đồng cấu f trên V nếu $f(W)\subset W$.

Giả sử $\{e_1,\ldots,e_k\}$ là một cơ sở của W, ta bổ sung để $\{e_1,\ldots,e_k,e_{k+1},\ldots,e_n\}$ là cơ sở của V. Với cơ sở này ma trận của f có dạng



Nếu $V = W_1 \oplus W_2$, W_1, W_2 bất biến đối với f thì có thể chọn cơ sở để ma trận của f có dạng



6.5.2 Véc tơ riêng, giá trị riêng

<u>Định nghĩa 6.9</u>: Nếu tồn tại véc tơ $v \in V$, $v \neq \boldsymbol{0}$ sao cho $f(v) = \lambda v$ thì λ được gọi là một giá trị riêng và v là véc tơ riêng ứng với giá trị riêng λ của tự đồng cấu f .

Với mỗi $\lambda \in \mathbb{R}$, ký hiệu

$$V_\lambda = \{v \in V | f(v) = \lambda v\} = \operatorname{Ker}(f - \lambda id_V) \qquad (6.17)$$

Rõ ràng rằng V_λ là không gian con của V .

<u>Định nghĩa 6.10</u>: Nếu λ là giá trị riêng thì V_λ được gọi là không gian riêng ứng với giá trị riêng λ.

<u>Định lý 6.13</u>: 1) λ là giá trị riêng của f khi và chỉ khi $V_\lambda \neq \{\boldsymbol{0}\}$.

2) Nếu λ là giá trị riêng của f thì mọi véc tơ $v \neq \boldsymbol{0}$ của V_λ đều là véc tơ riêng ứng với giá trị riêng λ.

3) Vơi mọi λ, không gian con V_λ bất biến đối với f.

Chứng minh: Ta chứng minh 3)

a) Trường hợp $V_\lambda = \{0\}$ là hiển nhiên.

b) Trường hợp V_λ là không gian riêng:

Với mọi $v \in V_\lambda \Rightarrow f(v) = \lambda v$

$$\Rightarrow f(f(v)) = f(\lambda v) = \lambda f(v) \Rightarrow f(v) \in V_\lambda \qquad (6.18)$$

Định nghĩa 6.11: λ được gọi là giá trị riêng của ma trận $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ nếu tồn tại $x_1,..., x_n$ không đồng thời bằng 0 sao cho

$$A\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ hay } (A - \lambda I)\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (6.19)$$

Khi đó $v = (x_1,..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ được gọi là véc tơ riêng ứng với giá trị riêng λ.

6.5.3 Đa thức đặc trưng

Định nghĩa 6.12: Giả sử f là một tự đồng cấu trong không gian véc tơ n chiều V có ma trận A trong một cơ sở nào đó của V. Khi đó:

$$P(\lambda) := \det(f - \lambda id_V) = \det(A - \lambda I) \qquad (6.20)$$

là một đa thức bậc n của λ không phụ thuộc vào cơ sở của V được gọi là đa thức đặc trưng của f và của A.

Định lý 6.14: λ_0 là giá trị riêng của f khi và chỉ khi λ_0 là nghiệm của đa thức đặc trưng.

Chứng minh: λ_0 là giá trị riêng khi và chỉ khi $V_{\lambda_0} \neq \{0\}$. Điều này tương đương với các điều tương đương sau: ánh xạ $f - \lambda_0 id_V$ không đơn cấu, hệ phương trình tuyến tính thuần nhất (5.9) có nghiệm không tầm thường. Vậy $r(f - \lambda_0 id_V) < n$; $\det(f - \lambda_0 id_V) = 0$, $\det(A - \lambda_0 I) = 0$.

Ví dụ 6.3: Tìm véc tơ riêng và giá trị riêng của tự đồng cấu trong $\mathbb{R}^2$ có ma trận chính tắc là $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

Phương trình đặc trưng

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ \lambda - 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda) = 0$$

có các nghiệm $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$.

* Véc tơ riêng $v=(x,y)$ ứng với giá trị riêng $\lambda_1=1$ là nghiệm của hệ

$$(A-\lambda_1 I)\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} \text{ hay } \begin{bmatrix}2 & 2\\-1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}.$$

Hệ phương trình tương đương với phương trình $x+y=0$.

Vậy $v=(x,-x)=x(1,-1),\ x\neq 0$.

* Véc tơ riêng $v=(x,y)$ ứng với giá trị riêng $\lambda_2=2$ là nghiệm của hệ

$$(A-\lambda_2 I)\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} \text{ hay } \begin{bmatrix}1 & 2\\-1 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}.$$

Hệ phương trình tương đương với phương trình $x+2y=0$.

Vậy $v=(-2y,y)=y(-2,1);\ y\neq 0$.

Định lý 6.15: Mọi tự đồng cấu f trong không gian thực n chiều $(n\geq 1)$ đều có ít nhất một không gian con bất biến một chiều hoặc hai chiều.

Chứng minh: Giả sử A là ma trận của tự đồng cấu f trong cơ sở $\{e_1,\dots,e_n\}$. Đa thức đặc trưng $P(\lambda)=|A-\lambda I|$ là đa thức bậc n của λ. Nếu phương trình $P(\lambda)=0$ có nghiệm thực λ_0 thì theo Định lý 6.14 và Định nghĩa 6.9 tồn tại $v\neq 0$ sao cho $f(v)=\lambda_0 v$. Không gian con một chiều sinh bởi $\{v\}$ bất biến đối với f. Nếu phương trình $P(\lambda)=0$ không có nghiệm thực thì có ít nhất một nghiệm phức $\lambda_1=a+ib$ (xem phụ lục). Xét hệ phương trình tuyến tính phức

$$[A-\lambda_1 I]\begin{bmatrix}z_1\\\vdots\\z_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\\vdots\\0\end{bmatrix} \tag{6.21}$$

Tương tự như trường hợp hệ phương trình thuần nhất thực (5.9), vì $\det(A-\lambda_1 I)=0$ nên hệ phương trình (6.21) tồn tại nghiệm $(z_1,\dots,z_n)$ không đồng thời bằng 0, nghiệm $(z_1,\dots,z_n)$ không thể là nghiệm thực.

Giả sử $z_1=x_1+iy_1,\dots,z_n=x_n+iy_n$ thì $x_1,\dots,x_n$ và $y_1,\dots,y_n$ không tỉ lệ. Thật vậy, nếu $x_1=ky_1,\dots,x_n=ky_n$ thì

$$[A-\lambda_1 I]\begin{bmatrix}z_1\\\vdots\\z_n\end{bmatrix}=[A-\lambda_1 I](1+ki)\begin{bmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\\vdots\\0\end{bmatrix} \Rightarrow [A-\lambda_1 I]\begin{bmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\\vdots\\0\end{bmatrix}$$

điều này trái với giả thiết λ_1 là một số phức nên (6.21) không thể có nghiệm thực khác 0.

Đặt $v = x_1e_1 + \ldots + x_ne_n$, $u = y_1e_1 + \ldots + y_ne_n$, vì $x_1,\ldots,x_n$ và $y_1,\ldots,y_n$ không tỉ lệ nên hệ hai véc tơ $\{v,u\}$ độc lập. Mặt khác bằng cách đồng nhất phần thực và phần ảo của số phức ta suy ra

$$A\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} - b\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}; \quad A\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = b\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + a\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

Vậy
$$\begin{cases} f(v) = av - bu \\ f(u) = bv + au \end{cases} \tag{6.22}$$

Do đó $W = \operatorname{span}\{v,u\}$ là không gian con hai chiều bất biến đối với f.

6.5.4 Tự đồng cấu chéo hoá được

Định nghĩa 6.13: Tự đồng cấu f trong không gian véc tơ V chéo hoá được nếu tồn tại một cơ sở của V để ma trận của f trong cơ sở này có dạng chéo.

Từ định nghĩa này ta thấy rằng f chéo hoá được khi và chỉ khi tồn tại một cơ sở của V gồm các véc tơ riêng của f.

Một cách tương đương, ta nói ma trận A chéo hoá được nếu tồn tại ma trận không suy biến T sao cho $T^{-1}AT$ là ma trận chéo.

Định lý 6.16: Giả sử $v_1,\ldots,v_m$ là các véc tơ riêng ứng với các giá trị riêng phân biệt $\lambda_1,\ldots,\lambda_m$ của tự đồng cấu f thì hệ véc tơ $\{v_1,\ldots,v_m\}$ độc lập tuyến tính.

Chứng minh: Ta chứng minh quy nạp theo k rằng hệ $\{v_1,\ldots,v_k\}$ độc lập tuyến tính với $1 \le k \le m$.

* Khi $k = 1$ hệ một véc tơ $v_1 \ne 0$ là độc lập tuyến tính.

* Giả sử hệ $\{v_1,\ldots,v_k\}$ với $1 \le k \le m-1$ độc lập tuyến tính. Ta chứng minh hệ $\{v_1,\ldots,v_k,v_{k+1}\}$ độc lập. Thật vậy, giả sử

$$x_1v_1 + \ldots + x_kv_k + x_{k+1}v_{k+1} = 0 \tag{6.23}$$

$$\Rightarrow f(x_1v_1 + \ldots + x_kv_k + x_{k+1}v_{k+1}) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1x_1v_1 + \ldots + \lambda_kx_kv_k + \lambda_{k+!}x_{k+1}v_{k+1} = 0 \tag{6.24}$$

Nhân λ_{k+1} vào (6.23) rồi trừ cho (6.24) ta được

$$(\lambda_{k+1}-\lambda_1)x_1v_1+\ldots+(\lambda_{k+1}-\lambda_k)x_kv_k=0$$

Vì $\{v_1,\ldots,v_k\}$ độc lập và các $\lambda_1,\ldots,\lambda_m$ khác nhau từng đôi một suy ra $x_1=\ldots=x_k=0\Rightarrow x_{k+1}=0$.

<u>Hệ quả 6.17</u>: Nếu đa thức đặc trưng của tự đồng cấu f trong không gian n chiều V có đúng n nghiệm thực phân biệt thì f chéo hoá được.

Chứng minh: Vì đa thức đặc trưng có n nghiệm phân biệt nên n véc tơ riêng tương ứng với n giá trị riêng này là một hệ độc lập, do đó là một cơ sở của V gồm các véc tơ riêng của f. Vậy f chéo hoá được.

<u>Hệ quả 6.18</u>: Giả sử đa thức đặc trưng của tự đồng cấu f chỉ có các nghiệm thực: $P(\lambda)=(-1)^n(\lambda-\lambda_1)^{m_1}\ldots(\lambda-\lambda_k)^{m_k}$ với $m_1+\ldots+m_k=n$ và các $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$ khác nhau từng đôi một. Khi đó f chéo hoá được khi và chỉ khi với mọi $i=1,\ldots,k$:

$$\dim V_{\lambda_i}=m_i. \qquad (6.25)$$

Chứng minh: $(\Leftarrow)$: Trong mỗi V_{λ_i} ta chọn một cơ sở gồm m_i véc tơ. Hệ n véc tơ gộp lại từ các véc tơ của các cơ sở vừa chọn là một hệ độc lập tuyến tính, do đó hệ này là một cơ sở của V gồm các véc tơ riêng của f. Vậy f chéo hoá được.

$(\Rightarrow)$: Giả sử f chéo hoá được, khi đó tồn tại cơ sở gồm các véc tơ riêng để ma trận f có dạng chéo

$$\begin{bmatrix} \mu_1 & & \bigcirc \\ & \ddots & \\ \bigcirc & & \mu_n \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad P(\lambda)=(-1)^n(\lambda-\mu_1)\ldots(\lambda-\mu_n)$$

Suy ra các giá trị riêng $\mu_1,\ldots,\mu_n$ phải trùng với $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$.

Vậy có đúng m_i giá trị riêng trong các $\mu_1,\ldots,\mu_n$ bằng λ_i, $i=1,\ldots,k$. Do đó có đúng m_i véc tơ riêng ứng với giá trị riêng λ_i, nghĩa là $\dim V_{\lambda_i}=m_i$.

6.5.5 Thuật toán chéo hoá

❖ Bài toán 1: Cho tự đồng cấu f trên không gian V. Hãy tìm cơ sở của V để ma trận f trong cơ sở này có dạng chéo.

❖ Bài toán 2: Cho ma trận A vuông cấp n. Tìm ma trận không suy biến T sao cho $T^{-1}AT$ có dạng chéo.

Cho tự đồng cấu f trong không gian véc tơ V. Giả sử $\mathcal{B}=\{e_1,...,e_n\}$ là một cơ sở trong V và ma trận của f trong cơ sở $\mathcal{B}$ là A. Khi đó bài toán 1 trở thành bài toán 2. Ngược lại, cho ma trận vuông A ta xét ánh xạ tuyến tính $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ có ma trận trong cơ sở chính tắc là A. Khi đó bài toán 2 trở thành bài toán 1.

Vì vậy, để giải hai bài toán này ta cần tìm cơ sở $\mathcal{B}'=\{e'_1,...,e'_n\}$ gồm các véc tơ riêng của f và ma trận cần tìm T chính là ma trận chuyển từ cơ sở $\mathcal{B}$ sang $\mathcal{B}'$. Vậy ta cần thực hiện các bước sau:

Bước 1: Tìm nghiệm của phương trình đặc trưng:

$$P(\lambda):=\det\left(f-\lambda id_V\right)=\det(A-\lambda I)=0$$

$$\Rightarrow\quad P(\lambda)=(-1)^n(\lambda-\lambda_1)^{m_1}...(\lambda-\lambda_k)^{m_k}.$$

Bước 2: Với mỗi giá trị riêng λ_i ta tìm các véc tơ riêng $v=x_1e_1+...+x_ne_n$ có $\left(x_1,...,x_n\right)$ là nghiệm của hệ phương trình

$$\left[A-\lambda_i I\right]\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}\qquad(6.26)$$

Tập hợp nghiệm là không gian con d_i chiều; $d_i=n-r\left(A-\lambda_i I\right)$.

Nếu $d_i<m_i$ với i nào đó, $1\le i\le k$ thì f không hoá chéo được.

Nếu $d_i=m_i$ thì ta chọn m_i véc tơ độc lập tuyến tính ứng với giá trị riêng λ_i, với mọi $i=1,...,k$. Hệ gồm $m_1+...+m_k=n$ các véc tơ riêng này là cơ sở $\mathcal{B}'$ cần tìm.

Ví dụ 6.4: Chéo hóa ma trận $A=\begin{bmatrix}2&-1&0\\9&4&6\\-8&0&-3\end{bmatrix}$

Đa thức đặc trưng của A

$$P(\lambda)=\begin{vmatrix}2-\lambda & -1 & 0\\ 9 & 4-\lambda & 6\\ -8 & 0 & -3-\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3-\lambda & 3-\lambda & 3-\lambda\\ 9 & 4-\lambda & 6\\ -8 & 0 & -3-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(3-\lambda)\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 9 & -5-\lambda & -3\\ -8 & 8 & 5-\lambda\end{vmatrix}=(3-\lambda)(\lambda-1)(\lambda+1)$$

Do đó A có các giá trị riêng $\lambda_1=-1,\ \lambda_2=1,\ \lambda_3=3$.

*) Giá trị riêng $\lambda=-1$ có véc tơ riêng $v=(x,y,z)$ là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{bmatrix}3 & -1 & 0\\ 9 & 5 & 6\\ -8 & 0 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

Ta có: $\begin{bmatrix}3 & -1 & 0\\ 9 & 5 & 6\\ -8 & 0 & -2\end{bmatrix}\leftrightarrow\begin{bmatrix}3 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ -8 & 0 & -2\end{bmatrix}\leftrightarrow\begin{bmatrix}3 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 4 & 0 & 1\end{bmatrix}$

Vậy hệ phương trình trên tương đương với hệ:

$$\begin{cases}3x-y=0\\ 4x+z=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=3x\\ z=-4x\end{cases}$$

$v=(x,3x,-4x)=x(1,3,-4)$ chọn $e'_1=(1,3,-4)$.

**) Giá trị riêng $\lambda=1$ có véc tơ riêng $v=(x,y,z)$ là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 9 & 3 & 6\\ -8 & 0 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

Ta có: $\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 9 & 3 & 6\\ -8 & 0 & -4\end{bmatrix}\leftrightarrow\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ -2 & 0 & -1\end{bmatrix}$

Vậy hệ phương trình trên tương đương với hệ:

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ 2x + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y \\ z = -2x \end{cases}$$

$v = (x, x, -2x) = x(1,1,-2)$ chọn $e'_2 = (1,1,-2)$.

***) Giá trị riêng $\lambda = 3$ có véc tơ riêng $v = (x, y, z)$ là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 9 & 1 & 6 \\ -8 & 0 & -6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ta có $$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 9 & 1 & 6 \\ -8 & 0 & -6 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Vậy hệ phương trình trên tương đương với hệ:

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ 4x + 3z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -y \\ z = \dfrac{-4}{3}x \end{cases}$$

$v = \left(x, -x, \dfrac{-4}{3}x\right) = \dfrac{x}{3}(3,-3,-4)$ chọn $e'_3 = (3,-3,-4)$.

Cơ sở mới gồm các véc tơ riêng $\mathscr{B}' = \{e'_1, e'_2, e'_3\}$. Ma trận chuyển cơ sở

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -3 \\ -4 & -2 & -4 \end{bmatrix}.$$

Do đó $$T^{-1}AT = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

<u>Ví dụ 6.5</u>: Chéo hóa ma trận $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Đa thức đặc trưng của A

$$P(\lambda)=\begin{vmatrix}3-\lambda & -2 & 0\\ -2 & 3-\lambda & 0\\ 0 & 0 & 1-\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1-\lambda & -2 & 0\\ 1-\lambda & 3-\lambda & 0\\ 0 & 0 & 1-\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1-\lambda & -2 & 0\\ 0 & 5-\lambda & 0\\ 0 & 0 & 1-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(5-\lambda)(\lambda-1)^2.$$

Do đó A có các giá trị riêng $\lambda_1=5$ và $\lambda_2=1$ (kép).

*) Giá trị riêng $\lambda=5$ có véc tơ riêng $v=(x,y,z)$ là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{bmatrix}-2 & -2 & 0\\ -2 & -2 & 0\\ 0 & 0 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

có hệ phương trình tương đương:

$$\begin{cases}x+y & =0\\ & z=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-y\\ z=0\end{cases}$$

$v=(-y,y,0)=y(-1,1,0)$ chọn $e'_1=(-1,1,0)$.

**) Giá trị riêng $\lambda=1$ có véc tơ riêng $v=(x,y,z)$ là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{bmatrix}2 & -2 & 0\\ -2 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

Hệ phương trình trên tương đương với phương trình: $x-y=0$, z tuỳ ý.

$v=(x,x,z)=x(1,1,0)+z(0,0,1)$ chọn $e'_2=(1,1,0)$, $e'_3=(0,0,1)$.

Ma trận chuyển cơ sở $T=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ và $T^{-1}AT=\begin{bmatrix}5 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$.

Ví dụ 6.6: Chéo hóa ma trận $A=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{bmatrix}$

Đa thức đặc trưng của A

$$P(\lambda)=\begin{vmatrix}-1-\lambda & 1 & 1\\ 1 & -1-\lambda & 1\\ 1 & 1 & -1-\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1-\lambda & 1 & 1\\ 1-\lambda & -1-\lambda & 1\\ 1-\lambda & 1 & -1-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(1-\lambda)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & -2-\lambda & 0\\ 0 & 0 & -2-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)(\lambda+2)^2.$$

Đa thức đặc trưng có nghiệm $\lambda_1=1$ và $\lambda_2=-2$ (kép).

*) Giá trị riêng $\lambda_1=1$ có véc tơ riêng $v=(x,y,z)$ là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{bmatrix}-2 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 1\\ 1 & 0 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

Ta có $\begin{bmatrix}-2 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 1\\ 1 & 1 & -2\end{bmatrix}\leftrightarrow\begin{bmatrix}-2 & 1 & 1\\ 3 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\leftrightarrow\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$

Vậy hệ phương trình trên tương đương với:

$$\begin{cases}-x+z=0\\ x-\ \ y=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=z\\ x=y\end{cases}$$

$v=(x,x,x)=x(1,1,1)$ chọn $e'_1=(1,1,1)$.

**) Giá trị riêng $\lambda_2=-2$ có véc tơ riêng $v=(x,y,z)$ là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

Hệ phương trình trên tương đương với phương trình: $x+y+z=0$.

$v=(-y-z,y,z)=y(-1,1,0)+z(-1,0,1)$.

Chọn $e'_2=(-1,1,0)$, $e'_3=(-1,0,1)$.

Ma trận chuyển cơ sở $T=\begin{bmatrix}1 & -1 & -1\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$ và $T^{-1}AT=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}$.

Ví dụ 6.7: Chéo hóa ma trận $A=\begin{bmatrix}1 & -3 & 4\\ 4 & -7 & 8\\ 6 & -7 & 7\end{bmatrix}$

Đa thức đặc trưng của A

$$P(\lambda)=\begin{vmatrix}1-\lambda & -3 & 4\\ 4 & -7-\lambda & 8\\ 6 & -7 & 7-\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1-\lambda & -3 & 4\\ 2+2\lambda & -1-\lambda & 0\\ 6 & -7 & 7-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(1+\lambda)\begin{vmatrix}-5-\lambda & -3 & 4\\ 0 & -1 & 0\\ -8 & -7 & 7-\lambda\end{vmatrix}=(1+\lambda)\begin{vmatrix}-1-\lambda & -3 & 4\\ 0 & -1 & 0\\ -1-\lambda & -7 & 7-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(1+\lambda)\begin{vmatrix}-1-\lambda & -3 & 4\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & -4 & 3-\lambda\end{vmatrix}=(3-\lambda)(\lambda+1)^2.$$

Đa thức đặc trưng có nghiệm $\lambda_1=3$ và $\lambda_2=-1$ (kép).

Giá trị riêng $\lambda_2=-1$ có véc tơ riêng $v=(x,y,z)$ là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{bmatrix}2 & -3 & 4\\ 4 & -6 & 8\\ 6 & -7 & 8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

Biến đổi ta được hệ phương trình tương đương:

$$\begin{cases} 2x - 3y + 4z = 0 \\ \qquad\quad y - \ 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2z \\ x = z \end{cases} \Rightarrow \ v = (x, 2x, x) = x(1,2,1)$$

Vậy không gian riêng $V_{\lambda_2} = \{x(1,2,1) \mid x \in \mathbb{R}\}$ có $\dim V_{\lambda_2} = 1 < 2$ nên ma trận không chéo hoá được.

CHƯƠNG 7: KHÔNG GIAN VÉC TƠ EUCLIDE DẠNG TOÀN PHƯƠNG

7.1 TÍCH VÔ HƯỚNG, KHÔNG GIAN VÉC TƠ EUCLIDE

7.1.1 Các định nghĩa và tính chất

Định nghĩa 7.1: Một dạng song tuyến tính trên không gian véc tơ V là một ánh xạ

$$\begin{aligned} \eta : V\times V &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (u,v) &\mapsto \eta(u,v) \end{aligned}$$

sao cho khi cố định mỗi biến thì nó trở thành ánh xạ tuyến tính đối với biến kia.

Nghĩa là với mọi $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$, với mọi $u_1, u_2, v; u, v_1, v_2 \in V$ thì

$$\eta(x_1u_1 + x_2u_2, v) = x_1\eta(u_1, v) + x_2\eta(u_2, v)$$
$$\eta(u, y_1v_1 + y_2v_2) = y_1\eta(u, v_1) + y_2\eta(u, v_2). \tag{7.1}$$

Định nghĩa 7.2: Dạng song tuyến tính η được gọi là có tính:

i) Đối xứng: Nếu $\eta(u,v) = \eta(v,u)$ với mọi $u, v \in V$; (7.2)

ii) Không âm: Nếu $\eta(u,u) \ge 0$ với mọi $u \in V$; (7.3)

iii) Không dương: Nếu $\eta(u,u) \le 0$ với mọi $u \in V$; (7.4)

iv) Xác định: Nếu $\eta(u,u) = 0$ khi và chỉ khi $u = 0$. (7.5)

Ta dễ dàng thấy rằng η xác định dương khi và chỉ khi $\eta(u,u) > 0$ với mọi $u \ne 0$.

Một dạng song tuyến tính đối xứng xác định dương được gọi là tích vô hướng. Ta thường ký hiệu tích vô hướng của u và v là $\langle u,v \rangle$ thay cho $\eta(u,v)$.

Một không gian véc tơ V với một tích vô hướng $<,>$ được gọi là không gian véc tơ Euclide.

Ví dụ 7.1: Trong không gian véc tơ R_2 các véc tơ tự do trong mặt phẳng và không gian véc tơ R_3 các véc tơ tự do trong không gian, ta xét tích vô hướng của hai véc tơ theo nghĩa thông thường $\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cos(\vec{u},\vec{v})$.

Ta dễ dàng kiểm chứng được tích vô hướng (theo tên gọi thông thường) là một dạng song tuyến tính xác định dương, do đó nó là tích vô hướng theo định nghĩa trên. Vậy R_2, R_3 là hai không gian véc tơ Euclide.

Ví dụ 7.2: Xét không gian véc tơ $\mathbb{R}^n=\{(x_1,...,x_n)|x_i\in\mathbb{R}; i=1,...,n\}$

Với $x=(x_1,...,x_n)$, $y=(y_1,...,y_n)\in\mathbb{R}^n$, ta định nghĩa:

$$\langle x,y\rangle = x_1y_1+...+x_ny_n \tag{7.6}$$

thì $\left(\mathbb{R}^n,\langle\ ,\ \rangle\right)$ là một không gian véc tơ Euclide.

Giả sử $\left(V,\langle\ ,\ \rangle\right)$ là một không gian véc tơ Euclide.

Định nghĩa 7.3: Với mỗi véc tơ $v\in V$ ta định nghĩa và ký hiệu chuẩn hay môđun của véc tơ v qua biểu thức

$$\|v\|=\sqrt{\langle v,v\rangle}. \tag{7.7}$$

Nếu $\|v\|=1$ thì v được gọi là véc tơ đơn vị.

Tính chất 7.1: Bất đẳng thức Cauchy-Schwarz

Với mọi $u,v\in V$ thì $$|\langle u,v\rangle|\le\|u\|\cdot\|v\| \tag{7.8}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi u, v tỉ lệ.

Chứng minh: Nếu một trong hai véc tơ bằng 0 thì cả hai vế của bất đẳng thức trên đều bằng 0, do đó bất đẳng thức nghiệm đúng.

Giả sử $v\ne 0$ thì với mọi $t\in\mathbb{R}$ ta có: $\langle u+tv,u+tv\rangle\ge 0$.

Mặt khác $\langle u+tv,u+tv\rangle=t^2\|v\|^2+2t\langle v,u\rangle+\|u\|^2$ là một tam thức bậc hai đối với t và luôn luôn không âm. Vì vậy $\Delta'=|\langle v,u\rangle|^2-\|v\|^2\|u\|^2\le 0$. Từ đó suy ra bất đẳng thức Cauchy-Schwarz.

Khi $u = kv$ thì $|\langle u, v\rangle| = |\langle kv, v\rangle| = |k| \cdot \|v\|^2 = \|kv\| \cdot \|v\| = \|u\| \cdot \|v\|$.

Ngược lại: nếu $|\langle u, v\rangle| = \|u\| \cdot \|v\|$ thì $\Delta' = 0$. Suy ra tồn tại $t_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $\langle u + t_0 v, u + t_0 v\rangle = 0 \Rightarrow u = -t_0 v$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz vào không gian $\mathbb{R}^n$ ta có bất đẳng thức Bunnhiacopsky:

$$(x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n)^2 \le \left(x_1{}^2 + \ldots + x_n{}^2\right)\left(y_1{}^2 + \ldots + y_n{}^2\right) \quad (7.9)$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = t y_1, \ldots, x_n = t y_n$.

7.1.2 Trực giao - trực chuẩn hoá Gram-Shmidt

Định nghĩa 7.4: Hai véc tơ $u, v \in V$ gọi là trực giao nhau, ký hiệu $u \perp v$, nếu $\langle u, v\rangle = 0$.

Hệ các véc tơ $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$ của V được gọi là hệ trực giao nếu hai véc tơ bất kỳ của hệ S đều trực giao nhau.

Hệ trực giao các véc tơ đơn vị được gọi là hệ trực chuẩn.

Định lý 7.2: Mọi hệ trực chuẩn là hệ độc lập tuyến tính.

Chứng minh: Nếu hệ $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$ trực chuẩn và $x_1 v_1 + \ldots + x_n v_n = 0$ thì $x_i = \langle x_1 v_1 + \ldots + x_n v_n, v_i\rangle = 0$ với mọi $i = 1, \ldots, n$.

Định lý 7.3: Giả sử $S = \{u_1, \ldots, u_n\}$ là một hệ độc lập tuyến tính các véc tơ của không gian Euclide V. Khi đó ta có thể tìm được hệ trực chuẩn $S' = \{v_1, \ldots, v_n\}$ sao cho $\operatorname{span}\{v_1, \ldots, v_k\} = \operatorname{span}\{u_1, \ldots, u_k\}$; với mọi $k = 1, \ldots, n$.

Chứng minh: Ta xây dựng hệ trực chuẩn S' theo các bước quy nạp sau đây mà được gọi là quá trình trực chuẩn hoá Gram-Shmidt.

♦) $k = 1$: Vì hệ S độc lập nên $u_1 \ne 0$. Đặt $v_1 = \dfrac{u_1}{\|u_1\|}$.

♦) $k = 2$: Xét $\overline{v_2} = -\langle u_2, v_1\rangle v_1 + u_2$, ta có $\overline{v_2} \ne 0$ (vì nếu $\overline{v_2} = 0$ thì $u_2 = k v_1$, điều này trái với giả thiết hệ S độc lập). Đặt $v_2 = \dfrac{\overline{v_2}}{\|\overline{v_2}\|}$, hệ $\{v_1, v_2\}$ trực chuẩn và $\operatorname{span}\{v_1, v_2\} = \operatorname{span}\{u_1, u_2\}$.

♦) Giả sử đã xây dựng được đến $k-1$. Tức có $\{v_1,...,v_{k-1}\}$ trực chuẩn sao cho $\text{span}\{v_1,...,v_{k-1}\}=\text{span}\{u_1,...,u_{k-1}\}$. Tương tự trên ta xét

$$\overline{v_k}=-\sum_{i=1}^{k-1}\langle u_k,v_i\rangle v_i+u_k \qquad (7.10)$$

ta cũng có $\overline{v_k}\neq 0$ (vì nếu $\overline{v_k}=0$ thì u_k là tổ hợp tuyến tính của $v_1,...,v_{k-1}$, do đó là tổ hợp tuyến tính của $u_1,...,u_{k-1}$, điều này mâu thuẫn với giả thiết hệ S độc lập). Đặt

$$v_k=\frac{\overline{v_k}}{\left\|\overline{v_k}\right\|} \qquad (7.11)$$

thì $v_k\perp v_i$; $i=1,...,k-1$. Vậy hệ $\{v_1,...,v_k\}$ trực chuẩn và

$$\text{span}\{v_1,...,v_k\}=\text{span}\{v_1,...,v_{k-1},\overline{v_k}\}=\text{span}\{u_1,...,u_{k-1},u_k\}.$$

<u>Ví dụ 7.3</u>: Hãy trực chuẩn hoá hệ $S=\{u_1,u_2,u_3\}$ trong $\mathbb{R}^3$

với $u_1=(1,1,1)$, $u_2=(-1,1,1)$, $u_3=(1,2,1)$.

Bước 1: $\|u_1\|=\sqrt{3}\ \Rightarrow\ v_1=\dfrac{u_1}{\|u_1\|}=\left(\dfrac{1}{\sqrt3},\dfrac{1}{\sqrt3},\dfrac{1}{\sqrt3}\right)$.

Bước 2: $\overline{v_2}=-\langle u_2,v_1\rangle v_1+u_2$

$$=-\frac{1}{\sqrt3}\left(\frac{1}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt3}\right)+(-1,1,1)=\left(-\frac{4}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$$

$$\left\|\overline{v_2}\right\|=\frac{2}{3}\sqrt6\quad\Rightarrow\quad v_2=\left(-\frac{2}{\sqrt6},\frac{1}{\sqrt6},\frac{1}{\sqrt6}\right).$$

Bước 3: $\overline{v_3}=-\langle u_3,v_1\rangle v_1-\langle u_3,v_2\rangle v_2+u_3$

$$=-\frac{4}{\sqrt3}\left(\frac{1}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt3}\right)-\frac{1}{\sqrt6}\left(-\frac{2}{\sqrt6},\frac{1}{\sqrt6},\frac{1}{\sqrt6}\right)+(1,2,1)=\left(0,\frac12,-\frac12\right)$$

$$\left\|\overline{v_3}\right\|=\frac{1}{\sqrt2}\quad\Rightarrow\quad v_3=\left(0,\frac{1}{\sqrt2},-\frac{1}{\sqrt2}\right).$$

$\{v_1, v_2, v_3\}$ là hệ véc tơ trực chuẩn hoá của hệ $\{u_1, u_2, u_3\}$.

7.1.3 Cơ sở trực chuẩn

Định nghĩa 7.5: Một cơ sở của không gian véc tơ V mà là hệ trực chuẩn được gọi là một cơ sở trực chuẩn.

Định lí 7.4: Mọi hệ trực chuẩn của V đều có thể bổ sung thêm để trở thành cơ sở trực chuẩn.

Chứng minh: Hệ gồm k véc tơ trực chuẩn S là hệ độc lập tuyến tính nên ta có thể bổ sung thêm để được một cơ sở của V.Trực chuẩn hoá Gram-Shmidt cơ sở này để được một cơ sở trực chuẩn của V. Trong quá trình trực chuẩn hoá k véc tơ của hệ S không thay đổi vì vậy thực chất ta đã bổ sung vào hệ S để có cơ sở trực chuẩn của V.

Hệ quả 7.5: Mọi không gian véc tơ Euclide đều tồn tại cơ sở trực chuẩn.

Định lý 7.6: Giả sử $\{e_1, \dots, e_n\}$ là một cơ sở trực chuẩn của V thì với mọi $u, v \in V$, ta có

i) $$v = \langle v, e_1\rangle e_1 + \dots + \langle v, e_n\rangle e_n . \qquad (7.12)$$

ii) $$\langle u, v\rangle = \langle u, e_1\rangle\langle v, e_1\rangle + \dots + \langle u, e_n\rangle\langle v, e_n\rangle . \qquad (7.13)$$

iii) $$\|v\|^2 = \langle v, e_1\rangle^2 + \dots + \langle v, e_n\rangle^2 . \qquad (7.14)$$

Chứng minh: Các đẳng thức trên được suy ra từ các khẳng định sau:

Nếu $v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$, $u = y_1 e_1 + \dots + y_n e_n$

thì $\langle v, e_i\rangle = \langle x_1 e_1 + \dots + x_n e_n, e_i\rangle = x_i$ với mọi $i = 1, \dots, n$

và $\langle v, u\rangle = \langle x_1 e_1 + \dots + x_n e_n, y_1 e_1 + \dots + y_n e_n\rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$.

7.1.4 Không gian con trực giao, phần bù trực giao

Định nghiã 7.6: Véc tơ $v \in V$ được gọi là trực giao với tập con $S \subset V$, ký hiệu $v \perp S$, nếu $v \perp u$ với mọi $u \in S$.

Tập con S_1 trực giao với tập con S_2, ký hiệu $S_1 \perp S_2$, nếu $v \perp u$ với mọi $v \in S_1, u \in S_2$.

Tính chất 7.7:

1) Nếu $v \perp S$ thì $v \perp \operatorname{span} S$.

2) Giả sử $\{e_1,...,e_k\}$ là một cơ sở của W thì $v \perp W$ khi và chỉ khi $v \perp e_i$, với mọi $i = 1,...,k$.

3) Với mọi tập con $S \subset V$. Ta ký hiệu $S^{\perp} = \{v \in V \mid v \perp u, \forall u \in S\}$.

Tập $S^{\perp}$ là không gian véc tơ con của V.

4) Với mọi không gian con W của V. Ta có:

$$V = W \overset{\perp}{\oplus} W^{\perp}, \ (W^{\perp})^{\perp} = W$$

Hai không gian con $W, W^{\perp}$ được gọi là phần bù trực giao của nhau.

Chứng minh: 1) Với mọi $u \in \operatorname{span} S$, $u = x_1 u_1 + ... + x_k u_k$, $u_1,...,u_k \in S$

$\Rightarrow \langle v,u\rangle = \langle v, x_1u_1 + ... + x_k u_k\rangle = x_1\langle v,u_1\rangle + ... + x_k\langle v,u_k\rangle = 0$.

2) Hiển nhiên từ 1).

3) $0 \in S^{\perp} \Rightarrow S^{\perp} \neq \phi$. Với mọi $v_1, v_2 \in S^{\perp}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $u \in S$:

$\langle \alpha v_1 + \beta v_2, u\rangle = \alpha\langle v_1,u\rangle + \beta\langle v_2,u\rangle = 0 \Rightarrow \alpha v_1 + \beta v_2 \in S^{\perp}$.

4) Giả sử $\{e_1,..., e_k\}$ là một cơ sở trực chuẩn của W.

$\forall v \in V$, đặt $u = \langle v,e_1\rangle e_1 + ... + \langle v,e_k\rangle e_k \in W$.

Ta có: $\langle v-u, e_i\rangle = 0, \forall i = 1,...,k \Rightarrow v - u \in W^{\perp}$.

Vậy $V = W + W^{\perp}$.

Ngoài ra $\forall u \in W \cap W^{\perp}$ thì $\langle u,u\rangle = 0 \Rightarrow u = 0$, do đó $V = W \oplus W^{\perp}$.

Theo định nghĩa ta dễ dàng có $W \subset (W^{\perp})^{\perp}$.

Ngược lại với mọi $v \in (W^{\perp})^{\perp} \subset V \Rightarrow v = u_1 + u_2$, $u_1 \in W$, $u_2 \in W^{\perp}$

$\Rightarrow 0 = \langle v,u_2\rangle = \langle u_1 + u_2, u_2\rangle = \langle u_1,u_2\rangle + \langle u_2,u_2\rangle = \langle u_2,u_2\rangle$

$\Rightarrow u_2 = 0 \Rightarrow v = u_1 \in W \Rightarrow (W^{\perp})^{\perp} \subset W$.

Nếu hệ véc tơ $\{e_{k+1},...,e_{k+m}\}$ là một cơ sở trực chuẩn của $W^{\perp}$ thì $\{e_1,...,e_k, e_{k+1},...,e_{k+m}\}$ là cơ sở trực chuẩn của V.

7.2 MA TRẬN TRỰC GIAO VÀ ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH TRỰC GIAO

7.2.1 Ma trận trực giao

Định nghĩa 7.7: Ma trận vuông A được gọi là ma trận trực giao nếu $A^t A = I$.

Nếu $A = [a_{ij}]$ thì A là ma trận trực giao khi

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} a_{ik} = \delta_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{nếu } j = k \\ 0 & \text{nếu } j \neq k \end{cases}; \tag{7.15}$$

δ_{jk} là ký hiệu Kronecker.

Như vậy ma trận trực giao A là khả nghịch và có $A^{-1} = A^t$. Mặt khác từ (7.15) ta cũng thấy rằng ma trận A trực giao khi và chỉ khi các véc tơ cột và các véc tơ hàng của A tạo thành hai hệ trực chuẩn.

Ta có $\left|A^t A\right| = |I| = 1 \Rightarrow |A| = \pm 1$.

Ví dụ 7.4: Ma trận $A = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$ là ma trận trực giao.

Ví dụ 7.5: Mọi ma trận vuông cấp 2 trực giao đều có dạng

$$A = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \quad \text{hay} \quad A = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{bmatrix}. \tag{7.16}$$

Thật vậy, ta dễ dàng kiểm chứng hai ma trận A ở trên thoả mãn $A^t A = I$.

Ngược lại nếu $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ và $A^t A = I$ thì $\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Suy ra $\begin{cases} a^2+c^2=1 & (1) \\ ab+cd=0 & (2) \\ b^2+d^2=1 & (3) \end{cases}$

Mặt khác từ $|A|=\pm 1$ và (2) & (3) suy ra b,d là nghiệm duy nhất của hệ phương trình Cramer $\begin{cases} ax+cy=0 \\ bx+dy=1 \end{cases}$

$$\Rightarrow\ b=-\frac{c}{|A|},\ d=\frac{a}{|A|}.$$

♦) Nếu $|A|=1$ thì $A=\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$ và $a^2+b^2=1 \Rightarrow A=\begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$.

♦) Nếu $|A|=-1$ thì $A=\begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix}$, $a^2+b^2=1 \Rightarrow A=\begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{bmatrix}$.

<u>Định lý 7.8</u>: Ma trận của một hệ trực chuẩn viết trong cơ sở trực chuẩn là một ma trận trực giao. Đặc biệt mọi ma trận chuyển từ cơ sở trực chuẩn sang cơ sở trực chuẩn là ma trận trực giao.

Chứng minh: Gọi $A=[a_{ij}]$ là ma trận của hệ trực chuẩn $\{v_1,...,v_n\}$ viết trong cơ sở trực chuẩn $\mathscr{B}=\{e_1,...,e_n\}$.

Từ (7.12) ta có $v_j=\sum_{i=1}^{n} a_{ij}e_i=\sum_{i=1}^{n}\langle e_i,v_j\rangle e_i$

Từ (7.13) ta có $\sum_{i=1}^{n} a_{ij}a_{ik}=\langle v_j,v_k\rangle=\delta_{jk}$

Vậy A là ma trận trực giao.

7.2.2 Ánh xạ tuyến tính trực giao

<u>Định nghĩa 7.8</u>: Giả sử $(V,\langle\ ,\ \rangle_V)$ và $(V',\langle\ ,\ \rangle_{V'})$ là hai không gian véc tơ Euclide. Ánh xạ tuyến tính $f:V\to V'$ được gọi là ánh xạ trực giao nếu với mọi $u,v\in V$:

$$\langle f(u),f(v)\rangle_{V'}=\langle u,v\rangle_V \qquad (7.17)$$

Ta dễ dàng thấy rằng mọi ánh xạ tuyến tính trực giao đều đơn cấu. Vì vậy mọi tự đồng cấu tuyến tính trực giao là đẳng cấu.

Định lý sau chỉ ra rằng, nếu điều kiện (7.17) thoả mãn đối với mọi véc tơ của một cơ sở trực chuẩn nào đó thì f cũng là ánh xạ tuyến tính.

Định lý 7.9: Giả sử f là tự đồng cấu tuyến tính của không gian véc tơ Euclide V. $\mathscr{B}=\{e_1,...,e_n\}$ là một cơ sở trực chuẩn của V. Khi đó f trực giao khi và chỉ khi $\{f(e_1),...,f(e_n)\}$ là một cơ sở trực chuẩn của V.

Chứng minh: (⇒): Hiển nhiên vì $\langle f(e_i), f(e_j)\rangle=\langle e_i, e_j\rangle$.

(⇐): Giả sử $\{f(e_1),...,f(e_n)\}$ là cơ sở trực chuẩn thì với mọi $u,v\in V$:

$$v=x_1e_1+...+x_ne_n,\quad u=y_1e_1+...+y_ne_n$$

$$\Rightarrow \langle f(v), f(u)\rangle=\langle x_1f(e_1)+...+x_nf(e_n), y_1f(e_1)+...+y_nf(e_n)\rangle$$

$$=x_1y_1+...+x_ny_n=\langle v,u\rangle.$$

7.2.3 Ma trận của tự đẳng cấu trực giao

Giả sử $A=[a_{ij}]$ là ma trận của tự đẳng cấu f trong không gian Euclide V với cơ sở trực chuẩn $\mathscr{B}=\{e_1,...,e_n\}$. Theo định lý 7.8 và định lý 7.9 thì tự đẳng cấu f là trực giao khi và chỉ khi A là một ma trận trực giao.

Vậy ma trận của tự đẳng cấu trực giao trong một cơ sở trực chuẩn là một ma trận trực giao. Ngược lại, nếu A là ma trận trực giao và f là tự đồng cấu tuyến tính có ma trận trong cơ sở trực chuẩn là A thì f là ánh xạ trực giao.

Định lý 7.10: Mọi ma trận trực giao chỉ có các giá trị riêng là -1 hay 1.

Chứng minh: Giả sử f là tự đồng cấu trực giao có ma trận trong một cơ sở trực chuẩn nào đó là A. Nếu λ là một giá trị riêng của A thì tồn tại véc tơ riêng $v\neq 0$ sao cho $f(v)=\lambda v$.

Khi đó $\langle f(v), f(v)\rangle=\langle \lambda v, \lambda v\rangle=\lambda^2\langle v,v\rangle$.

Mặt khác $\langle f(v), f(v)\rangle=\langle v,v\rangle \Rightarrow \lambda^2\langle v,v\rangle=\langle v,v\rangle$

$\langle v,v\rangle\neq 0 \Rightarrow \lambda^2=1$. Vậy $\lambda=\pm 1$.

7.3 CHÉO HOÁ TRỰC GIAO MA TRẬN - TỰ ĐỒNG CẤU ĐỐI XỨNG

7.3.1 Bài toán chéo hoá trực giao

Cho ma trận A tìm ma trận trực giao T sao cho $T^t AT$ là ma trận chéo.

Định lý 7.11(điều kiện cần): Nếu A chéo hoá trực giao được thì A là ma trận đối xứng.

Chứng minh: Nếu $T^t AT$ là ma trận chéo thì $\left(T^t AT\right)^t = T^t AT$. Do đó $T^t A^t T = T^t AT$, vì T khả nghịch nên $A^t = A$.

Ngược lại, ta sẽ chứng minh nếu A đối xứng thì chéo hoá trực giao được.

7.3.2 Tự đồng cấu đối xứng

Định nghĩa 7.9: Tự đồng cấu $f: V \to V$ được gọi là đối xứng nếu với mọi $u, v \in V$:

$$\langle f(u), v\rangle = \langle u, f(v)\rangle \tag{7.18}$$

Tính chất 7.12: Nếu $\mathscr{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ là một cơ sở của V thì tự đồng cấu f là đối xứng khi và chỉ khi với mọi $i, j = 1, \ldots, n$,

$$\left\langle f(e_i), e_j\right\rangle = \left\langle e_i, f(e_j)\right\rangle \tag{7.19}$$

Thật vậy, nếu có (7.19) thì $\forall\ v = x_1e_1 + \ldots + x_ne_n,\ u = y_1e_1 + \ldots + y_ne_n$:

$$\langle f(v), u\rangle = \langle x_1 f(e_1) + \ldots + x_n f(e_n), y_1e_1 + \ldots + y_ne_n\rangle$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j \left\langle f(e_i), e_j\right\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j \left\langle e_i, f(e_j)\right\rangle = \langle v, f(u)\rangle$$

Như vậy để chứng minh một tự đồng cấu là đối xứng thì thay vì chứng minh công thức (7.18) đúng với mọi $v, u \in V$ ta chỉ cần chứng minh công thức (7.19) đúng với một cơ sở nào đó.

7.3.3 Ma trận của một tự đồng cấu đối xứng trong một cơ sở trực chuẩn

Giả sử $A = \left[a_{ij}\right]$ là ma trận của tự đồng cấu f trong một cơ sở trực chuẩn $\mathscr{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$

$$\Rightarrow f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}e_i = \sum_{i=1}^{n} \left\langle f(e_j), e_i\right\rangle e_i \tag{7.20}$$

Vậy với mọi $i, j = 1, \ldots, n$: $\qquad a_{ij} = \left\langle f(e_j), e_i\right\rangle$.

Từ tính chất 7.12, kết hợp với (7.20) ta có:

Định lý 7.13: f đối xứng khi và chỉ khi ma trận A của f trong một cơ sở trực chuẩn nào đó là ma trận đối xứng.

Định lý 7.14: Các giá trị riêng của một ma trận đối xứng là các số thực. Nói cách khác, phương trình đặc trưng của ma trận đối xứng vuông cấp n có n nghiệm thực.

Chứng minh: Giả sử f là tự đồng cấu đối xứng có ma trận trong một cơ sở trực chuẩn nào đó là ma trận đối xứng A cấp n. Giả sử $\lambda = a + ib$ là nghiệm của đa thức đặc trưng $P(\lambda) = |A - \lambda I|$. Khi đó theo Định lý 6.15 tồn tại hai véc tơ độc lập tuyến tính $u, v \in V$ sao cho $\begin{cases} f(v) = av - bu \\ f(u) = bv + au \end{cases}$

Do đó $\langle f(v), u \rangle = a\langle v, u \rangle - b\langle u, u \rangle$, $\langle v, f(u) \rangle = a\langle v, u \rangle + b\langle v, v \rangle$.

Vì f đối xứng suy ra $-b\langle u, u \rangle = b\langle v, v \rangle \geq 0 \Rightarrow b = 0$. Nói cách khác, mọi nghiệm của đa thức đặc trưng là nghiệm thực.

Định lý 7.15: Hai véc tơ riêng ứng với hai giá trị riêng khác nhau của một tự đồng cấu đối xứng là trực giao nhau.

Chứng minh: Giả sử $f(v_1) = \lambda_1 v_1$, $f(v_2) = \lambda_2 v_2$; $v_1, v_2 \neq 0$; $\lambda_1 \neq \lambda_2$

thì $\lambda_1 \langle v_1, v_2 \rangle = \langle f(v_1), v_2 \rangle = \langle v_1, f(v_2) \rangle = \lambda_2 \langle v_1, v_2 \rangle$

$$\Rightarrow (\lambda_1 - \lambda_2)\langle v_1, v_2 \rangle = 0 \Rightarrow \langle v_1, v_2 \rangle = 0.$$

Định lý 7.16: Nếu f là tự đồng cấu đối xứng trong V thì tồn tại một cơ sở trực chuẩn của V gồm các véc tơ riêng của f.

Chứng minh: Theo Định lý 7.14 f có véc tơ riêng u_1 ứng với giá trị riêng $\lambda_1 \in \mathbb{R}$, $\|u_1\| = 1$. Đặt $W_1 = \{\lambda u_1 | \lambda \in \mathbb{R}\} = \operatorname{span}\{u_1\}$.

$$\forall v \in W_1^{\perp}, \langle f(v), u_1 \rangle = \langle v, f(u_1) \rangle = \langle v, \lambda_1 u_1 \rangle = 0 \Rightarrow f(v) \in W_1^{\perp}.$$

Vậy $W_1^{\perp}$ bất biến đối với f và $V = W_1 \oplus W_1^{\perp}$ nên ta có thể xét:

$$f_1 = f|_{W_1^{\perp}} : W_1^{\perp} \to W_1^{\perp}, \ \dim W_1^{\perp} = \dim V - 1.$$

Quy nạp theo số chiều của không gian thì có cơ sở trực chuẩn $\{u_2,...,u_n\}$ của $W_1^{\perp}$ gồm các véc tơ riêng của f_1. Do đó $\{u_1,u_2,...,u_n\}$ là cơ sở trực chuẩn của V gồm các véc tơ riêng của f.

<u>Hệ quả 7.17</u>: Mọi ma trận đối xứng đều chéo hoá trực giao được.

Chứng minh: Giả sử f là tự đồng cấu đối xứng có ma trận A trong cơ sở trực chuẩn $\mathscr{B}=\{e_1,...,e_n\}$. Theo Định lý 7.16 tồn tại cơ sở trực chuẩn $\mathscr{B}'=\{e'_1,...,e'_n\}$ gồm các véc tơ riêng của f. Gọi T là ma trận chuyển từ cơ sở $\mathscr{B}$ sang $\mathscr{B}'$ thì T trực giao và

$$T^t AT=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \bigcirc\\ & \ddots & \\ \bigcirc & & \lambda_n\end{bmatrix} \tag{7.21}$$

trong đó $\lambda_1,...,\lambda_n$ là các giá trị riêng của A.

7.3.4 Thuật toán chéo hoá trực giao

Muốn chéo hoá trực giao một ma trận đối xứng A, nghĩa là tìm ma trận trực giao T sao cho $T^t AT$ có dạng chéo, ta thực hiện các bước sau:

<u>Bước 1</u>: Tìm các giá trị riêng của A (nghiệm của đa thức đặc trưng).

<u>Bước 2</u>: Trong mỗi không gian riêng tìm một cơ sở và trực chuẩn hoá Gram-Shmidt cơ sở này.

<u>Bước 3</u>: Gộp các cơ sở đã được trực chuẩn hoá ở bước 2 ta có một cơ sở trực chuẩn của V. Ma trận các véc tơ của cơ sở này là ma trận trực giao T cần tìm.

<u>Ví dụ 7.6</u>: Chéo hoá trực giao ma trận đối xứng $A=\begin{bmatrix}0 & 2 & 2\\ 2 & 3 & -1\\ 2 & -1 & 3\end{bmatrix}$

Đa thức đặc trưng

$$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}-\lambda & 2 & 2\\ 2 & 3-\lambda & -1\\ 2 & -1 & 3-\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}4-\lambda & 2 & 2\\ 4-\lambda & 3-\lambda & -1\\ 4-\lambda & -1 & 3-\lambda\end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} (4-\lambda) & 2 & 2 \\ 0 & 1-\lambda & -3 \\ 0 & -3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (4-\lambda) & 2 & 2 \\ 0 & -2-\lambda & -3 \\ 0 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} = -(4-\lambda)^2(\lambda+2)$$

♦ Với giá trị riêng $\lambda_1 = -2$, véc tơ riêng $v = (x, y, z)$ là nghiệm của hệ

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ta có $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Hệ phương trình trên tương đương với hệ

$\begin{cases} x + 2y = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$ có nghiệm $\begin{cases} x = -2y \\ y = z \end{cases}$

$\Rightarrow \; v = (-2y, y, y) = y(-2,1,1)$. Chọn $v_1 = (-2,1,1)$.

Trực chuẩn hoá được $u_1 = (-2/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6})$.

♦ Với giá trị riêng $\lambda_2 = 4$ (nghiệm kép), véc tơ riêng $v = (x, y, z)$ là nghiệm của hệ

$$\begin{bmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ta có $\begin{bmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Hệ phương trình trên tương đương với phương trình $2x - y - z = 0$

$$\Rightarrow \; v = (x, y, z) = \left(\frac{y}{2} + \frac{z}{2}, y, z\right) = y\left(\frac{1}{2}, 1, 0\right) + z\left(\frac{1}{2}, 0, 1\right).$$

Chọn $v_2 = \left(\frac{1}{2},1,0\right)$, $v_3 = \left(\frac{1}{2},0,1\right)$.

Trực chuẩn hoá hai véc tơ này ta có

$$u_2 = (1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5}, 0),\quad u_3 = (2/\sqrt{30}, -1/\sqrt{30}, 5/\sqrt{30}).$$

Vậy $T = \begin{bmatrix} -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{30} \\ 1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{30} \\ 1/\sqrt{6} & 0 & 5/\sqrt{30} \end{bmatrix}$ và $T^t AT = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$.

7.4 DẠNG TOÀN PHƯƠNG

7.4.1 Dạng song tuyến tính và dạng toàn phương

Giả sử $\eta : V \times V \to \mathbb{R}$ là một dạng song tuyến tính trên không gian véc tơ V. $\mathscr{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ là một cơ sở của V

Ma trận $$A = [a_{ij}],\quad a_{ij} = \eta(e_i, e_j) \tag{7.22}$$

được gọi là ma trận của dạng song tuyến tính η trong cơ sở $\mathscr{B}$.

$\forall u,\ v \in V;\ u = x_1e_1 + \ldots + x_ne_n$ và $v = y_1e_1 + \ldots + y_ne_n$

$$\begin{aligned}\eta(u,v) &= \eta(x_1e_1 + \ldots + x_ne_n, y_1e_1 + \ldots + y_ne_n) \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} \eta(e_i,e_j)x_iy_j = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_iy_j \end{aligned} \tag{7.23}$$

(7.23) được gọi là biểu thức tọa độ của dạng song tuyến tính η trong cơ sở $\mathscr{B}$.

Ngược lại ta có thể chứng minh được rằng ánh xạ $\eta : V \times V \to \mathbb{R}$ xác định bởi $\eta(u,v) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_iy_j$ là một dạng song tuyến tính có ma trận thoả mãn (7.22) và (7.23).

<u>Định nghĩa 7.10</u>: Giả sử $\eta : V \times V \to \mathbb{R}$ là dạng song tuyến tính trên không gian véc tơ V. Ánh xạ $Q : V \to \mathbb{R}$

$$v \mapsto Q(v) = \eta(v,v)$$

được gọi là một dạng toàn phương trên V.

Nếu $\mathscr{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ là một cơ sở của V, $\forall v \in V$; $v = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n$

theo (7.23) ta có

$$Q(v) = \eta(v, v) = \sum_{i,j=1}^{n} \eta(e_i, e_j) x_i x_j = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

Ngược lại ánh xạ $Q : V \to \mathbb{R}$ có biểu thức toạ độ trong cơ sở $\mathscr{B}$

$$Q(v) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j \text{, với } v = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \tag{7.24}$$

là một dạng toàn phương ứng với dạng song tuyến tính η sao cho $a_{ij} = \eta(e_i, e_j)$.

Nói cách khác một dạng toàn phương $Q : V \to \mathbb{R}$ là một hàm số xác định trong không gian véc tơ V có công thức xác định ảnh $Q(v)$ là một đa thức thuần nhất bậc hai đối với các toạ độ của véc tơ v trong cơ sở bất kỳ.

Chú ý rằng trong biểu thức $Q(v) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$ ta có thể thay

$a_{ij} x_i x_j + a_{ji} x_j x_i$ bởi $a'_{ij} x_i x_j + a'_{ji} x_j x_i$ thoả mãn $a_{ij} + a_{ji} = a'_{ij} + a'_{ji}$.

Vì vậy cùng một dạng toàn phương Q có nhiều dạng song tuyến tính η sao cho $Q(v) = \eta(v, v)$. Nhưng nếu ta thêm điều kiện

$a_{ij} = a_{ji}$ nghĩa là $\eta(e_i, e_j) = \eta(e_j, e_i)$

thì với mỗi dạng toàn phương Q chỉ có duy nhất một dạng song tuyến tính đối xứng η thỏa mãn $Q(v) = \eta(v, v)$. Dạng song tuyến tính đối xứng η này được gọi là dạng cực của Q.

Nếu ma trận A xác định bởi (7.22) thoả mãn thêm điều kiện $a_{ij} = a_{ji}$ (ma trận A đối xứng) thì A cũng còn được gọi là ma trận của dạng toàn phương Q trong cơ sở $\mathscr{B}$.

<u>Ví dụ 7.7</u>: Tìm ma trận của dạng toàn phương Q có biểu thức toạ độ trong cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$, $v = (x_1, x_2, x_3) = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$ là

$$Q(v) = x_1^2 - 2x_1 x_2 + x_2^2 + 4x_1 x_3 + 4x_3^2 + 2x_2 x_3$$

$$Q(v) = x_1^2 - x_1x_2 - x_2x_1 + x_2^2 + 2x_1x_3$$
$$+ 2x_3x_1 + 4x_3^2 + x_2x_3 + x_3x_2$$

Do đó ma trận A của Q cơ sở chính tắc

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

7.4.2 Biểu thức toạ độ của dạng toàn phương trong các cơ sở khác nhau

Giả sử Q là dạng toàn phương trong không gian véc tơ V có dạng cực tương ứng là η.

$A = \left[a_{ij}\right]$, $A' = \left[a'_{ij}\right]$ là hai ma trận của Q trong hai cơ sở $\mathscr{B} = \{e_1, ..., e_n\}$. $\mathscr{B}' = \{e'_1, ..., e'_n\}$ của V: $a_{ij} = \eta(e_i, e_j)$, $a'_{ij} = \eta(e'_i, e'_j)$.

Gọi $T = \left[t_{ij}\right]$ là ma trận chuyển từ cơ sở $\mathscr{B}$ sang $\mathscr{B}'$: $e'_j = \sum_{i=1}^{n} t_{ij} e_i$

Khi đó $\quad a'_{ij} = \eta(e'_i, e'_j) = \eta\left(\sum_{k=1}^{n} t_{ki} e_k, \sum_{l=1}^{n} t_{lj} e_l\right)$

$$= \sum_{k=1}^{n} t_{ki}\left(\sum_{l=1}^{n} \eta(e_k, e_l) t_{lj}\right) = \sum_{k=1}^{n} t_{ki}\left(\sum_{l=1}^{n} a_{kl} t_{lj}\right)$$

Vậy
$$A' = T^t A T \tag{7.25}$$

Nếu ta ký hiệu toạ độ của các véc tơ dưới dạng ma trận cột:

$v = x_1e_1 + ... + x_ne_n$, $v' = x'_1 e'_1 + ... + x'_n e'_n$

Đặt $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, $X' = \begin{bmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix}$ thì $X = TX'$

Xét ma trận một hàng một cột

$$\left[Q(v)\right] = \left[\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j\right] = X^t A X = \left[\sum_{i,j=1}^{n} a'_{ij} x'_i x'_j\right] = X'^t A' X'.$$

$$[Q(v)] = X^t AX = (TX')^t A(TX') = X'^t (T^t AT)X' = X'^t A'X'. \quad (7.26)$$

7.4.3 Biểu thức toạ độ dạng chính tắc của một dạng toàn phương

Ta cần tìm một cơ sở của V để trong cơ sở này ma trận của dạng toàn phương là ma trận chéo, nghĩa là biểu thức toạ độ có dạng chính tắc:

$$Q(v) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \dots + a_{nn}x_n^2 \quad (7.27)$$

7.4.4 Đưa về chính tắc bằng chéo hoá trực giao

Giả sử Q là dạng toàn phương trong không gian Euclide V với cơ sở trực chuẩn $\mathscr{B} = \{e_1,\dots,e_n\}$ có ma trận $A = [a_{ij}]$ (ma trận đối xứng). Theo Hệ quả (7.17) ta có thể hoá chéo trực giao ma trận $A = [a_{ij}]$, nghĩa là ta tìm được ma trận trực giao T để $T^t AT$ là ma trận chéo. T là ma trận chuyển từ cơ sở $\mathscr{B}$ sang cơ sở trực chuẩn $\mathscr{B}'$ gồm các véc tơ riêng của A. Vì vậy biểu thức (7.24) trong cơ sở $\mathscr{B}'$ có dạng chính tắc (7.27).

Ví dụ 7.8: $Q: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$v = (x_1, x_2, x_3) \mapsto Q(v) = 3x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3$$

Ma trận của Q cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$ là:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Theo Ví dụ 7.6 tồn tại cơ sở $\mathscr{B}' = \{e'_1, e'_2, e'_3\}$:

$$e'_1 = (-2/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}), \quad e'_2 = (1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5}, 0),$$

$$e'_3 = (2/\sqrt{30}, -1/\sqrt{30}, 5/\sqrt{30}).$$

$$v = (x_1, x_2, x_3) = x'_1 e'_1 + x'_2 e'_2 + x'_3 e'_3$$

$$Q(v) = -2x'^2_1 + 4x'^2_2 + 4x'^2_3.$$

7.4.5 Đưa về dạng chính tắc theo phương pháp Lagrange

Giả sử trong cơ sở $\mathscr{B} = \{e_1,\dots,e_n\}$ của không gian véc tơ V (không giả thiết không gian Euclide) biểu thức toạ độ của dạng toàn phương Q có dạng:

$$Q(v)=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j\,,\quad a_{ij}=a_{ji}\quad ,\ v=\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\,.$$

Ta thực hiện các phép đổi toạ độ sau:

♦ Trường hợp 1: Giả sử có $a_{ii}\neq 0$, chẳng hạn $a_{11}\neq 0$ thì ta có thể sắp xếp lại:

$$Q(v)=a_{11}\left(x_1{}^2+2x_1\sum_{i=2}^{n}\frac{a_{1i}}{a_{11}}x_i\right)+\sum_{i,j=2}^{n} a_{ij}x_i x_j$$

$$=a_{11}\left(x_1+\sum_{i=2}^{n}\frac{a_{1i}}{a_{11}}x_i\right)^2+\sum_{i,j=2}^{n} a_{ij}x_i x_j-a_{11}\left(\sum_{i=2}^{n}\frac{a_{1i}}{a_{11}}xi\right)^2 \tag{7.28}$$

$$=a_{11}\left(x_1+\sum_{i=2}^{n}\frac{a_{1i}}{a_{11}}x_i\right)^2+\sum_{i,j=2}^{n} a'_{ij}\,x_i x_j$$

Đặt $\begin{cases} y_1=x_1+\sum\limits_{i=2}^{n}\dfrac{a_{1i}}{a_{11}}x_i \\ y_j=x_j\ ;\quad j=2,\dots,n\end{cases}$ thì $Q(v)=a_{11}y_1{}^2+\sum\limits_{i,j=2}^{n} a'_{ij}\,y_i y_j$

Tiếp tục quá trình này với biểu thức $\sum\limits_{i,j=2}^{n} a'_{ij}\,y_i y_j$.

♦ Trường hợp 2: Nếu mọi $a_{ii}=0$ thì tồn tại $a_{ij}\neq 0$, chẳng hạn $a_{12}\neq 0$.

Đặt
$$\begin{cases} x_1=y_1+y_2 \\ x_2=y_1-y_2 \\ x_j=y_j\ ;\ j=3,\dots,n\end{cases} \tag{7.29}$$

thì $Q(v)=\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j=\sum\limits_{i,j=1}^{n} a'_{ij}\,y_i y_j$

có $a'_{11}=a_{12}\neq 0$, vì vậy ta có thể đưa về trường hợp 1.

Ví dụ 7.9: Cho dạng toàn phương Q có biểu thức toạ độ trong cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$, $v=(x_1,x_2,x_3)$:

$$Q(v)=x_1^2-2x_1x_2+2x_2^2+4x_1x_3+4x_3^2+2x_2x_3,$$

Ta có $Q(v)=x_1^2+2x_1(-x_2+2x_3)+2x_2^2+4x_3^2+2x_2x_3$

$$=(x_1-x_2+2x_3)^2-(-x_2+2x_3)^2+2x_2^2+4x_3^2+2x_2x_3$$

$$=(x_1-x_2+2x_3)^2+x_2^2+6x_2x_3$$

$$=(x_1-x_2+2x_3)^2+(x_2+3x_3)^2-9x_3^2$$

Đặt $\begin{cases} y_1=x_1-x_2+2x_3 \\ y_2=x_2+3x_3 \\ y_3=x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=y_1+y_2-5y_3 \\ x_2=y_2-3y_3 \\ x_3=y_3 \end{cases}$

$$Q(v)=y_1^2+y_2^2-9y_3^2$$

$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \Rightarrow$ ma trận chuyển cơ sở $T=\begin{bmatrix} 1 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Vậy trong cơ sở mới $e'_1=(1,0,0)$, $e'_2=(1,1,0)$, $e'_3=(-5,-3,1)$;

$v=(x_1,x_2,x_3)=y_1e'_1+y_2e'_2+y_3e'_3$ có $Q(v)=y_1^2+y_2^2-9y_3^2$.

Chú ý rằng khi sử dụng phương pháp Lagrange thì ma trận T nhận được nói chung không phải là ma trận trực giao và cơ sở $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$ không phải là cơ sở trực chuẩn.

Ví dụ 7.10: Cho dạng toàn phương Q có biểu thức toạ độ trong cơ sở chính tắc

$$Q(v)=x_1^2+4x_2^2+x_3^2+4x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3 .$$

Ta có $Q(v)=x_1^2+2x_1(2x_2+x_3)+4x_2^2+x_3^2+2x_2x_3$

$$=(x_1+2x_2+x_3)^2-(2x_2+x_3)^2+4x_2^2+x_3^2+2x_2x_3$$

$$= (x_1 + 2x_2 + x_3)^2 - 2x_2x_3$$

Đặt $\begin{cases} y_1 = x_1 + 2x_2 + x_3 \\ y_2 = x_2 \\ y_3 = x_3 \end{cases}$ hay $\begin{cases} x_1 = y_1 - 2y_2 - y_3 \\ x_2 = y_2 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$

thì $Q(v) = y_1{}^2 - 2y_2y_3$

Đặt $\begin{cases} y_1 = z_1 \\ y_2 = z_2 + z_3 \\ y_3 = z_2 - z_3 \end{cases}$ thì $Q(v) = z_1{}^2 - 2z_2{}^2 + 2z_3{}^2$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}$$

Vậy trong cơ sở mới $e'_1 = (1,0,0)$, $e'_2 = (-3,1,1)$, $e'_3 = (-1,1,-1)$;

$v = (x_1, x_2, x_3) = z_1e'_1 + z_2e'_2 + z_3e'_3$ thì $Q(v) = z_1{}^2 - 2z_2{}^2 + 2z_3{}^2$.

7.4.6 Đưa về dạng chính tắc theo phương pháp Jacobi

Cho dạng toàn phương Q trong không gian véc tơ V (không giả thiết không gian Euclide) với dạng cực tương ứng η và có ma trận trong cơ sở $\mathscr{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ là $A = [a_{ij}]$: $a_{ij} = \eta(e_i, e_j)$; $i, j = 1, \ldots, n$.

Nếu các định thức con chính của A đều khác không

$$D_1 = a_{11} \neq 0,\ D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0, \ldots,\ D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0 \quad (7.30)$$

thì với mỗi $j = 1, \ldots, n$ các hệ phương trình Cramer sau

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_j = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2j}x_j = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \ldots + a_{jj}x_j = 1 \end{cases} \tag{7.31}$$

luôn có nghiệm duy nhất ký hiệu là $(\alpha_{1j}, \alpha_{2j}, \ldots, \alpha_{jj})$.

Xét hệ véc tơ
$$\begin{cases} f_1 = \alpha_{11}e_1 \\ f_2 = \alpha_{12}e_1 + \alpha_{22}e_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_n = \alpha_{1n}e_1 + \alpha_{2n}e_2 + \ldots + \alpha_{nn}e_n \end{cases} \tag{7.32}$$

Ta quy ước $D_0 = 1$, từ điều kiện (7.30) và hệ (7.31) thì $\alpha_{jj} = \dfrac{D_{j-1}}{D_j} \neq 0$ $\forall\, j = 1, \ldots, n$. Định thức của hệ $\mathscr{B}' = \{f_1, \ldots, f_n\}$ trong cơ sở $\{e_1, \ldots, e_n\}$ là $\alpha_{11}\alpha_{22}\ldots\alpha_{nn} \neq 0$ nên hệ $\mathscr{B}'$ độc lập tuyến tính vì vậy là một cơ sở của V.

Từ (7.31) và (7.32) $\Rightarrow$ $\eta(f_j, e_i) = a_{i1}\alpha_{1j} + a_{i2}\alpha_{2j} + \ldots + a_{ij}\alpha_{jj} = 0$ với mọi $i = 1, \ldots, j-1$ và $\eta(f_j, e_j) = a_{j1}\alpha_{1j} + a_{j2}\alpha_{2j} + \ldots + a_{jj}\alpha_{jj} = 1$. Do đó ta cũng có $\eta(f_j, f_i) = 0$ với mọi $i < j$ và

$$\eta(f_j, f_j) = \eta(f_j, \alpha_{1j}e_1 + \ldots + \alpha_{jj}e_j) = \alpha_{jj}\eta(f_j, e_j) = \alpha_{jj}.$$

Mặt khác dạng song tuyến tính η đối xứng nên $\eta(f_j, f_i) = 0$ với mọi $i > j$.

Vậy
$$\eta(f_i, f_j) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } i \neq j \\ \dfrac{D_{j-1}}{D_j} & \text{nếu } i = j \end{cases} \quad \text{với } i, j = 1, \ldots, n \tag{7.33}$$

Gọi A' là ma trận của Q trong cơ sở $\mathscr{B}'$. T là ma trận chuyển từ cơ sở $\mathscr{B}$ sang $\mathscr{B}'$ thì :

$$T=\begin{bmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & & \alpha_{1n}\\ & \alpha_{22} & & \alpha_{2n}\\ & & \ddots & \vdots\\ \bigcirc & & & \alpha_{nn}\end{bmatrix}\quad T^tAT=A'=\left[\eta(f_i,f_j)\right]=\begin{bmatrix}\alpha_{11} & & \bigcirc\\ & \ddots & \\ \bigcirc & & \alpha_{nn}\end{bmatrix}$$

Vậy biểu thức toạ độ của Q trong cơ sở $\mathscr{B}'$ có dạng chính tắc:

$$v=y_1f_1+\dots+y_nf_n\Rightarrow Q(v)=\frac{1}{D_1}{y_1}^2+\frac{D_1}{D_2}{y_2}^2+\dots+\frac{D_{n-1}}{D_n}{y_n}^2 .$$

<u>Ví dụ 7.11</u>: Xét dạng toàn phương trong Ví dụ 7.9

$$Q(v)={x_1}^2-2x_1x_2+2{x_2}^2+4x_1x_3+4{x_3}^2+2x_2x_3$$

Ma trận của Q trong cơ sở chính tắc $A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ -1 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 4\end{bmatrix}$

có các định thức con chính $D_1=1,\ D_2=\begin{vmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{vmatrix}=1,\ D_3=|A|=-9$.

♦) $k=1$ ta có $\alpha_{11}=\dfrac{1}{D_1}=1;$ (7.34)

♦) $k=2$: Hệ phương trình (7.31) có dạng

$$\begin{cases}x_1-x_2=0\\ -x_1+2x_2=1\end{cases}\Rightarrow \text{nghiệm } x_1=x_2=1 \qquad (7.35)$$

♦) $k=3$: Hệ phương trình (7.31) có dạng

$$\begin{cases}x_1-x_2+2x_3=0\\ -x_1+2x_2+x_3=0\\ 2x_1+x_2+4x_3=1\end{cases}\Rightarrow x_1=\frac{5}{9},\ x_2=\frac{1}{3},\ x_3=-\frac{1}{9}. \qquad (7.36)$$

Ta chọn cơ sở dạng (7.32)

(7.34) $\Rightarrow$ $f_1=e_1=(1,0,0)$

(7.35) $\Rightarrow$ $f_2 = e_1 + e_2 = (1,1,0)$

(7.36) $\Rightarrow$ $f_3 = 5/9\,e_1 + 1/3\,e_2 - 1/9\,e_3 = (5/9, 1/3, -1/9)$.

Trong cơ sở mới này biểu thức toạ độ của Q có dạng:

$$v = (x_1, x_2, x_3) = y_1 f_1 + y_2 f_2 + y_3 f_3$$

$$\Rightarrow \quad Q(v) = \frac{1}{D_1} {y_1}^2 + \frac{D_1}{D_2} {y_2}^2 + \frac{D_2}{D_3} {y_3}^2 = {y_1}^2 + {y_2}^2 - \frac{1}{9} {y_3}^2 .$$

Các ví dụ 7.9, 7.11 cho thấy rằng cùng một dạng toàn phương ta có thể đưa về các dạng chính tắc với các hệ số khác nhau. Tuy nhiên số các hệ số dương và hệ số âm là như nhau. Ta sẽ chứng minh điều này qua luật quán tính.

7.4.7 Luật quán tính

Giả sử $A = \left[a_{ij}\right]$, $A' = \left[a'_{ij}\right]$ là hai ma trận của Q trong hai cơ sở $\mathscr{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$, $\mathscr{B}' = \{e'_1, \dots, e'_n\}$ của V. Gọi $T = \left[t_{ij}\right]$ là ma trận chuyển từ cơ sở $\mathscr{B}$ sang $\mathscr{B}'$ thì $A' = T^t A T$. Theo tính chất hạng của ma trận ta có $r(A') = r(T^t A T) \le r(A)$. Mặt khác T khả nghịch nên $A = \left(T^t\right)^{-1} A' T^{-1}$ $\Rightarrow r(A) \le r(A')$. Vậy $r(A) = r(A')$. Do đó ta có thể định nghĩa hạng của dạng toàn phương Q là hạng của ma trận của nó trong một cơ sở nào đó.

Định lý 7.18 (Sylvester - Jacobi): Số các hệ số dương và số các hệ số âm trong dạng chính tắc của một dạng toàn phương Q là những bất biến của dạng đó (tức là không phụ thuộc vào việc lựa chọn cơ sở).

Chứng minh: Giả sử trong cơ sở $\mathscr{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ (không giả thiết trực chuẩn) biểu thức toạ độ của dạng toàn phương Q có dạng:

$$\forall\ v = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i,\quad Q(v) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j,\quad a_{ij} = a_{ji}.$$

Giả sử $\mathscr{B}' = \{e'_1, \dots, e'_n\}$, $\mathscr{B}'' = \{e''_1, \dots, e''_n\}$ là hai cơ sở sao cho biểu thức toạ độ của Q có dạng chính tắc: $v = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i = \sum_{i=1}^{n} y_i e'_i = \sum_{i=1}^{n} z_i e''_i$;

$$Q(v)=k_1y_1^{\ 2}+\ldots+k_py_p^{\ 2}-k_{p+1}y_{p+1}^{\ 2}-\ldots-k_ry_r^{\ 2}$$

$$=l_1z_1^{\ 2}+\ldots+l_qz_q^{\ 2}-l_{q+1}z_{q+1}^{\ 2}-\ldots-l_rz_r^{\ 2} \qquad (7.37)$$

với $r=r(A)$ là hạng của A, các hệ số $k_1,\ldots,k_r;\ l_1,\ldots,l_r>0$.

Ta chứng minh $p=q$ bằng phương pháp phản chứng.

Giả sử $p<q$ (trường hợp $q<p$ được chứng minh hoàn toàn tương tự).

Ta có $\begin{cases} y_1=b_{11}x_1+\ldots+b_{1n}x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n=b_{n1}x_1+\ldots+b_{nn}x_n \end{cases}$, $\begin{cases} z_1=c_{11}x_1+\ldots+c_{1n}x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ z_n=c_{n1}x_1+\ldots+c_{nn}x_n \end{cases}$ (7.38)

(7.37) $\Rightarrow$ $k_1y_1^{\ 2}+\ldots+k_py_p^{\ 2}+l_{q+1}z_{q+1}^{\ 2}+\ldots+l_rz_r^{\ 2}$

$$=l_1z_1^{\ 2}+\ldots+l_qz_q^{\ 2}+k_{q+1}y_{q+1}^{\ 2}+\ldots+k_ry_r^{\ 2} \qquad (7.39)$$

Ta sẽ chứng minh rằng tồn tại một véc tơ $v\in V$, $v=\sum_{i=1}^{n}x_ie_i=\sum_{i=1}^{n}y_ie'_i=\sum_{i=1}^{n}z_ie''_i\neq 0$ thoả mãn điều kiện:

$$\begin{cases} y_1=\ldots=y_p=0 \\ z_{q+1}=\ldots=z_r=z_{r+1}=\ldots=z_n=0 \end{cases} \qquad (7.40)$$

Thật vậy, các điều kiện (7.40) kết hợp với (7.38) xác định một hệ $n-q+p<n$ phương trình tuyến tính thuần nhất n ẩn $x_1,x_2,\ldots,x_n$. Vì số phương trình ít hơn số ẩn nên tồn tại nghiệm $x_1^0,\ldots,x_n^0$ không đồng thời bằng 0.

Xét véc tơ $v_0=\sum_{i=1}^{n}x_i^0e_i\neq 0$.

Mặt khác từ (7.39) và (7.40) $\Rightarrow$ $z_1=\ldots=z_q=z_{q+1}=\ldots=z_n=0$

$\Rightarrow$ $v_0=\sum_{i=1}^{n}z_ie''_i=0$, mâu thuẩn. Vậy $p=q$.

Định nghĩa 7.11: Số các hệ số dương được gọi là chỉ số quán tính dương và số các hệ số âm được gọi là chỉ số quán tính âm của dạng toàn phương.

Giả sử (p,q) là cặp chỉ số quán tính dương và âm của dạng toàn phương Q trong không gian n chiều V thì $p+q=r$ (hạng của Q).

Nếu $r=n$ thì Q được gọi là không suy biến;

$p=n$ thì Q được gọi là xác định dương;

$q=n$ thì Q được gọi là xác định âm.

Rõ ràng Q xác định dương khi và chỉ khi $Q(v)>0$, với mọi $v\neq 0$;

Q xác định âm khi và chỉ khi $Q(v)<0$, với mọi $v\neq 0$.

Nếu η là dạng cực của dạng toàn phương Q thì:

Q xác định dương khi và chỉ khi η xác định dương;

Q xác định âm khi và chỉ khi η xác định âm;

Q không suy biến khi và chỉ khi η xác định.

Dạng toàn phương Q ở Ví dụ 7.11 có chỉ số quán tính dương là 2 và âm là 1. Q không suy biến.

Định lý 7.19 (Sylvester): Giả sử dạng toàn phương Q có ma trận là A trong một cơ sở nào đó của V. Khi đó:

(i) Q xác định dương khi và chỉ khi các định thức con góc trái của A luôn dương.

(ii) Q xác định âm khi và chỉ khi các định thức con góc trái cấp chẵn là dương và cấp lẻ là âm.

Chứng minh: (i) Giả sử $A=\left[a_{ij}\right]$ là ma trận của dạng toàn phương Q trong cơ sở $\mathscr{B}=\{e_1,\ldots,e_n\}$. Xét $V_k=\operatorname{span}\{e_1,\ldots,e_k\}$ thì $Q\big|_{V_k}:V_k\to\mathbb{R}$ có ma trận trong cơ sở $\mathscr{B}_k=\{e_1,\ldots,e_k\}$ là ma trận con A_k cấp k nằm ở góc trái của ma trận A. Nếu Q xác định dương thì $Q\big|_{V_k}$ cũng xác định dương. Mặt khác theo luật quán tính ta suy ra rằng các giá trị trên đường chéo của ma trận dạng chính tắc của dạng toàn phương xác định dương là luôn luôn dương nên định thức của nó cũng dương. Vậy $\det A_k>0$, với $k=1,\ldots,n$.

Ngược lại, giả sử $D_k = \det A_k > 0$, với $k = 1,\dots,n$. Theo phương pháp Jacobi (4.3.3) tồn tại cơ sở $\mathscr{B}' = \{f_1,\dots,f_n\}$ sao cho biểu thức toạ độ của Q trong cơ sở $\mathscr{B}'$ có dạng chính tắc:

$$v = y_1 f_1 + \dots + y_n f_n \Rightarrow Q(v) = \frac{1}{D_1} {y_1}^2 + \frac{D_1}{D_2} {y_2}^2 + \dots + \frac{D_{n-1}}{D_n} {y_n}^2.$$

Vậy Q xác định dương.

Trường hợp (ii) được chứng minh tương tự.

7.5 ĐƯỜNG BẬC 2 TRONG MẶT PHẲNG VÀ MẶT BẬC 2 TRONG KHÔNG GIAN

7.5.1 Mặt phẳng với hệ toạ độ trực chuẩn

7.5.1.1 Hệ toạ độ trực chuẩn trong mặt phẳng

Trong mặt phẳng ta xét hai trục vuông góc $x'Ox$ và $y'Oy$ cắt nhau tại O theo chiều dương, tạo nên một hệ trục Oxy gọi là hệ trục toạ độ vuông góc Đề các trong mặt phẳng. Trên Ox, Oy ta chọn hai véc tơ đơn vị lần lượt là $\vec{i}$ và $\vec{j}$. Hệ $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ là một cơ sở trực chuẩn.

7.5.1.2 Toạ độ của một véc tơ, toạ độ của một điểm trong mặt phẳng

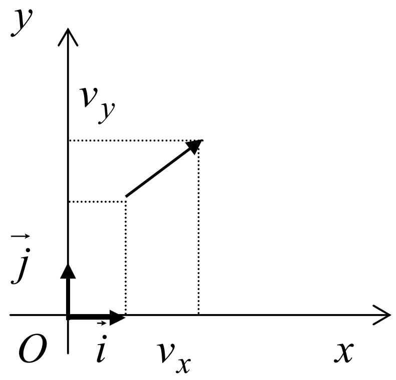
Cho véc tơ $\vec{v}$ trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy. Cặp (v_x, v_y) được gọi là toạ độ của véc tơ $\vec{v}$ nếu v_x, v_y là hình chiếu của $\vec{v}$ xuống hai trục Ox, Oy.

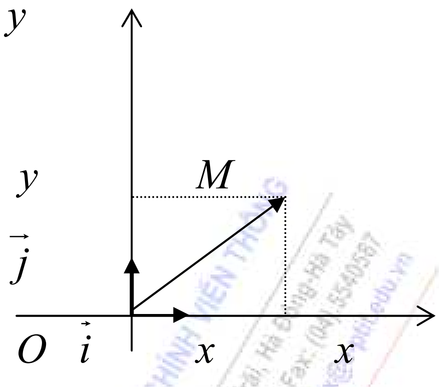
Theo các phép toán cộng véc tơ (theo quy tắc hình bình hành), nhân một số với một véc tơ và tính vô hướng của hai véc tơ $\vec{u}\vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cos(\vec{u}, \vec{v})$

thì $\quad \vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} = \langle \vec{v}, \vec{i} \rangle \vec{i} + \langle \vec{v}, \vec{j} \rangle \vec{j}$.

Nếu $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$ thì (x, y) được gọi là toạ độ của điểm M, ký hiệu $M(x, y)$. Nói cách khác toạ độ của véc tơ $\overrightarrow{OM}$ là toạ độ của điểm M. Hai điểm A, B

có toạ độ $(x_A, y_A); (x_B, y_B)$ thì véc tơ $\overrightarrow{AB}$ có toạ độ $(x_B - x_A, y_B - y_A)$.





7.5.1.3 Các đường bậc 2 trong mặt phẳng

Trong mặt phẳng, ta xét 3 đường bậc 2 sau:

a) Đường Ellipse (Êlíp)

Cho F_1, F_2 cố định. Đường ellipse nhận tiêu điểm F_1, F_2 với độ dài trục lớn a là tập hợp:

$(E)=\{M \mid MF_1+MF_2=2a\}$; $a>c$ với $F_1F_2=2c$.

Nếu $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$ thì phương trình của ellipse (E) có dạng:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \text{với} \quad a^2=b^2+c^2. \tag{7.41}$$

a là độ dài trục lớn, b là độ dài trục bé.

Khi $a=b \Rightarrow c=0$: ellipse (E) trở thành đường tròn tâm O bán kính a.

b) Hyperbol

$(H)=\{M \mid |MF_1-MF_2|=2a\}$, $a<c$.

Phương trình (H): $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ với $b^2=c^2-a^2$ (7.42)

c) Parabol:

Cho đường thẳng (Δ) và điểm F. Parabol có tiêu điểm F, đường chuẩn (Δ) là tập hợp:

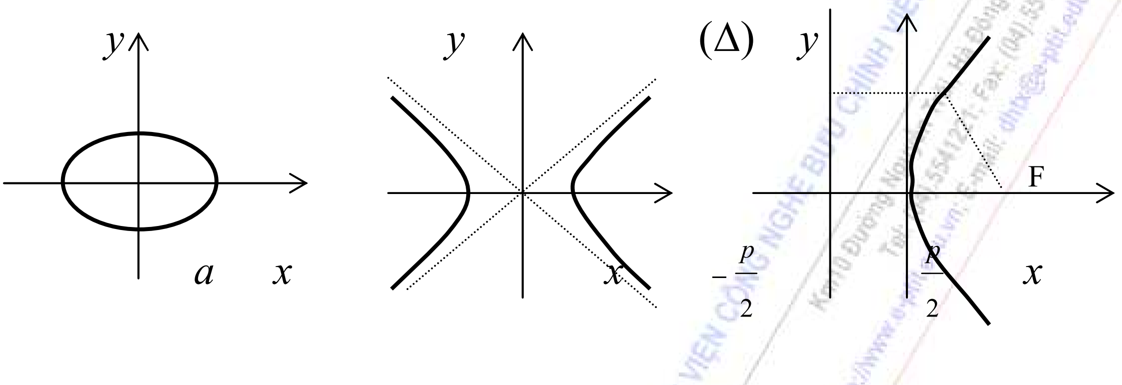
$(P)=\{M \mid MF=d(M,\Delta)\}$

trong đó $d(M,\Delta)$ là khoảng cách từ M đến đường thẳng (Δ).

Nếu $F(p/2,0)$, $(\Delta): x=-p/2$ thì (P) có phương trình:

$$y^2 = 2px \qquad (7.43)$$

(7.41), (7.42), (7.43) là phương trình chính tắc của 3 đường cônic



Ellipse Hyperbol Parabol

7.5.1.4 Phân loại đường bậc 2 trong mặt phẳng

Trong mặt phẳng cho hệ toạ độ Descartes vuông góc Oxy. Một đường cong bậc 2 có phương trình tổng quát:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0 = 0 \qquad (7.44)$$

trong đó a_{11}, a_{12}, a_{22} không đồng thời bằng không.

Ta tìm một hệ trục toạ độ Descartes vuông góc mới để trong hệ toạ độ này đường cong (7.44) có dạng chính tắc.

Đặt $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, $a_{12}=a_{21}$.

Ma trận A đối xứng nên chéo hóa trực giao được, nghĩa là tồn tại ma trận trực giao T sao cho $\det T = 1$ và $T^t AT = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$.

Theo ví dụ 7.5 và (7.16) ta có thể chọn $T=\begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$.

Đặt $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$

Như vậy hệ toạ độ mới $Ox'y'$ có được bằng cách quay hệ trục Oxy quanh gốc O một góc φ.

Phương trình đường bậc 2 (7.44) trong hệ toạ độ $Ox'y'$ là:

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + 2a'_1 x' + 2a'_2 y' + a_0 = 0 \tag{7.45}$$

(nếu $a_{12} = 0$ thì không cần bước này).

1) Nếu $\lambda_1\lambda_2 \neq 0$ phương trình (7.45) viết được thành

$$\lambda_1\left(x' + \frac{a'_1}{\lambda_1}\right)^2 + \lambda_2\left(y' + \frac{a'_2}{\lambda_2}\right)^2 + a'_0 = 0$$

Tịnh tiến hệ toạ độ $Ox'y'$ đến hệ toạ độ ΩXY:

$X = x' + \frac{a'_1}{\lambda_1}$, $Y = y' + \frac{a'_2}{\lambda_2}$, ta được:

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + a'_0 = 0 \ . \tag{7.46}$$

a) $a'_0 \neq 0$, $\lambda_1\lambda_2 > 0$, $\lambda_1 a'_0 < 0$: (7.46) là phương trình một Ellipse;

b) $a'_0 \neq 0$, $\lambda_1\lambda_2 > 0$, $\lambda_1 a'_0 > 0$: (7.46) là phương trình một Ellipse ảo;

c) $a'_0 \neq 0$, $\lambda_1\lambda_2 < 0$: (7.46) là phương trình một Hyperbol;

d) $a'_0 = 0$, $\lambda_1\lambda_2 < 0$: Phương trình (7.46) có dạng $|\lambda_1|X^2 - |\lambda_2|Y^2 = 0$ là phương trình cặp đường thẳng cắt nhau.

e) $a'_0 = 0$, $\lambda_1\lambda_2 > 0$: Phương trình (7.46) có dạng $|\lambda_1|X^2 + |\lambda_2|Y^2 = 0$ là phương trình một cặp đường thẳng ảo.

2) Có một trong hai giá trị λ_1, λ_2 bằng 0:

a) $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 \neq 0$, $a'_1 \neq 0$: Phương trình (7.44) có thể viết lại:

$$\lambda_2\left(y'+\frac{a'_2}{\lambda_2}\right)^2+2a'_1(x'+a''_0)=0 \tag{7.47}$$

đặt $X=x'+a''_0$, $Y=y'+\dfrac{a'_2}{\lambda_2}$ ta có: $Y^2=-2\dfrac{a_1}{\lambda_2}X$.

Vậy (7.47) là một Parabol nhận trục ΩX làm trục đối xứng.

b) $\lambda_2=0$, $\lambda_1\neq 0$, $a'_2\neq 0$: Đường cong (7. 44) là một Parabol nhận trục ΩY làm trục đối xứng.

c) $\lambda_1=0$, $\lambda_2\neq 0$, $a'_1=0$ hay $\lambda_1\neq 0$, $\lambda_2=0$, $a'_2=0$: Đường cong (7.44) là một cặp đường thẳng thực hoặc ảo.

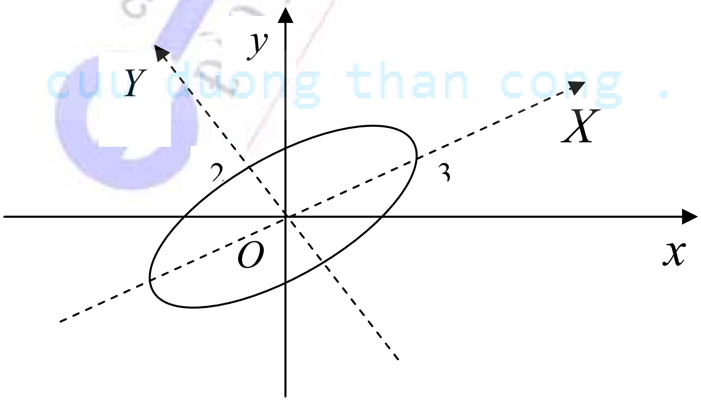
<u>Ví dụ 7.12</u>: Cho đường bậc 2 có phương trình (G): $5x^2-4xy+8y^2=36$.

Ma trận $A=\begin{bmatrix}5 & -2\\ -2 & 8\end{bmatrix}$ có giá trị riêng $\lambda_1=4, \lambda_2=9$ chéo hoá trực giao ta được:

$$\begin{cases}\vec{i}'=\dfrac{2}{\sqrt{5}}\vec{i}+\dfrac{1}{\sqrt{5}}\vec{j}\\[2mm] \vec{j}'=-\dfrac{1}{\sqrt{5}}\vec{i}+\dfrac{2}{\sqrt{5}}\vec{j}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=\dfrac{2}{\sqrt{5}}X+\dfrac{1}{\sqrt{5}}Y\\[2mm] y=-\dfrac{1}{\sqrt{5}}X+\dfrac{2}{\sqrt{5}}Y\end{cases}$$

phương trình của (G) trong hệ toạ độ mới:

$$4X^2+9Y^2=36 \quad\Rightarrow\quad \frac{X^2}{9}+\frac{Y^2}{4}=1.$$



7.5.2 Hệ toạ độ trực chuẩn trong không gian

7.5.2.1 Toạ độ của một véc tơ và toạ độ của một điểm trong không gian

Trong không gian ta xét ba trục vuông góc chung gốc O: $x'Ox$, $y'Oy$, $z'Oz$; Tạo thành một hệ trục gọi là hệ trục toạ độ vuông góc Descartes trong không gian, viết tắt $Oxyz$. Trên ba trục toạ độ này ta chọn các véc tơ đơn vị lần lượt là $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$. Ta chỉ xét hệ trục $Oxyz$ là hệ thuận, nghĩa là nếu đứng theo chiều véc tơ $\vec{k}$ ta sẽ thấy $\vec{i}$ quay sang $\vec{j}$ theo ngược chiều kim đồng hồ. Với mọi véc tơ $\vec{v}$ ta có thể viết

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k} = \left\langle \vec{v}, \vec{i} \right\rangle \vec{i} + \left\langle \vec{v}, \vec{j} \right\rangle \vec{j} + \left\langle \vec{v}, \vec{k} \right\rangle \vec{k}$$

trong đó v_x, v_y, v_z lần lượt là hình chiếu của $\vec{v}$ xuống các trục Ox, Oy, Oz.

(v_x, v_y, v_z) được gọi là toạ độ của véc tơ $\vec{v}$, ký hiệu $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$. Toạ độ của véc tơ $\overrightarrow{OM} = (x, y, z)$ được gọi là toạ độ của điểm M, ký hiệu $M(x, y, z)$.

7.5.2.2 Một số mặt bậc 2 thường gặp trong không gian

a) Ellipsoid (Êlípxôít) là mặt (E) bậc 2 có phương trình $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$.

*) Nếu 2 trong 3 số a, b, c bằng nhau thì ta có mặt ellipsoid tròn xoay. Chẳng hạn nếu $a = b$ thì ta có mặt tròn xoay quanh trục $z'Oz$. Nếu $a = b = c = R$ thì ta có mặt cầu tâm O bán kính R;

*) Gốc O là tâm đối xứng, các mặt phẳng toạ độ là mặt phẳng đối xứng;

*) Giao tuyến với các mặt phẳng song song với các mặt phẳng toạ độ là các ellipse.

b) Hyperboloid một tầng (Hyperbôlôít) có phương trình (H_1): $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$.

*) Gốc O là tâm đối xứng;

*) Các trục toạ độ là trục đối xứng;

*) Các mặt phẳng tọa độ là mặt phẳng đối xứng;

*) Giao của (H_1) với mặt phẳng vuông góc với trục $z'Oz$ là một ellipse;

*) Giao của (H_1) với mặt phẳng chứa trục $z'Oz$ là một Hyperbol.

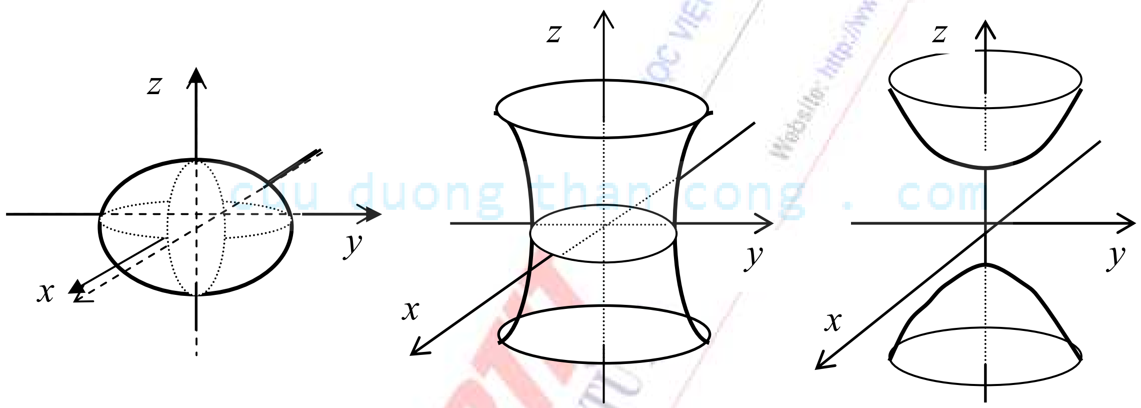
Tương tự có các Hyperboloid một tầng:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\ , \qquad -\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\,.$$

c) Hyperboloid hai tầng có phương trình $(H_2):\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=-1$.

*) Mặt phẳng vuông góc với trục $z'Oz$ có phương trình $z=h$ sao cho $|h|>c$ cắt (H_2) theo một elippse;

*) Giao của (H_2) với mặt phẳng chứa $z'Oz$ là một Hyperbol.



Ellisoid Hyperboloid một tầng Hyperboloid hai tầng

d) Paraboloid elliptic (Parabôlôit êlíptíc) $(P_1):\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=2z$.

*) Giao tuyến của (P_1) với mặt phẳng vuông góc trục $z'Oz$ nằm phía trên mặt phẳng Oxy là một ellipse;

*) Giao tuyến của (P_1) với mặt phẳng chứa trục $z'Oz$ là Parabol.

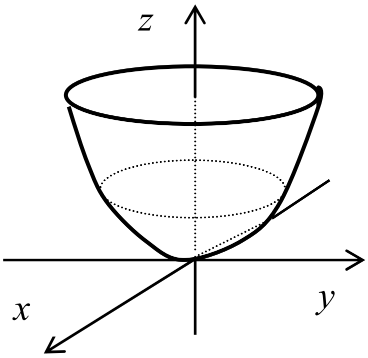
e) Paraboloid hyperbolic (mặt yên ngựa) có phương trình

$$(P_2):\ \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z\ .$$

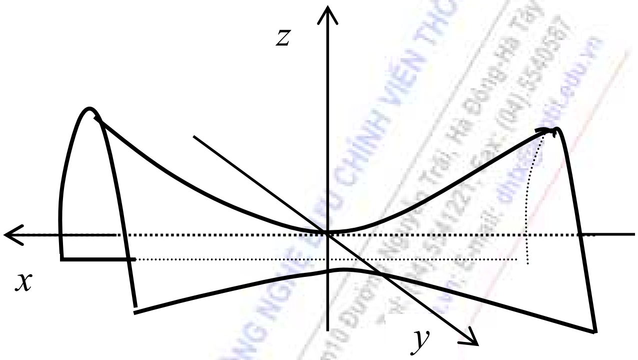
*) Giao của (P_2) với mặt phẳng vuông góc với trục $z'Oz$ là một Hyperbol;

*) Giao của (P_2) với mặt phẳng vuông góc với trục $x'Ox$ là một Parabol;

*) Giao của (P_2) với mặt phẳng vuông góc với trục $y'Oy$ là một Parabol.



Paraboloid elliptic



Paraboloid hyperbolic

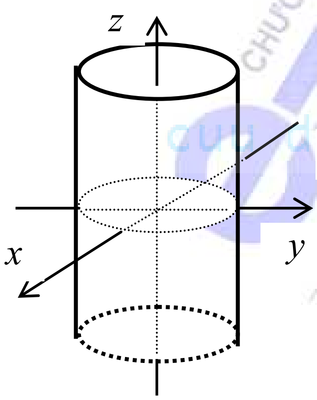
g) Các mặt trụ bậc 2

Các mặt trụ bậc 2 đối xứng qua mặt phẳng xOy

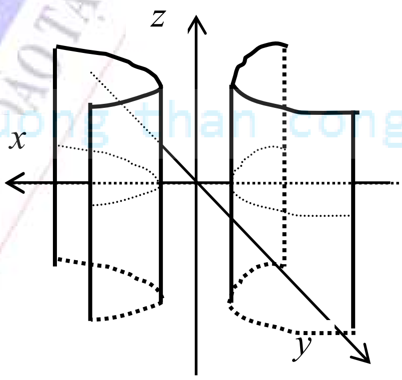
*) Trụ elliptic: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

*) Trụ Hyperbolic: $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

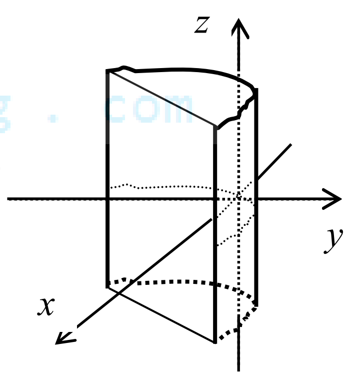
*) Trụ Parabolic: $x^2=2py$.



Trụ elliptic



Trụ Hyperbolic



Trụ Parabolic

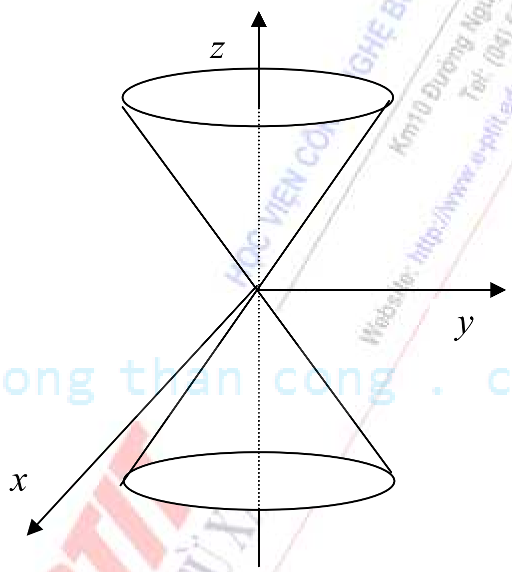
h) Các mặt nón

Các mặt nón đối xứng qua mặt phẳng xOy có phương trình

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0.$$

*) Giao với mặt phẳng vuông góc với trục $z'Oz$ là một ellipse;

*) Giao với mặt phẳng chứa trục $z'Oz$ cặp đường thẳng.



7.5.3 Phân loại các mặt bậc 2

Trong hệ toạ độ Descartes vuông góc $Oxyz$ xét mặt (Q) bậc 2 có phương trình:

$$\begin{aligned}a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz\\+2b_1x+2b_2y+2b_3z+c=0.\end{aligned} \quad (7.48)$$

Ma trận $A=\left[a_{ij}\right]_{i,j=\overline{1,3}}$ với $a_{ij}=a_{ji}$ là ma trận đối xứng nên tồn tại ma trận trực giao T sao cho $\det T=1$ (để hệ trục toạ độ mới tạo thành tam diện thuận) và $T^tAT=\begin{bmatrix}\lambda_1&0&0\\0&\lambda_2&0\\0&0&\lambda_3\end{bmatrix}$. Tương ứng với ma trận chuyển cơ sở T là phép quay quanh gốc toạ độ.

Công thức đổi toạ độ $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$.

Mặt bậc 2 (Q) có phương trình trong tọa độ mới:

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2 + 2b'_1 x' + 2b'_2 y' + 2b'_3 z' + c = 0 \qquad (7.49)$$

Tùy theo các giá trị của λ_1, λ_2, λ_3, b'_1, b'_2, b'_3, c mặt (Q) có các dạng sau:

a) Các giá trị riêng $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ khác 0 ($\lambda_1\lambda_2\lambda_3 \neq 0$)

Bằng cách tịnh tiến hệ toạ độ ta có thể đưa phương trình (7.49) về dạng:

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + \lambda_3 Z^2 = C'. \qquad (7.50)$$

*) Nếu $C' \neq 0$

- $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, C'$ cùng dấu: (Q) là Ellipsoid;
- $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ cùng dấu, C' trái dấu: (Q) là Ellipsoid ảo;
- $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ chỉ có hai số cùng dấu: (Q) là Hyperboloid một tầng hoặc hai tầng.

*) Nếu $C' = 0$

- $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ chỉ có hai số cùng dấu: (Q) là nón bậc 2.
- $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ cùng dấu: (Q) là nón ảo (một điểm).

Các trường hợp còn lại sau đây ta chỉ xét mỗi trường hợp một loại đại diện, các loại khác có kết quả tương tự.

b) Có đúng một giá trị trong ba giá trị $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ bằng 0.

Chẳng hạn $\lambda_3 = 0$, $\lambda_1\lambda_2 \neq 0$

*) $b'_3 \neq 0$: Tịnh tiến hệ toạ độ ta được: $\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + 2b'_3 Z = 0$.

Đây là phương trình Paraboloid elliptic nếu $\lambda_1\lambda_2 > 0$ và Paraboloid hyperbolic nếu $\lambda_1\lambda_2 < 0$.

*) $b'_3 = 0$: Tịnh tiến toạ độ ta được: $\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 = C'$.

Đây là phương trình các mặt trụ nếu $C' \neq 0$ và các cặp mặt phẳng cắt nhau nếu $C' = 0$.

c) Có đúng hai giá trị trong ba giá trị $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ bằng 0.

Chẳng hạn $\lambda_3 = 0$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_1 \neq 0$

*) b'_2, b'_3 không đồng thời bằng 0. Giả sử $b'_2 \neq 0$: Tịnh tiến toạ độ ta được $\lambda_1 X^2 + b''_2 Y = 0$: (Q) là mặt trụ Parabolic.

*) $b'_2 = b'_3 = 0$: Tịnh tiến hệ toạ độ ta có: $\lambda_1 X^2 = C'$. Do đó (7.49) là phương trình cặp mặt phẳng song song nếu $C' \neq 0$ và trùng nhau nếu $C' = 0$.

Ví dụ 7.13: Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$ cho mặt bậc 2 có phương trình

$$(Q): 7x^2 + 7y^2 + 10z^2 + 2xy + 4xz + 4yz - 12x + 12y + 72z = 24$$

Ma trận của dạng toàn phương tương ứng $A = \begin{bmatrix} 7 & 1 & 2 \\ 1 & 7 & 2 \\ 2 & 2 & 10 \end{bmatrix}$.

Đa thức đặc trưng $|A - \lambda I| = (6-\lambda)^2(12-\lambda)$.

Tìm cơ sở của các không gian riêng và trực chuẩn hoá Gram-Shmidt ta có ma trận trực giao

$$T = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & 1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{6} \end{bmatrix} \text{ có } \det T = 1 \text{ và } T^t A T = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{bmatrix}$$

Đổi toạ độ $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$ thì phương trình của mặt (Q) trong toạ độ mới:

$$6x'^2 + 6y'^2 + 12z'^2 - 12\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}x' - \frac{1}{\sqrt{3}}y' + \frac{1}{\sqrt{6}}z'\right)$$
$$+12\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x' - \frac{1}{\sqrt{3}}y' - \frac{1}{\sqrt{6}}z'\right) + 72\left(\frac{1}{\sqrt{3}}y' + \frac{2}{\sqrt{6}}z'\right) = 24$$

$$\Rightarrow \quad 6\left(x'^2 + 2\sqrt{2}x'\right) + 6\left(y'^2 + 4\sqrt{3}y'\right) + 12\left(z'^2 + 2\sqrt{6}\right) = 24$$

Tịnh tiến toạ độ: $X = x'+\sqrt{2}$, $Y = y'+2\sqrt{3}$, $Z = z'+\sqrt{6}$,

suy ra (Q): $\dfrac{X^2}{30}+\dfrac{Y^2}{30}+\dfrac{Z^2}{15}=1$.

Vậy (Q) là một Ellipsoid tròn xoay theo trục $Z'\Omega Z$, Ω có toạ độ $\left(-\sqrt{2},-2\sqrt{3},-\sqrt{6}\right)$.

Ví dụ 7.14: Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$ cho mặt bậc 2 có phương trình

$(Q): 2xy+2xz+2yz-6x-6y+6z=0$.

Ma trận của dạng toàn phương tương ứng $A=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{bmatrix}$.

Đa thức đặc trưng $|A-\lambda I|=(\lambda+1)^2(2-\lambda)$.

Tìm cơ sở của các không gian riêng và trực chuẩn hoá Gram-Shmidt ta có ma trận trực giao

$$T=\begin{bmatrix}-1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3}\\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3}\\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3}\end{bmatrix} \text{ có } \det T=1 \text{ và } T^tAT=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$$

Đổi toạ độ $\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=T\begin{bmatrix}x'\\y'\\z'\end{bmatrix}$ thì phương trình của mặt (Q) trong toạ độ mới:

$$-x'^2-y'^2+2z'^2-6\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}x'-\frac{1}{\sqrt{6}}y'+\frac{1}{\sqrt{3}}z'\right)$$
$$-6\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x'-\frac{1}{\sqrt{6}}y'+\frac{1}{\sqrt{3}}z'\right)+6\left(\frac{2}{\sqrt{6}}y'+\frac{1}{\sqrt{3}}z'\right)=0.$$

$$\Rightarrow\quad -x'^2-\left(y'^2-4\sqrt{6}y'\right)+2\left(z'^2-\sqrt{3}z'\right)=0$$

Tịnh tiến toạ độ: $X=x'$, $Y=y'-2\sqrt{6}$, $Z=z'-\sqrt{3}/2$,

suy ra (Q): $\dfrac{2X^2}{45}+\dfrac{2Y^2}{45}-\dfrac{4Z^2}{45}=1$.

Vậy (Q) là một Hyperboloid một tầng.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. G. M. FICHTENGÔN, Giáo trình phép tính vi tích phân, Tập 1,2,3. Nauka, Moskva, 1969. (tiếng Nga)

2. G. M. FICHTENGÔN, Cơ sở giải tích toán học, Tập 1,2,3. NXB Đại học và Trung học chuyên nghiệp, Hà nội, 1977.

3. K. MAURIN, Analiza, Czes'c'1. PWN, Warszawa, 1976.

4. R. A. ADAMS, Calculus-a complete, Addison,Wesley, New York,Don Mills, 1991.

5. NGUYỄN ĐÌNH TRÍ (chủ biên), Toán học cao cấp ,Tập 1,2,3. NXB Đại học và Giáo dục chuyên nghiệp, Hà nội, 1990.

6. JEAN-MARIE MONIER, Giáo trình toán, Tập 1,2,3,4. NXB Giáo dục, Hà nội, 1999 (dịch từ tiếng Pháp, DUNOD, Paris,1999)

MỤC LỤC