HỌC VIỆN CÔNG NGHỆ BƯU CHÍNH VIỄN THÔNG

TOÁN KINH TẾ

(Dùng cho sinh viên hệ đào tạo đại học từ xa)

Lưu hành nội bộ

HÀ NỘI - 2007

TOÁN KINH TẾ

Biên soạn : PGS.TS. NGUYỄN QUẢNG

TS. NGUYỄN THƯỢNG THÁI

LỜI NÓI ĐẦU

Nhằm đáp ứng nhu cầu giảng dạy và học tập môn học *Toán kinh tế dành* cho sinh viên hệ đào tạo đại học từ xa, Học viện Công nghệ Bưu chính Viễn thông (Học viện) tổ chức biên soạn tập Sách hướng dẫn học tập (*Sách HDHT*) môn học *Toán kinh tế* theo đúng chương trình đào tạo Cử nhân ngành Quản trị kinh doanh của Học viện.

Tập sách được biên soạn trên cơ sở kế thừa, chọn lọc bổ sung tập giáo trình *Toán chuyên ngành* đã được Nhà xuất bản Bưu điện ấn hành vào tháng 9 năm 2003 và các bài giảng *Toán kinh tế* đã được sử dụng, giảng dạy cho chương trình đào tạo đại học chính quy ngành Quản trị Kinh doanh tại Học viện.

Nội dung tập sách được cấu trúc gồm 7 chương:

Chương 1. Các kiến thức mở đầu về phương pháp tối ưu

Chương 2. Mô hình tối ưu tuyến tính

Chương 3. Một số mô hình tối ưu tuyến tính khác

Chương 4. Các bài toán tối ưu trên mạng.

Chương 5. Phương pháp mô hình hoá và mô hình toán kinh tế.

Chương 6. Lý thuyết Phục vụ đám đông

Chương 7. Lý thuyết quản lý dự trữ.

Để tạo điều kiện thuận lợi cho sinh viên có khả năng tự học, tự nghiên cứu, các tác giả không đi sâu vào các vấn đề lý luận và kỹ thuật toán học phức tạp, mà chỉ tập trung trình bày, giới thiệu những kiến thức cơ bản chủ yếu thiết thực và cập nhật, làm cơ sở cho việc học tập nghiên cứu phân tích kinh tế nói chung và học tập các môn chuyên ngành Quản trị kinh doanh. Ở cuối mỗi chương, sau phần khái quát và tóm tắt các vấn đề cơ bản, chủ yếu của lý thuyết, các tác giả đưa ra các bài tập mẫu và phân tích cách giải để người học có thể tự giải được những bài toán liên quan đến lý luận đã học. Phần bài tập cuối mỗi chương cũng sẽ giúp người học tự nghiên cứu, vận dụng các lý luận đã học vào phân tích, lý giải các nội dung thực tiễn liên quan.

Mặc dù các tác giả đã đầu tư nghiên cứu chọn lọc biên soạn nghiêm túc để đáp ứng yêu cầu giảng dạy và học tập của môn học, nhưng chắc tập sách sẽ không tránh khỏi những thiếu sót nhất định. Các tác giả rất mong nhận được sự góp ý của bạn bè đồng nghiệp, bạn đọc và các bạn sinh viên để lần xuất bản sau được hoàn thiện hơn.

CÁC TÁC GIẢ

HỌC VIỆN CÔNG NGHỆ BƯU CHÍNH VIỄN THÔNG
Km10 Đường Nguyễn Trãi, Hà Đông-Hà Tây
Tel: (04).5541221; Fax: (04).5540587
Website: http://www.e-ptit.edu.vn; E-mail: dhtx@e-ptit.edu.vn

CHƯƠNG TRÌNH ĐÀO TẠO ĐẠI HỌC TỪ XA

CHƯƠNG I: MỘT SỐ KIẾN THỨC MỞ ĐẦU

1.1. ĐỐI TƯỢNG NGHIÊN CỨU CỦA MÔN HỌC

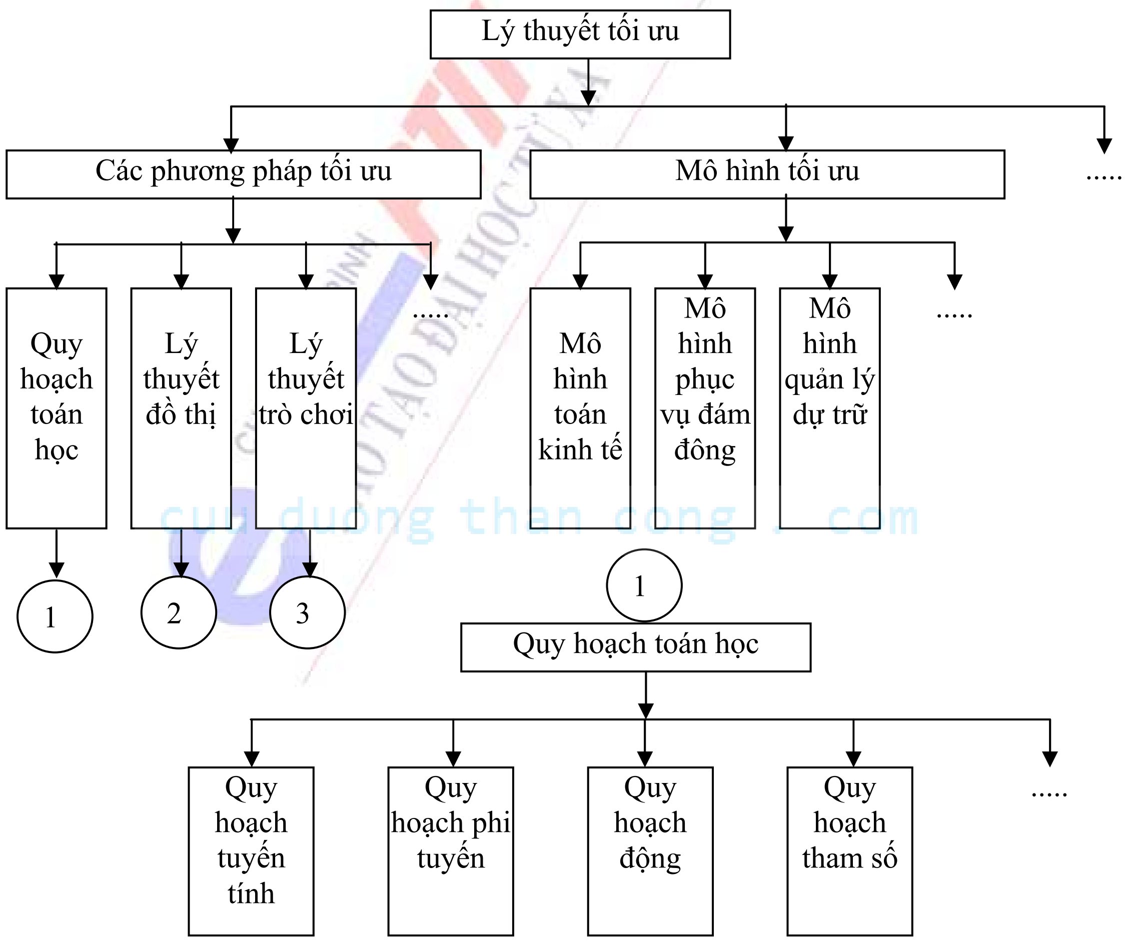
1.1.1. Tổng quan về tối ưu hoá.

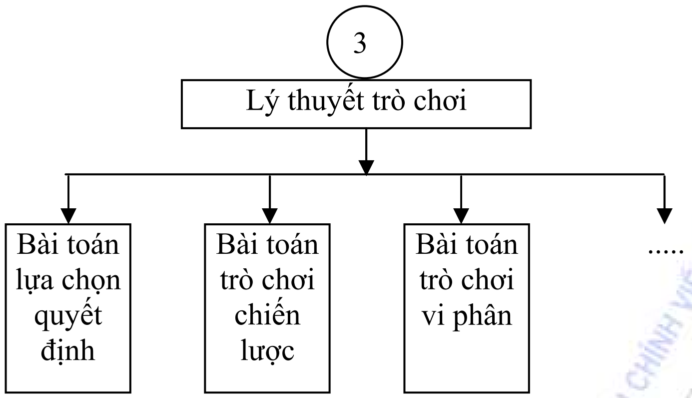
Trong hoạt động thực tiễn, nhất là trong quá trình quản lý, điều khiển hệ thống kinh tế - xã hội, chúng ta luôn mong muốn đạt được kết quả tốt nhất theo các tiêu chuẩn nào đó. Tất cả những mong muốn đó thường là lời giải của những bài toán tối ưu nào đó. Mỗi vấn đề khác nhau của thực tế dẫn đến các bài toán tối ưu khác nhau. Để giải các bài toán đó, một loạt các lý thuyết toán học ra đời để đặt cơ sở lý luận, đề đưa ra các giải pháp tìm lời giải, chứng minh tính hội tụ, tính khả thi của các bài toán thực tế v.v. Từ đó hình thành một lớp các phương pháp toán học giúp ta tìm ra lời giải tốt nhất cho các bài toán thực tế, gọi là các phương pháp tối ưu hóa. Lớp các phương pháp tối ưu hóa bao gồm nhiều lý thuyết toán học khác nhau, tiêu biểu là: Qui hoạch toán học, lý thuyết trò chơi, lý thuyết đồ thị v.v.

Trong qui hoạch toán học, tiêu biểu là Qui hoạch tuyến tính, Qui hoạch phi tuyến, Qui hoạch động, Quy hoạch tham số, Qui hoạch nguyên v.v.

Trong lý thuyết trò chơi, tiêu biểu là Lý thuyết lựa chọn quyết định, Bài toán trò chơi chiến lược, bài toán trò chơi vi phân v.v. Trong Lý thuyết đồ thị có các bài toán tối ưu trên mạng, bài toán PERT, Các bài toán đường đi v.v.

Các lớp phương pháp toán học thuộc Lý thuyết tối ưu có thể biểu diễn bởi sơ đồ sau:





1.1.2. Bài toán tối ưu tổng quát.

Bài toán quy hoạch toán học tổng quát được phát biểu như sau:

Cực đại hóa (*cực tiểu hóa*) hàm $f(x) \to \max (\min)$ (1.1)

Với các điều kiện: $g_i(x) \leq (=, \geq)\ b_i \ \ (i = \overline{1,m})$ (1.2)

$$x \in X. \subset IR^n\ . \qquad (1.3)$$

Hàm $f(x)$ cho ở (1 -1) gọi là hàm mục tiêu.

Các hàm $g_i(x)$ $(i = \overline{1,m})$ gọi là hàm ràng buộc.

Tập hợp $D = \{x \in X \mid g_i(x) \leq (=, \geq)\ b_i,\ i = \overline{1,m}\}$ (1.4)

Gọi là miền ràng buộc chấp nhận được.

- Mỗi một bất đẳng thức, đẳng thức trong (1.2) gọi là một ràng buộc của bài toán (1.1) - (1.2) - (1.3)

- Điểm $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in D$ gọi là một phương án của bài toán (1.1) - (1.2) - (1.3) hay là một giải pháp chấp nhận được.

- Một phương án $x^* \in D$ làm cực đại (*cực tiểu*) hàm mục tiêu gọi là phương án tối ưu (*hay lời giải hoặc phương án tốt nhất*).

Theo định nghĩa trên thì $x^* \in D$ là phương án tối ưu khi và chỉ khi

$f(x^*) \geq f(x), \forall x \in D$, (*đối với bài toán max*) hay

$f(x^*) \leq f(x), \forall x \in D$, (*đối với bài toán min*).

Giá trị $f(x^*)$ gọi là giá trị tối ưu (*tốt nhất*) của hàm mục tiêu, hay là giá trị tối ưu của bài toán (1.1) - (1.2) - (1.3).

1.1.3. Phân loại các bài toán tối ưu.

a - Nếu hàm mục tiêu $f(x)$ và các ràng buộc $g_i(x)$ là hàm tuyến tính (*bậc 1*) thì bài toán (1.1) - (1.2) - (1.3) gọi là một Qui hoạch tuyến tính . (*trường hợp riêng là bài toán vận tải*).

b - Nếu biểu thức hàm mục tiêu $f(x)$ và các ràng buộc $g_i(x)$ $(i = \overline{1,m})$ là hàm phụ thuộc tham số, thì bài toán (1.1) ÷ (1.3) gọi là qui hoạch tham số.

c - Nếu bài toán (1.1) ÷ (1.3) được xét trong quá trình nhiều giai đoạn hoặc trong quá trình thay đổi theo thời gian thì gọi là Qui hoạch động.

d - Nếu bài toán (1.1) ÷ (1.3) mà hàm mục tiêu f(x) hoặc có ít nhất một trong các hàm g_i (x), (i =$\overline{1,m}$) là phi tuyến thì gọi là Qui hoạch phi tuyến, trường hợp riêng là Qui hoạch lồi hoặc Qui hoạch lõm.

Qui hoạch lồi (*lõm*) là Qui hoạch toán học mà hàm mục tiêu f(x) là lồi (*lõm*) trên tập hợp các ràng buộc D lồi (*lõm*).

e - Nếu bài toán (1.1) ÷ (1.3) mà miền ràng buộc D là tập rời rạc thì gọi là Qui hoạch rời rạc.

g - Nếu bài toán(1.1) ÷ (1.3) có các biến $x_i \in IR^1$ là thành phần i trong véc tơ $x \in X \subset IR^n$, chỉ nhận các giá trị nguyên, thì gọi là Qui hoạch nguyên.

h - Nếu bài toán (1.1) ÷ (1.3) mà các biến $x_i \in IR^1$ chỉ nhận các giá trị O hoặc 1, gọi là Qui hoạch Bul (x_i là thành phần i của véc tơ x).

i - Nếu bài toán (1.1) ÷ (1.3) mà trên miền D ta xét đồng thời nhiều mục tiêu khác nhau, gọi là Qui hoạch đa mục tiêu v.v.

1.1.4. Nội dung nghiên cứu của môn học.

a. Quy hoạch tuyến tính.

b. Bài toán vận tải.

c. Bài toán tối ưu trên mạng.

d. Mô hình kinh tế và mô hình toán kinh tế.

e. Mô hình phục vụ đám đông.

g. Mô hình quản lý dự trữ.

1.2. CƠ SỞ GIẢI TÍCH LỒI.

1.2.1. Không gian tuyến tính n chiều (R^n).

a. Véc tơ n chiều.

Một hệ thống được sắp , gồm n số thực, dạng x = (x_1 x_2, ..., x_n), gọi là một véc tơ n chiều.

Thí dụ**:** x = (4, 0, 5, 10, 15) là một véc tơ 5 chiều.

Các số x_i, i = $\overline{1,n}$, gọi là thành phần thứ i của véc tơ x.

Hai véc tơ x =(x_1, x_2, ..., x_n) và (y_1, y_2, ..., y_n) gọi là bằng nhau, nếu $x_i = y_i$, (i =$\overline{1,n}$). Khi đó ta viết x ≡ y.

Vậy $x \equiv y \Leftrightarrow x_i = y_i$, (i = $\overline{1,n}$).

Cho hai véc tơ x = (x_1, x_2, ..., x_n)

y = (y_1, y_2, ..., y_n) và $\alpha \in R^1$.

Ta định nghĩa phép cộng hai véc tơ x và y là véc tơ x+y, được xác định như sau:

$$x+y= (x_1+ y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n) \qquad (1.5)$$

Phép nhân véc tơ x với một số $\alpha \in R^1$ là véc tơ αx, được xác định như sau:

$$\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, ..., \alpha x_n) \qquad (1.6)$$

- Véc tơ θ = (0, 0, ..., 0) gồm các thành phần toàn là số 0, gọi là véc tơ không.

* Các tính chất của phép cộng véctơ và nhân véctơ với một số.

- Nếu x và y là hai véctơ n chiều thì x+y cũng là véc tơ n chiều.
- Với mọi véc tơ n chiều x và y ta đều có: x+y =y+x.
- Với mọi véc tơ n chiều x, y và z ta đều có: x + (y+z) = (x+y) +z.
- Luôn tồn tại véctơ θ n chiều sao cho θ+x = x+θ =x.
- Mỗi véctơ n chiều x luôn tồn tại véc tơ n chiều -x sao cho: x+ (-x)=(-x) +x =θ
- $\forall$ $k \in R$ và với mọi véc tơ n chiều x thì kx cũng là véc tơ n chiều.
- $\forall$ $k \in R$ và với mọi véc tơ n chiều x và y ta có: k (x+y) = kx+ky.
- $\forall$ $l, k \in R$ và với mọi véc tơ n chiều x ta luôn có: (k +l) x = kx +lx.
- $\forall$ $l, k \in R$ và với mọi véc tơ n chiều x ta luôn có: k(lx) = (kl) x.
- Mọi véc tơ n chiều ta luôn có: 1.x = x.

b. Không gian tuyến tính n chiều Rn.

Tập hợp tất cả các véc tơ n chiều, trong đó xác lập phép toán cộng Véc tơ và nhân véc tơ với một số thực như (1.5) và (1.6) và thoả mãn 10 tính chất nêu trên, gọi là một không gian tuyến tính n chiều. Ký hiệu IR^n.

1.2.2. Một số tính chất đối với véc tơ trong R^n.

a. Định nghĩa.

Các véc tơ $x^i \in R^n$, $i = \overline{1,m}$, gọi là độc lập tuyến tính nếu

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i x^i = \theta \Leftrightarrow \alpha_i = 0, \forall i = \overline{1,m}.$$

- Nếu tồn tại ít nhất một số $\alpha_j \neq 0$, $1 \leq j \leq m$, sao cho $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i x^i = \theta$, thì ta nói rằng các véc tơ $x \in R^n$, $i = \overline{1,m}$, là phụ thuộc tuyến tính.

- Nếu tồn tại véc tơ $x^i \in R^n$, sao cho: $x = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i x^i$, với ít nhất một $\alpha_i \neq 0$, $1 \leq i \leq m$, thì x gọi là tổ hợp tuyến tính của các véc tơ x^i, $(i = \overline{1,m})$.

- Nếu $x = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i x^i$ với $\alpha_i \geq 0$, $i = \overline{1,m}$, và $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1$ thì x gọi là tổ hợp lồi của các véc tơ x^i, $i = \overline{1,m}$.

- Trong không gian véc tơ R^n, hệ n Véc tơ độc lập tuyến tính lập thành cơ sở của IR^n.

Giả sử $C^1, C^2, ..., C^n$ là một cơ sở của R^n, khi đó $\forall x \in R^n$ đều có thể biểu diễn tuyến tính một cách duy nhất qua các Véc tơ cơ sở. C^i, $(i = \overline{1,n})$.

b. Cho hai véc tơ bất kỳ x, y∈ R^n, x = (x_1, x_2, ... x_n) và y = (y_1, y_2, ..., y_n) , ta gọi tích vô hướng của hai véc tơ x và y là một số thực, ký hiệu là <x, y>, được xác định như sau:

$$<x, y> = \sum_{i=1}^{m} x_i y_i .$$

- Độ dài của Véc tơ x ∈ R^n là số thực, ký hiệu $\|x\|$, được xác định như sau

$$\|x\| = \sqrt{<x, x>} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

- *Chú ý:* Tích vô hướng hai véc tơ có các tính chất sau:

b_1, $<x, y> = <y, x>$. (*Tính giao hoán*) ∀ x, y ∈ R^n .

b_2, $<x^1+x^2, y> = <x^1, y> + <x^2, y>$, ∀ x^1, x^2, y ∈ R^n .

(Tính phân phối đối với phép cộng).

b_3, $<\lambda x, y> = \lambda <x, y>$, ∀λ ∈ R^1, ∀ x, y ∈ R^n.

b_4> $<x, x> \geq 0$ ∀x ∈ R^n, dấu bằng xảy ra khi x = θ .

Với mỗi ∀x, y ∈ R^n, ta định nghĩa khoảng cách giữa hai véc tơ x, y, ký hiệu ρ (x, y) là số thực, được xác định như sau:

$$\rho(x, y) = \| x - y \| = \sqrt{<x-y, x-y>} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2} .$$

Chú ý: Khoảng cách giữa hai véc tơ x, y ∈ R^n, chính là độ dài của véc tơ hiệu x+ (-1)y: = x - y. (*Hiệu của hai Véc tơ*).

1.2.3. Không gian Ơclít.

Một không gian tuyến tính n chiều, trong đó xác định phép toán tích vô hướng, do đó xác định một khoảng cách giữa hai véc tơ, gọi là không gian Ơclít, ký hiệu IR^n.

1.2.4. Tập Compact.

a. Các định nghĩa.

Dãy $\{x^k\} \subset |R^n$, gọi là hội tụ đến điểm $x^o \in IR^n$ khi k→∞, nếu $\lim_{k\to\infty} \rho(x^k, x^o) = 0$. Khi đó ta nói $\{x^k\}$ có giới hạn là x^o khi $k \to \infty$, và viết: $\lim_{k\to\infty} x^k = x^o$.

- Một tập hợp S = {x∈IR^n: ρ(x, a) ≤ r, a∈ IR^n, r ∈ IR^1}, gọi là một hình cầu tâm a, bán kính r trong IR^n.

- Hình cầu S nói trên, tạo thành một lân cận của điểm a, gọi là r -lân cận của a.

- Cho tập hợp A ⊂ IR^n, điểm x∈ A được gọi là điểm trong của A nếu ∃ε- lân cận của x nằm trọn trong A.

- Điểm x ∈ A ⊂ IR^n, được gọi là điểm biên của A, nếu mọi lân cận của x đều có chứa các điểm thuộc A và các điểm không thuộc A.

- Cho tập hợp A ⊂ IR^n, ta nói tập hợp A là giới nội nếu ∃ hình cầu chứa trọn nó, nghĩa là ∃ số thực r đủ lớn và điểm a∈ IR^n sao cho ∀x∈ A ta đều có ρ(x, a) < r.

* **Nhận xét**. Từ định nghĩa của dãy hội tụ và tập giới nội, ta suy ra, một dãy $\{x^k\} \subset IR^n$, hội tụ bao giờ cũng giới nội.

- Một tập hợp $G \subset IR^n$ được gọi là mở, nếu $\forall x \in G$, tồn tại một hình cầu tâm x chứa trọn trong G.

- Một tập hợp $F \subset IR^n$ được gọi là đóng, nếu như mọi dãy hội tụ $\{x^k\} \subset F \subset IR^n$, đều hội tụ đến một điểm $x^o \in F$.

* **Nhận xét**. Một tập hợp chứa mọi điểm biên của nó là một tập hợp đóng.

b. Tập Compact.

- Tập hợp $C \subset IR^n$ được gọi là tập hợp Compắct nếu từ mọi dãy vô hạn $\{x^k\} \subset C$, đều có thể trích ra một dãy con $\{x^kn\}$ hội tụ đến một phần tử thuộc C.

- Một tập C là Compact khi và chỉ khi C đóng và giới nội.
- Tập Compact M của tập đóng C cũng đóng trong C.
- Tập con M đóng $\subset$ C Compact cũng là tập Compact.
- Hàm f(x) liên tục trên tập Compact C sẽ đạt giá trị lớn nhất, nhỏ nhất trên C.

1.2.5. Đường thẳng, đoạn thẳng, siêu phẳng.

a. Định nghĩa đường thẳng và đoạn thẳng trong IR^n.

- Cho hai điểm a, b $\in |R^n$. Ta gọi đường thẳng qua a, b là tập hợp các điểm $x \in IR^n$ có dạng: $x = \lambda a + (1 - \lambda)b,\ \lambda \in IR^1$

- Nếu $0 \le \lambda \le 1$ thì ta có đoạn thẳng nối hai điểm a, b, ký hiệu [a, b].

Chú ý - Trong không gian hai chiều IR^2, phương trình bậc nhất ax + by = c, xác định một đường thẳng, một bất phương trình $ax+by \le c$ hoặc $ax+by \ge c$, xác định nửa mặt phẳng trong IR^n.

- Trong không gian ba chiều IR^3, một phương trình bậc nhất ax+by+cz=d xác định một mặt phẳng, một bất phương trình bậc nhất $ax+by+cz \le d$ hoặc $ax + by + cz \ge d$ xác định một nửa không gian. Ta mở rộng kết quả trên cho không gian IR^n.

b. Siêu phẳng trong IR^n.

- Siêu phẳng trong không gian IR^n là tập hợp tất cả các điểm $x = <x_1\ x_2,..\ x_n> \in IR^n$, thoả mãn phương trình bậc nhất:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n = \alpha.$$

- Một bất phương trình bậc nhất dạng $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \le \alpha$ hoặc $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \ge \alpha$ xác định một nửa không gian đóng trong IR^n .

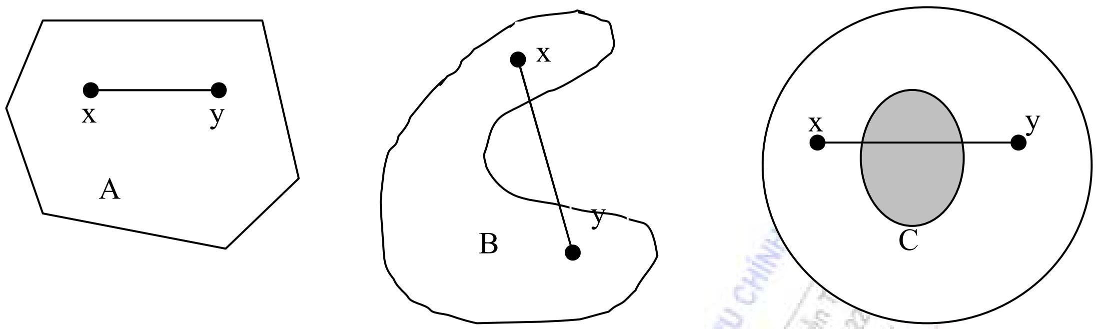
1.2.6. Tập hợp lồi .

a. Định nghĩa.

Tập hợp $x \subset IR^n$ được gọi là tập hợp lồi nếu cùng với việc chứa hai điểm x, y, nó chứa cả đoạn thẳng nối hai điểm ấy.

Điều này có nghĩa là $X = \{z \in |R^n: z = \lambda a + <1-\lambda> b,\ a, b \in IR^n, \lambda \in [0, 1]\}$

Ví dụ**.** Cả không gian IR^n, nửa không gian $|R^n$, các đa giác trong $|R^n$, các khoảng <a, b>, đoạn [a, b] trong IR^1... là các tập hợp lồi.



Tập A: lồi   Tập B và C: không lồi.

b. Định lý 11.

Giao của hai tập hợp lồi là tập hợp lồi.

Chứng minh. Lấy hai điểm bất kỳ $x, y \in A \cap B \Rightarrow x, y \in A$ và $x, y \in B$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Vì A lồi nên } [x, y] \subset A. \\ \text{B lồi nên } [x, y] \subset B. \end{array}\right\} \Rightarrow [x, y] \subset A \cap B. \text{ Vậy } A \cap B \text{ lồi.}$$

Hệ quả 1. Giao của một số bất kỳ tập lồi là tập lồi.

Hệ quả 2. Tập hợp các nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất dạng:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots\dots + a_{m}x_n \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots\dots + a_{2n}x_n \le b_2 \\ \text{---------------------------------------} \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots\dots + a_{mn}x_n \le b_m, \end{cases}$$

là một tập hợp lồi, gọi là khúc lồi đa diện, trong $|R^n$.

Chú ý . Một khúc lồi đa diện giới nội gọi là đa diện lồi, ký hiệu D. Giao của các tập hợp lồi chứa D ta gọi là bao lồi của D. Ký hiệu [D].

c. Điểm cực biên.

Đỉnh của đa diện lồi hoặc khúc lồi gọi là điểm cực biên.

Rõ ràng điểm cực biên x không thể là điểm trong của đoạn thẳng nối hai điểm nào đó thuộc D, nghĩa là không thể tồn tại hai điểm $x^1, x^2 \in D$ sao cho $x = \lambda x^1 + (1-\lambda)x^2$, $\lambda \in (0, 1)$.

1.2.7. Hàm lồi .

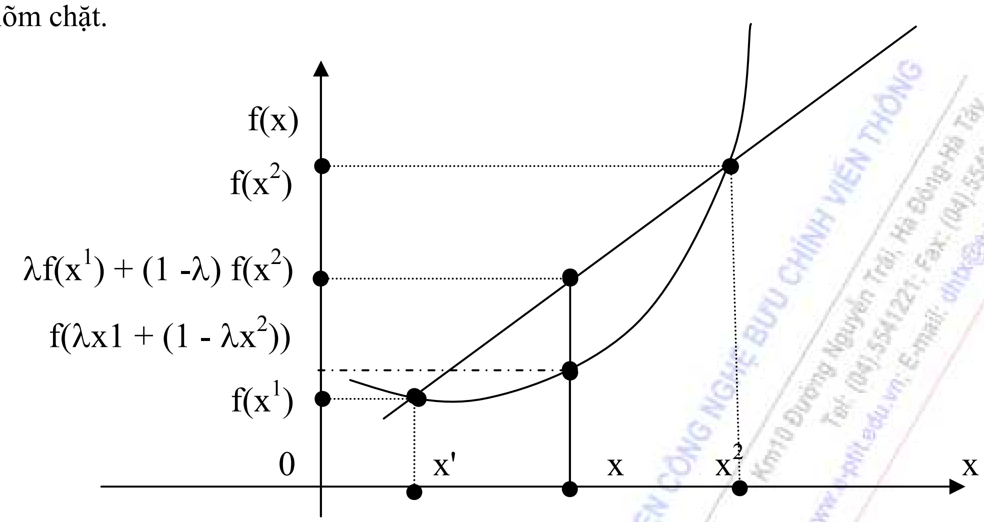
a. Định nghĩa.

Một hàm f(x), xác định trên tập hợp lồi $C \subset |R^n$, được gọi là $\forall$ hàm lồi nếu $\forall$ cặp điểm x^1, $x^2 \in C$ và $\forall$ số $\lambda \in [0, 1]$ ta luôn luôn có:

$$f(\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2) \le \lambda f(x^1) + (1-\lambda) f(x^2) \qquad (1.7)$$

Nếu trong (1.7) xảy ra dấu $\le$ thì hàm f(x) gọi là hàm lồi chặt.

Nếu trong (1.7) xảy ra dấu $\le$ thì hàm f(x) gọi là hàm lõm, xảy ra dấu > thì hàm f(x) gọi là hàm lõm chặt.



Chú ý. Nếu hàm f (x) lồi trên tập $C \subset \mathbb{R}^n$ thì hàm - f (x) lõm trên tập C, ngược lại nếu f (x) lõm trên tập lồi $C \subset \mathbb{R}^n$ thì hàm - f (x) lồi trên tập hợp C.

- Ta nói hàm f(x) xác định trên tập lồi C đạt cực tiểu tuyệt đối tại $x^* \in C$ nếu $f(x^*) \le f(x)$, $\forall x \in C$, đạt cực đại tuyệt đối tại $x^* \in c$ nếu $f(x^*) \ge f(x)$, $\forall x \in C$.

- Ta nói hàm f (x) xác định trên tập lồi C, đạt cực tiểu địa phương tại $x^* \in C$ nếu $\exists$ lân cận B_ε của x* sao cho $f(x) \le f(x)$, $\forall x \in B_\varepsilon$.

- Ta nói hàm f (x) xác định trên tập lồi C, đạt cực đại địa phương tại $x^* \in C$, nếu $\exists$ lân cận B_ε của x* sao cho $f(x) \ge f(x)$, $\forall x \in B_\varepsilon$.

b. Định lý 1.2.

Mọi điểm cực trị địa phương của hàm lồi trên tập hợp lồi đều là điểm cực trị tuyệt đối.

Chứng minh. Giả sử x* là cực tiểu địa phương nhưng không cực tiểu tuyệt đối trên tập C lồi, như vậy $\exists\, x^1 \in C$ sao cho $f(x^*)\,)\, f(x^1)$. Xét tổ hợp lồi của hai điểm x* và x^1:

$$X = \alpha x^* + (1-\alpha) x^1, \quad 0 \le \alpha \le 1.$$

Nếu $\alpha = 0$ thì $x \equiv x^1$. Khi đó $\exists\ \alpha_o \le (0, 1)$ sao cho $x \le B_\varepsilon$, với $\varepsilon \in [0, \alpha_o)$ lấy $\delta_1 \in (0, \alpha_o)$ ta có: $x(\delta_1) = (1-\delta_1) x^* + \delta_1 x^1 \in B_\varepsilon$.

Do f lồi nên có $f((1-\delta_1) x^* + \delta_1 x^1) \le (1-\delta_1) f(x^*) + \delta_1 f(x^1)$.

$((1-\delta_1) f(x^*) + \delta_1 f(x^*) = f(x^*)$, điều này mâu thuẫn với hàm f (x*) đạt cực tiểu địa phương tại x*. Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Hệ quả 1.

Mọi điểm cực đại địa phương của hàm lõm trên tập hợp lồi đều là cực đại tuyệt đối.

- Ta gọi đạo hàm theo hướng z của hàm f tại x là đại lượng:

$$\delta f(x,z) = \lim_{\lambda \to 0} \frac{f(x+\lambda z) - f(x)}{\lambda}$$, nếu giới hạn này tồn tại.

c - Bổ đề 1.1.

Nếu hàm f (x) là hàm lồi khả vi trên C lồi. Khi đó $\forall x \in C$ và với mọi z sao cho $x+z \in C$ thì $\delta f(x, z)$ tồn tại và nghiệm đúng bất đẳng thức và đẳng thức sau:

i) $\delta f(x, z) \le f(x+z) - f(x)$.

ii) $\delta f(x, z) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\delta f(x)}{\delta x_1} z_i = \langle \Delta f(x), z \rangle$.

Trong đó: Véc tơ $\Delta f(x) = \left(\frac{\delta f(x)}{\delta x_1}, \frac{\delta f(x)}{\delta x_2}, \ldots, \frac{\delta f(x)}{\delta x_n}\right)$ gọi là gradient của hàm f(x) tại x, $z = (z_1, z_2 \ldots z_n)$

1.2.8. Một số tiêu chuẩn nhận biết hàm lồi.

Cho $x, z \in IR^n$, đặt hàm số $\varphi(\lambda) = f(x+\lambda z),\ \forall \lambda \in [0, 1]$, (1.8)

Định lý 1.3.

Hàm f(x) là lồi trên IR^n khi và chỉ khi hàm số $\varphi(\lambda)$ là lồi với $\lambda \in [0, 1]$ và $x, z \in |R^n$.

Định lý 1.4.

a. Hàm f(x) khả vi trên IR^n là lồi khi và chỉ khi $\forall x, z \in IR^n$ cho trước, hàm $\varphi'(\lambda) = \langle \nabla f(x + \lambda z), z \rangle$ không giảm theo λ.

b. Hàm f(x) khả vi hai lần trên IR^n là lồi khi và chỉ khi $\forall x, y \in IR^n$ cho trước, dạng toàn phương $\langle P(x) z, z \rangle$ là xác định không âm.

Chú ý. Một dạng toàn phương $\langle P(x) z, z \rangle$ là xác định không âm khi và chỉ khi $\langle P(x) z, z \rangle \ge 0,\ \forall z \in IR^n$.

Hệ quả 1.

Một hàm bậc hai dạng $f(x) = \langle c, x \rangle + \frac{1}{2} \langle Px, x \rangle$, trong đó $P = (p_{ij})_{nxn}$ là ma trân đối xứng cấp nxn, là một hàm lồi khi và chỉ khi ma trân P là xác định không âm.

Chú ý. Để ma trận P là xác định không âm thì điều kiện cần và đủ là tất cả các định thức con chính của ma trận này không âm, nghĩa là:

$$\Delta_1 = a_{11} \ge 0 ; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \ge 0, \ldots, \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots\ldots & a_{2n} \\ \ldots\ldots & & \ldots\ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots\ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \ge 0$$

BÀI TẬP CHƯƠNG I.

Bài 1. Một doanh nghiệp có 300 đơn vị nguyên liệu loại A, 500 đơn vị nguyên liệu loại B và 200 đơn vị nguyên liệu loại C để sản xuất 4 loại sản phẩm I, II, III, IV. Định mức nguyên liệu cần thiết và tiền lãi của sản xuất cho bởi bảng 1. Hãy lập kế hoạch sản xuất của xí nghiệp trên sao cho thu được lãi suất lớn nhất.

Bảng 1

Hàng hoá / Nguyên liệu	I	II	III	IV
A: 300	12	5	15	6
B: 500	14	8	7	9
C: 280	17	13	9	12
Lãi (đơn vị tiền)	5	8	4	6

Bài 2. Cần sản xuất ít nhất 75 sản phẩm loại A, 58 sản phẩm loại B và 64 sản phẩm loại C. Người ta có thể áp dụng 3 cách sản xuất I, II, III, IV. Trong một đơn vị thời gian, năng suất và chi phí của từng cách sản xuất cho bởi bảng 2.

Bảng 2

Cách sản xuất / Loại sản phẩm	I	II	III
$A \geq 75$	3	6	7
$B \geq 58$	5	9	3
$C \geq 64$	2	8	4
Chi phí (đơn vị tiền)	2	4	3

Hãy lập kế hoạch sản xuất sao cho chi phí nhỏ nhất mà vẫn đạt được các yêu cầu đặt ra.

Bài 3. Một Công ty có ba xí nghiệp cùng loại: A, B, C có khả năng sản xuất được 3 loại sản phẩm: I, II, III. Biết rằng nếu đầu tư một đơn vị tiền vào xí nghiệp A trong một năm sẽ sản xuất được 1200 sản phẩm loại I, 800 sản phẩm loại II và 1050 sản phẩm loại III. Đầu tư vào xí nghiệp B một đơn vị tiền, được 1000 sản phẩm loại I, 740 sản phẩm loại II, 900 sản phẩm loại III. Đầu tư vào xí nghiệp C một đơn vị tiền thì sản xuất được 1100 sản phẩm loại I, 600 sản phẩm loại II, 1000 sản phẩm loại III. Định mức tiêu hao nguyên liệu và lao động của mỗi xí nghiệp trong sản xuất được cho ở bảng 3. Nguyên liệu, lao động hàng năm Công ty có thể cung cấp cho sản xuất ba loại sản phẩm này là 390.000 KG và 200.000 giờ công. Theo kế hoạch phải sản xuất ít nhất là 23.000 đơn vị sản phẩm loại I, 18.000 đơn vị sản phẩm loại II, và 21.000 đơn vị sản phẩm loại III. Hãy tìm một phương án đầu tư sao cho thu được các sản phẩm theo kế hoạch mà vốn đầu tư ít nhất.

Bảng 3

Doanh nghiệp	Định mức hao phí ng. liệu (Kg/sản phẩm) và lao động (g/sản phẩm)					
	I		II		III	
	Ng. liệu	Lao động	Ng. liệu	Lao động	Ng. liệu	Lao động
A	4	2	10	4	8	4, 5
B	4, 2	3	9	4, 5	7, 8	5

C	4, 5	2, 5	10, 5	5	8, 4	4

Bài 4. Một xí nghiệp quân đội có 4 loại máy: A, B, C, D, sản xuất ra 6 loại sản phẩm I, II, III, IV, V, VI. Số giờ của mỗi loại máy để sản xuất mỗi loại sản phẩm và giá tiền mỗi loại sản phẩm ghi ở bảng 4. Năng lực sản xuất của các l\mãy đều có hạn, nếu dùng quá sẽ bị hỏng. Giả sử trong 1 tuần, mỗi máy loại A, B, C, D tương ứng làm việc không quá 850, 700, 100 và 900 giờ. Hãy lập một phương án sản xuất để thu được sản phẩm mỗi loại lớn nhất mà vẫn bảo đảm an toàn cho máy móc và thiết bị.

Bảng 4

Sản phẩm / **Số giờ sản xuất 1 sp trên máy.**	**Loại I**	**Loại II**	**Loại III**	**Loại IV**	**Loại V**	**Loại VI**
A	0, 01	0, 01	0, 01	0, 03	0, 03	0, 03
B	0, 02			0, 05		
C		0, 02			0, 05	
D			0, 03			0, 08
Giá 1 sản phẩm (đ/v tiền)	0, 40	0, 28	0, 32	0, 72	0, 64	0, 60

Bài 5. Một máy bay vận tải quân sự có trọng tải M. Cần chở n loại thiết bị bằng máy bay. Trọng lượng loại bưu kiện i, ($i = \overline{1,n}$) là α_i, có giá trị β_i . Hãy tìm phương án chở mỗi loại thiết bị bao nhiêu đơn vị lên máy bay để trọng lượng tổng cộng không vượt quá tải trọng của máy bay mà đạt được tổng giá trị lớn nhất ? (*Bài toán Qui hoạch nguyên*).

CHƯƠNG II: QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH

2.1. MỘT SỐ BÀI TOÁN THỰC TẾ DẪN TỚI MÔ HÌNH QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH

2.1.1. Bài toán lập kế hoạch sản xuất.

Giả sử một Công ty sản xuất n loại sản phẩm và phải sử dụng m loại nguyên liệu khác nhau. Gọi x_j là sản lượng sản phẩm loại j, (j = $\overline{1,n}$) mà Công ty sẽ sản xuất, c_j là tiền lãi (hay giá) một đơn vị sản phẩm loại j, a_{ij} là chi phí nguyên liệu loại i, (i = $\overline{1,m}$), để sản xuất ra một đơn vị sản phẩm loại j, b_i là lượng nguyên liệu loại i tối đa có thể có.

Trong các điều kiện đã cho, hãy xác định sản lượng x_j, j = $\overline{1,n}$ sao cho tổng tiền lãi (*hay tổng giá trị sản lượng hàng hoá)* là lớn nhất với số nguyên liệu hiện có.

Bài toán thực tiễn trên, có thể mô hình toán học như sau:

Tìm $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, làm cực đại hàm mục tiêu:

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max$$

với các điều kiện:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i,\ i = \overline{1,m},$$

$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,n}$$

Bài toán trên là một bài toán Qui hoạch tuyến tính.

2.1.2. Bài toán vận tải.

Có m kho hàng cùng chứa một loại hàng hoá, A_i , i = $\overline{1,m}$ (A_i điểm phát thứ i). Lượng hàng ở kho A_i là a_i, (i = $\overline{1,m}$). Có n địa điểm tiêu thụ hàng B_j, nhu cầu tiêu thụ ở điểm B_j là b_j, j = $\overline{1,n}$ (B_i điểm thu thứ i). Biết rằng cước phí vận chuyển một đơn vị hàng hoá từ điểm phát A_i đến điểm thu B_j là c_{ij}. Hãy lập kế hoạch vận chuyển hàng hoá từ các địa điểm phát đến các địa điểm thu hàng sao cho tổng chi phí vận chuyển là nhỏ nhất.

Nếu ta ký hiệu x_{ij} là lượng hàng vận chuyển từ điểm phát A_i, (i = $\overline{1,m}$) đến điểm thu B_j, với (j = $\overline{1,n}$), thì ta có thể mô hình toán học bài toán thực tế như sau:

Tìm véc tơ $x = (x_1, x_2,..., x_{n+m}) \in \mathbb{R}^{nxm}$,sao cho:

$$F(x) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min$$

với các điều kiện:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i,\ i = \overline{1,m}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_i,\ j = \overline{1,n}$$

$$x_{ij} \geq 0,\ i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}$$

Ngoài ra bài toán phải thoả mãn điều kiện:

$$\sum_{j=1}^{n} b_j = \sum_{i=1}^{m} a_i \quad (\textit{cân bằng thu và phát}).$$

Đây là một dạng của bài toán Quy hoạch tuyến tính.

2.1.3. Bài toán người bán hàng (*Bài toán cái túi*).

Một cửa hàng cần phải vận chuyển một lượng hàng trên một chuyến nặng không được quá b kg. Có n loại đồ vật mà cửa hàng cần phải vận chuyển đi bán, mỗi đồ vật loại j, ($j = \overline{1,n}$), có khối lượng a_j kg. Và có giá trị là c_j . Hãy xác định xem trong một chuyến hàng, cửa hàng cần đưa lên phương tiện vận chuyển các đồ vật nào để tổng giá trị các đồ vật thu được là lớn nhất.

Nếu ta ký hiệu x_j là số đồ vật loại j sẽ đưa lên phương tiện vận chuyển, ta có mô hình toán học bài toán như sau:

Tìm $x = (x_1, x_2,...,x_n) \in |R^n$ sao cho:

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \rightarrow \max$$

Với điều kiện:

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \leq b$$

$$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,n}$$

$$x_j \text{ - nguyên},\ j = \overline{1,n}$$

Đây là bài toán Qui hoạch nguyên.

2.1.4. Bài toán lập kế hoạch đầu tư vốn cho sản xuất.

Cần phải đầu tư vốn vào m xí nghiệp để sản xuất ra n loại sản phẩm. Do trang bị kỹ thuật - công nghệ và tổ chức sản xuất khác nhau nên hiệu quả của vốn đầu tư vào các xí nghiệp cũng khác nhau. Qua phân tích, người ta biết rằng khi đầu tư một đơn vị tiền vào xí nghiệp thứ i, $i = \overline{1,m}$, trong một năm sẽ sản xuất ra được b_{ij} đơn vị sản phẩm loại j, $j = \overline{1,n}$. Tổng số nguyên liệu và lao động hàng năm có thể cung cấp là A và C (*tính theo giờ/công*). Hãy xác định một kế hoạch đầu tư sao cho đảm bảo sản xuất được ít nhất B_j đơn vị sản phẩm loại j mà tổng số vốn đầu tư nhỏ nhất, biết rằng các định mức hao phí về nguyên liệu và lao động khi sản xuất ra một đơn vị sản phẩm loại j ở xí nghiệp i, $i = \overline{1,m}$, tương ứng là a_{ij} và c_{ij}, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$.

Gọi vốn đầu tư vào xí nghiệp i là x_i đơn vị tiền. Khi đó số lượng sản phẩm loại j sản xuất ở xí nghiệp i là $b_{ij}\, x_i$ và số nguyên liệu sử dụng ở xí nghiệp này để sản xuất ra các sản phẩm j là $a_{ij}\, b_{ij}\, x_i$ .Vậy toàn bộ nguyên liệu sử dụng ở xí nghiệp i là $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, b_{ij} x_i$ và tổng số nguyên liệu sử dụng cho kế hoạch sản xuất chung là: $\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, b_{ij}\, x_i$.

Tương tự, ta suy ra tổng số lao động sử dụng trong kế hoạch sản xuất là: $\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, b_{ij}\, x_i$

Tổng số vốn đầu tư, theo bài toán đặt ra, là $\sum_{i=1}^{m} x_i$ và tổng số sản phẩm loại j sản xuất được là $\sum_{i=1}^{m} b_{ij}\, x_i$.

Theo mục tiêu của bài toán thực tế đặt ra thì bài toán có thể mô hình toán học như sau:

Tìm véc tơ $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathrm{IR}^m$ sao cho:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{m} x_i \rightarrow \min$$

với điều kiện:

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, b_{ij}\, x_i \leq A$$

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, b_{ij}\, x_i \leq C$$

$$\sum_{i=1}^{m} b_{ij}\, x_i \geq B_j, \; j = \overline{1,n}$$

$$x_i \geq 0, \; i = \overline{1,m}$$

Đây là một dạng của bài toán Qui hoạch tuyến tính.

2.2. MÔ HÌNH BÀI TOÁN QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH.

2.2.1. Bài toán quy hoạch tuyến tính tổng quát

Tìm $x = (x_1, x_2 \dots x_i, \dots x_n) \in \mathrm{IR}^n$.

Sao cho: $f(x) = \sum_{j=1}^{n} C_j\, x_j \rightarrow \max\ (\min)$ (2.1)

Thỏa mãn điều kiện:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j\ (\leq, =\, \geq)\ b_i \quad (i = \overline{1,m}) \qquad (2.2)$$

$$x_j \geq 0 \qquad (j = \overline{1,n}) \qquad (2.3)$$

Để xây dựng cơ sở lý luận giải bài toán, chỉ cần xét một trong hai dạng bài toán, chẳng hạn bài toán tìm giá trị lớn nhất ($f \to \max$) của hàm mục tiêu, còn bài toán tìm giá trị bé nhất ($f \to \min$) của hàm mục tiêu có thể chuyển đổi như sau:

* Giữ nguyên hệ ràng buộc (2.2) và (2.3)

* Đưa hàm mục tiêu: $f(x) = \sum_{j=1}^{n} C_j x_j \to \min$

về $\overline{f}(x) = - f(x) = \sum_{j=1}^{n} (-C_j)\, x_j \to \max$, ta có mô hình bài toán:

Tìm $x = (x_1, x_2, ..., x_j, ... x_n) \in \mathbb{R}^n$

Sao cho: $\overline{f}(x) = \sum_{j=1}^{n} (-C_j)\, x_j \to \max$ (2.4)

Thoả mãn điều kiện:
$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\ (\le, =, \ge)\ b_i & (i = \overline{1,m}) \quad (2.5) \\ x_j \ge 0 & (j = \overline{1,n}) \quad (2.6) \end{cases}$$

<u>Bổ đề:</u> Nếu bài toán (2.4) ÷ (2.6) có $x_{opt} = x^*$, thì bài toán (2.1) ÷ (2.3) với

$f(x) \to \min$ cũng có $x_{opt} = x^*$ và $f_{min} = -\overline{f}_{max}$

Thật vậy, theo giả thiết (2.4) ÷ (2.6) có $x_{opt} = x^*$ với hàm mục tiêu

$$\overline{f}(x) = \sum_{j=1}^{n} (-c_j).\, x_j \to \max \text{, thì:}$$

$\overline{f}(x) \le \overline{f}(x^*)$ ($\forall x \in D$ - tập các phương án)

$$\Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} (-c_j).\, x_j \le \sum_{j=1}^{n} (-c_j).\, x_j^* \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} c_j.\, x_j^* \le \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$\Leftrightarrow f(x) \ge f(x^*)$ $(\forall x \in D) \Leftrightarrow x^* = x_{opt}$ của (2.1)—(2.3) với $f(x) \to \min$.

$$f_{min} = \sum_{j=1}^{n} c_j\, x_j^* = -\sum_{j=1}^{n} (-c_j)\, x_j^* = -\overline{f}_{max} \quad (\textit{đpcm})$$

Như vậy mọi bài toán (2.1) - (2.3) với $f(x) \to \min$ có thể chuyển $\overline{f}(x) \to \max$.

2.2.2. Dạng chuẩn tắc

a- Dạng đầy đủ

Tìm $x = (x_1, ..., x_j, ... x_n) \in \mathbb{R}^n$

Sao cho: $f(x) = c_1x_1 + ... + c_i x_i + ... + c_n x_n \to \max$ (2.7)

Thoả mãn

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + ... + a_{1i}x_i + ... + a_{1n}x_n \le b_1 \\ a_{21}x_1 + ... + a_{21}x_i + ... + a_{2n}x_n \le b_2 \\ ------------------------------------ \\ a_{i1}x_1 + ... + a_{ii}x_i + ... + a_{in}x_n \le b_1 \\ -------------------------------- \\ a_{m1}x_1 + ... + a_{mi}x_i + ... + a_{mn}x_n \le b_m \\ x_i \le 0 \quad (i = \overline{1,n}) \end{cases} \quad \begin{array}{l} (2.8) \\ (2.9) \end{array}$$

b. Dạng rút gọn.

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_i x_i \to \max$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ii} x_i \le b_i & (i = \overline{1,m}) \\ x_i \ge 0 & (\delta = \overline{1,n}) \end{cases}$$

Tính chất của hàm mục tiêu (2.7) và dạng bất phương trình của hệ ràng buộc (2.8) xuất phát từ ý nghĩa thực tiễn của bài toán đặt ra. Chẳng hạn như bài toán lập kế hoạch sản xuất để hiệu quả kinh tế tổng cộng lớn nhất, khi phải hạn chế chi tiết nguyên liệu sử dụng.

Ngược lại, trong bài toán xác định vốn đầu tư cho sản xuất phải khai thác tối đa trang bị kỹ thuật - công nghệ để sao cho đạt được yêu cầu về giá trị sản phẩm làm ra mà vốn đầu tư ít nhất.

2.2.3 Dạng chính tắc

a- Dạng đầy đủ

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \to \max \quad (2.10)$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i = b_i & (i = \overline{1,m}) & (2.11) \\ x_i \ge 0 & (i = \overline{1,n}) & (2.12) \end{cases}$$

b. Dạng ma trận:

Gọi ma trận hàng, gồm các phần tử là hệ số các ẩn trong hàm mục tiêu là C:

$C = [\, c_1 \; c_2 ... c_n]$

Ma trận cột:

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_m \end{bmatrix}, \; x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_n \end{bmatrix}$$

Ma trận hệ số các ẩn ở (2.11): A = $\begin{bmatrix} a_{11}......a_{1n} \\ a_{21}......a_{2n} \\ .... \\ a_{m1}......a_{mn} \end{bmatrix}$

Khi đó bài toán (2.10) ÷ (2.12) có dạng ma trận:

Tìm X sao cho: f(x) = C.X → max

$$\begin{cases} A.X = B \\ X \geq 0 \end{cases}$$

c. Dạng véc tơ:

Gọi véc tơ:

$$c = (c_1, c_2, \dots, c_n)$$

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Véc tơ cột lập bởi hệ số các ẩn ở $(2.2)_2$: $A_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ a_{mj} \end{pmatrix}$ $(j = \overline{1,n})$

Véc tơ cột lập bởi hệ số tự do ở (3.5):

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Khi đó, bài toán trên có dạng véc tơ:

Tìm X sao cho: f(x) = <c.x> → max

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} A_j x_j = B \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Trong đó: <c,x> = $c_j x_j$ - tích vô hướng của 2 véc tơ c và x.

Như vậy, bài toán QHTT chính tắc có thể viết dưới dạng ma trận hoặc véc tơ.

2.3. CÁC PHÉP BIẾN ĐỔI DẠNG CỦA BÀI TOÁN QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH

2.3.1. Ràng buộc:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i$$

Có thể đưa về ràng buộc: $\sum_{j=1}^{n} (-a_{ij}) . x_j \leq -b_i \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} a'_{ij} x_j \leq b'_i$ bằng cách nhận 2 vế của (2.7) với (-1) rồi đặt $a'_{ij} = -a_{ij}$, $b'_i = -b_i$

2.3.2. Đẳng thức:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j = b_i$$

Có thể đưa về 2 ràng buộc bất đẳng thức:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j \le b_i \\ \sum_{j=1}^{n} (-a_{ij})\, x_j \le -b_i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j \le b_i \\ \sum_{j=1}^{n} a'_{ij}\, x_j \le b'_i \end{cases}$$

Với $a'_{ij} = -a_{ij}$, $b'_i = -b_i$.

2.3.3. Biến x_j tự do có thể thay bởi hiệu của 2 biến không âm, bằng cách đặt:

$x_j = x'_j - x'_{n+j}$ với $x'_j \ge 0$, $x'_{n+j} \ge 0$

Trong đó:

$$x'_j = \max\ \{0\,;\, x_j\}$$
$$x'_{n+j} = \max\ \{0\,;\, -x_j\}$$

2.3.4. Một ràng buộc bất đẳng thức:

$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j \le b_i$ có thể đưa về ràng buộc đẳng thức, bằng cách đưa vào biến phụ (hoặc là biến bù) $x_{n+i} \ge 0$:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j + x_{n+i} = b_i$$

Một ràng buộc dạng khác: $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} . x_j \ge b_i$ có thể đưa về ràng buộc đẳng thức, bằng cách đưa vào biến phụ $x_{n+i} \ge 0$:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j - x_{n+i} = b_i$$

Vậy ta có:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j \le b_i \Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j + x_{n+i} = b_i \\ x_{n+i} \ge 0 \end{cases}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i \Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j - x_{n+i} = b_i \\ x_{n+i} \ge 0 \end{cases}$$

2.3.5. Định lý .

Nếu véc tơ x = (α_1 , α_2 , ... α_n) nghiệm đúng bất phương trình: $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}.x_j \underset{(\geq)}{\leq} b_i$ thì véc tơ $\overline{X}$ = (α_1 , α_2 , ... , α_n , α_{n+1}) sẽ nghiệm đúng phương trình:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \underset{(-)}{+} x_{n+i} = bi \\ x_{n+i} \geq 0 \end{cases}$$

và ngược lại .

<u>Ví dụ 1</u>: Đưa bài toán QHTT sau về dạng chính tắc:

$$f(x) = 2x_1 - 3x_4 + x_5 + 2x_6 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_4 + 2x_6 = 5 \\ 2x_2 - 3x_3 + x_4 + x_5 \leq 4 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_5 \geq 3 \\ x_j \geq 0 \ (j = 1, 2, 5, 6) \end{cases}$$

Trước hết đưa hệ ràng buộc dạng đẳng thức, bằng cách đưa vào 2 biến phụ. $x_7 \geq 0$; $x_8 \geq 0$, ta có:

$$f(x) = 2x_1 - 3x_4 + x_5 + 2x_6 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_4 + 2x_6 = 5 \\ 2x_2 - 3x_3 + x_4 + x_5 + x_7 = 4 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_5 = 3 \\ x_j \geq 0 \ \ (j: 1, 2, 5, 6, 7, 8) \end{cases}$$

Xét ràng buộc dấu các ẩn, ta thấy x_3 , x_4 không ràng buộc về dấu (*không ẩn*), nên đặt:

$x_3 = x'_3 - x'_9$ Với $x'_3 \geq 0$, $x'_9 \geq 0$

$x_4 = x'_4 - x'_{10}$ Với $x'_4 \geq 0$, $x'_{10} \geq 0$

Bài toán có dạng:

$$f(x) = 2x_1 - 3\,(x'_4 - x'_{10}) + x_5 + 2x_6 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3\,(x'_4 - x'_{10}) + 2x_6 = 5 \\ 2x_2 - 3\,(x'_3 - x'_9) + x_4 + x_5 + x_7 = 4 \\ 3x_1 - x_2 + 2\,(x'_3 - x'_9) - 2x_5 - x_8 = 3 \\ x'_j \geq 0 \ (j = 3 ; 4 ; 9 ; 10),\ x_j \geq 0 \ (j = 1 ; 2 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8) \end{cases}$$

là bài toán QHTT chính tắc.

Tuy nhiên, sau khi thực hiện các phép biến đổi, số biến của bài toán tăng lên, song nếu sử dụng linh hoạt các phép biến đổi đại số, số biến có thể giảm bớt, bài toán rút gọn hơn.

Ví dụ 2: Đưa bài toán sau về dạng chuẩn tắc:

$$f(x) = x_1 + x_2 + 2x_3 + 7x_4 + 5x_5 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 + 5x_5 = 22 \quad (a) \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + 4x_5 = 25 \quad (b) \\ x_1 + x_3 + x_5 = 9 \quad (c) \\ x_j \ge 0 \quad (j = \overline{1,5}) \end{cases}$$

Áp dụng các phép biến đổi đại số hệ ràng buộc:

Trừ từng vế của (b) cho (a), ta có: $x_3 + x_4 - x_5 = 3$

Trừ từng vế của (b) cho (c), ta có: $x_2 + 2x_4 + 3x_5 = 16$ (d)

Trừ từng vế của (a) cho (d), ta có: $x_1 - x_4 + 2x_5 = 6$

Vậy hệ ràng buộc:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 + 5x_5 = 22 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + 4x_5 = 25 \\ x_1 + x_3 + x_5 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_4 + 2x_5 = 6 \\ x_2 + 2x_4 + 3x_5 = 16 \\ x_3 + x_4 - x_5 = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 6 - (-x_4 + 2x_5) \ge 0 \\ x_2 = 16 - (2x_4 + 3x_5) \ge 0 \\ x_3 = 3 - (x_4 - x_5) \ge 0 \end{cases}$$

Thay vào mục tiêu, cho kết quả: $f(x) = 4x_4 + 2x_5 + 28$

Bài toán tương đương với: $f(x) = 4x_4 + 2x_5 + 28 \to \max$

$$\begin{cases} -x_4 + 2x_5 \le 6 \\ 2x_4 + 3x_5 \le 16 \\ x_4 + x_5 \le 3 \\ x_j \ge 0 \ (j = 4, 5) \end{cases}$$

Đây là bài toán QHTT dạng chuẩn tắc, được rút gọn hơn.

Như vậy, một bài toán QHTT ở dạng chuẩn, bằng phương pháp dùng biến phụ, ta luôn đưa được về bài toán ở dạng chính tắc. Đối với bài toán QHTT dạng chính tắc không giảm tính tổng quát, ta giả thiết rằng:

i) Hệ ràng buộc (2.11) gồm m phương trình độc lập:

Giả thiết này luôn được thực hiện, vì nếu ngược lại thì trong hệ có một hay một số phương trình là tổ hợp tuyến tính của các phương trình còn lại, thì loại khỏi hệ các phương trình này, để được hệ mới gồm các phương trình độc lập với nhau.

ii) Ở vế phải của hệ ràng buộc (2.11): $b_i \ge 0 \quad (i = \overline{1,m})$

Giả thiết này luôn thực hiện, vì ngược lại nếu ở phương trình thứ i: $b_i < 0$ thì nhân 2 vế của phương trình này với -1, ta được phương trình mới tương đương.

$$\sum_{j=1}^{n} (-a_{ij})\, x_j = b'_i \quad \text{với } b'_i = -b_i \ge 0$$

iii) Trong hệ ràng buộc (2.11), số phương trình m nhỏ thua số ẩn n: $m < n$

Giả thiết này đưa ra nhằm đảm bảo D $\neq\varnothing$ của bài toán QHTT, vì ngược lại m $\geq$ n, thì hệ ràng buộc (2.11) luôn đưa về hệ gồm n, phương trình, n ẩn tương đương sẽ có nghiệm duy nhất (*hệ tương thích*) hoặc hệ vô nghiệm (*hệ không tương thích*), trong cả 2 trường hợp đó, việc giải bài toán là vô nghĩa.

Vậy mọi bài toán QHTT luôn đưa về dạng chính tắc:

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}.x_j = b_i & (i = \overline{1,m}) \\ x_j \geq 0 & (j = \overline{1,n}) \end{cases}$$

Với: $b_i \geq 0 \qquad (i = \overline{1,m})$

m < n và m phương trình độc lập với nhau .

2.4 - MỘT SỐ TÍNH CHẤT CỦA BÀI TOÁN QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH.

a- Định lý 1.

Tập D các phương án của bài toán QHTT chính tắc (2.10) ÷ (2.12) là một tập lồi.

Định lý 2.

Nếu tập D các phương án của bài toán QHTT chính tắc (2.10) – (2.12) không rỗng và bị chặn, thì D là một đa diện lồi.

* Định lý có thể chứng minh bằng phương pháp quy nạp theo số biến của bài toán. Để chứng minh D là một đa diện lồi, ta chỉ cần chứng tỏ rằng, trong D có một số hữu hạn các phương án, mà mỗi phương án thuộc D đều là tổ hợp lồi của các phương án trong D.

Định lý 3. Nếu bài toán QHTT chính tắc (2.10) – (2.12) có lời giải và tập D các phương án của nó là một đa diện lồi, thì có ít nhất một điểm cực biên của D là phương án tối ưu.

Định lý 4. Nếu bài toán QHTT chính tắc (2.10) -(2.12) có lời giải, thì tồn tại ít nhất 1 điểm cực biên của tập D các phương án là phương án tối ưu (*gọi là phương án cực biên tối ưu*).

* Định lý này làm cơ sở lý luận cho phương pháp giải bài toán. Nhờ nó đáng lẽ phải phải tìm phương án tối ưu trong tập vô số phương án, ta chỉ cần tìm trong tập hữu hạn các phương án cực biên.

Tuy vậy, không loại trừ có những phương án tối ưu không phải là điểm cực biên, thể hiện ở định lý sau:

Định lý 5. Nếu bài toán QHTT chính tắc (2.10) - (2.12) có x_1 , x_2 , ... , x_k là những phương án cực biên tối ưu, thì mọi tổ hợp lồi của chúng cũng là phương án tối ưu.

Định lý 6. Để phương án x = (x_1 , x_2 ,... ,x_n) của bài toán QHTT chính tắc (2.10) ÷ (2.12) là phương án cực biên, điều kiện cần và đủ là các véc tơ cột A_j của ma trận hệ số trong (2.12) ứng với các thành phần $x_j > 0$ lập thành hệ độc lập tuyến tính.

* Ta phân tích ý nghĩa định lý.

Xét bài toán (2.10) ÷ (2.12) dạng véc tơ:

$$f(x) = \langle C,X \rangle \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} A_j x_j = B \\ X \geq 0 \end{cases}$$

Trong đó: $A_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \dots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$ ($j = \overline{1,n}$) ; c, $= (c_1, c_2, \dots, c_n)$

$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$; $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

là các véc tơ cột và hàng.

$x = (x_1, x_2, \dots x_j, \dots x_n)$ – phương án cực biên $\Leftrightarrow$

$\{ A_j: j \in J, x_j > 0 \}$ – hệ véc tơ độc lập tuyến tính.

Vậy nhờ định lý, mà việc xem xét một phương án của bài toán QHTT có phải là phương án cực biên hay không , được thay thế bằng việc xem xét sự độc lập tuyến tính hay phụ thuộc tuyến của hệ véc tơ cột A_j , $j \in J$.

Xét ví dụ sau để làm rõ các khái niệm trên:

Ví dụ. Cho bài toán QHTT: $f(x) = 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 5x_4 \rightarrow \max$

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - x_3 + x_4 = 11 \\ x_1 - 3x_2 - x_4 \leq 0 \\ -2x_1 + x_3 + 3x_4 = 9 \\ x_j \geq 0 \ (j = \overline{1;4}) \end{cases}$$

Tìm một phương án cực biên của bài toán. Chẳng hạn, ta xét hệ 2 véc tơ: (A_2, A_4) , với:

$A_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}; A_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ là hệ độc lập tuyến tính, vì ma trận lập bởi A_2, A_4 :

$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ có hạng: rank A = 2

Vậy (A_2, A_4) - hệ véc tơ cơ sở: $J = \{2, 4\}$ - tập chỉ số các véc tơ cơ sở

x_2, x_4 - biến cơ sở

x_1, x_3 - biến phi cơ sở, vì $1; 3 \notin J$ và $x_1 = x_3 = 0$

Từ: $-2x_1 + x_3 + 3x_4 = 9 \quad \Rightarrow x_4 = 3 > 0$

Từ: $3x_1 + 4x_2 - x_3 + x_4 = 11 \quad \Rightarrow x_2 = 2 > 0$

Với $x_1 = x_3 = 0$; $x_2 = 4$, $x_4 = 3$ cũng thoả mãn: $x_1 - 3x_2 - x_4 \leq 0$

Vậy $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 2, 0, 3)$ là phương án cực biên.

- Nếu đưa bài toán về dạng chính tắc, phải đưa vào biến phụ $x_5 \geq 0$, bài toán có dạng:

$$f(x) = 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 5x_4 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - x_3 + x_4 = 11 \\ x_1 - 3x_2 - x_4 + x_5 = 0 \\ -2x_1 + x_3 + 3x_4 = 9 \\ x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1;5}) \end{cases}$$

Tương tự xét như trên, hệ véc tơ (A_2 , A_4 , A_5) - độc lập tuyến tính là hệ véc tơ cơ sở của phương án cực biên (*không suy biến*): x = (0, 2 , 0 , 3 , 9)

Vậy: x = (0 , 2 , 0 , 3 , 9) $\Leftrightarrow$ cơ sở: (A_2 , A_4 , A_5) duy nhất.

Người ta chứng minh được rằng:

i. Đối với một phương án cực biên suy biến của bài toán QHTT.

Có thể có nhiều cơ sở khác nhau. Song đối với phương án cực biên không suy biến chỉ có một cơ sở duy nhất.

Ví dụ. Xét bài toán QHTT:

$$f(x) = x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 2x_4 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 3x_3 + x_4 = 6 \\ 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 3 \\ 7x_1 - 2x_3 = 7 \\ x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1;4}) \end{cases}$$

Tìm một phương án cực biên suy biến và cơ sở của nó.

Nếu lấy $x_3 = x_4 = 0$, từ hệ ràng buộc ta có: $x_1 = x_2 = 1$

Vậy x = (1 , 1 , 0 , 0) là một phương án

Với $x_1, x_2 > 0$ xét hệ véc tơ (A_1,A_2) ma trận A lập bởi A_1, A_2:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 3 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$ có hạng A = 2 $\Rightarrow$ (A_1 , A_2) - hệ véc tơ độc lập tuyến tính. Do đó x = (1 , 1 , 0 , 0) là một phương án cực biên. Hơn nữa số thành phần dương trong x là 2 < 3 = m. Vậy x = (1 , 1 , 0 , 0) là phương án cực biên suy biến.

Xét hệ véc tơ (A_1 , A_2 , A_3) ma trận A lập bởi A_1 , A_2 , A_3:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 7 & 0 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = 92 \neq 0$$

Vậy hệ (A_1 , A_2 , A_3) - độc lập tuyến tính, là một cơ sở của x.

Vậy đối với phương án cực biên suy biến x = (1 , 1 , 0 , 0) có 2 cơ sở khác nhau (A_1 , A_2 , A_3) và (A_1 , A_2 , A_4).

* Điều kiện tồn tại lời giải của bài toán QHTT là.

*- Tập các phương án: $D \neq \phi$

*- Hàm mục tiêu bị chặn trên miền D.

2.5. PHƯƠNG PHÁP HÌNH HỌC GIẢI BÀI TOÁN QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH 2 BIẾN.

2.5.1 Biểu diễn hình học quy hoạch tuyến tính 2 biến

Xét bài toán QHTT chuẩn tắc 2 biến.

$$f(x) = c_1x_1 + c_2 x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 \leq b_i \ (i = \overline{1,m} \ ) \\ x_j \geq 0 \qquad\qquad (j = 1,2 \ ) \end{cases}$$

- Từ ý nghĩa hình học của siêu phẳng trong IR^2:

$$H = \{x = (x_1, x_2): a_1 x_1 + a_2 x_2 = b\}$$

chia IR^2 thành 2 nửa mặt phẳng:

$$D^+ = \{x = (x_1, x_2): a_1 x_1 + a_2 x_2 \geq b\}$$

$$D^- = \{x = (x_1, x_2): a_1 x_1 + a_2 x_2 \leq b\}$$

thì mỗi bất phương trình tuyến tính trong hệ ràng buộc

$$a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 \leq b_i \qquad (i=\overline{1,m} \ )$$

sẽ xác định một nửa mặt phẳng .

Vậy miền ràng buộc D, xác định bởi hệ ràng buộc là giao của m nửa mặt phẳng, sẽ là đa giác lồi hay khúc lồi (nếu $D \neq \phi$) hoặc không tồn tại (nếu $D = \Phi$)

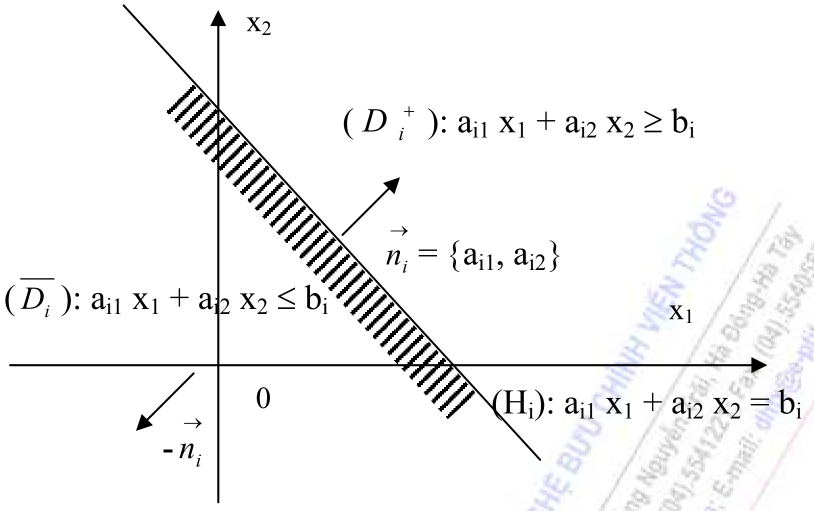
Để xác định nửa mặt phẳng $(2.2)_1$, trước hết phải xác định đường thẳng :

$$(H_i): a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 = b_i \qquad (i =\overline{1,m})$$

Sau đó xác định véc tơ pháp tuyến của nó: $\vec{n_i} = \{a_{i1}, a_{i2}\}$ ($i =\overline{1,m}$)

thì phần nửa mặt phẳng ($\overline{D_i}$): $a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 \leq b_i$ ($i =\overline{1,m}$) sẽ nằm về phía ngược hướng với $\vec{n_i}$, còn nửa mặt phẳng: ($i = \overline{1,m}$) sẽ nằm về phía cùng hướng với $\vec{n_i}$ ($i = \overline{1,m}$), kể cả biên của (H_i). Minh hoạ hình học

Chú ý: Ngoài phương pháp xác định giữa mặt phẳng (D_i^+) hoặc $\overline{D_i}$ nêu trên, có thể xác định bằng cách: xét điểm góc tọa độ O (0,0) thuộc nửa mặt phẳng nào, nhờ thay toạ độ O (0,0) vào hệ ràng buộc hoặc ngược lại.



Hình 2.1:

- Từ ý nghĩa hình học, đối với hàm mục tiêu: $f(x) = c_1x_1 + c_2\,x_2$ ta xét phương trình đường thẳng:

$$c_1x_1 + c_2\,x_2 = \alpha \qquad (*)$$

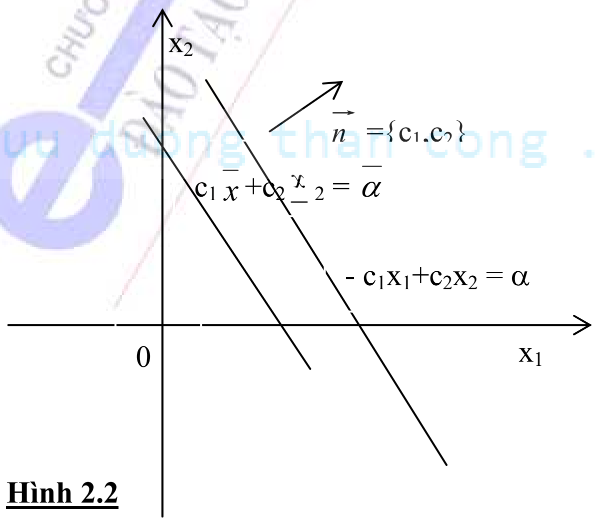
với $\alpha \in IR^1$

Ta thấy: Khi α thay đổi, (*) sẽ xác định trên mặt phẳng toạ độ $0x_1\,x_2$ các đường thẳng song song với nhau (vì cùng vuông góc với véc tơ pháp tuyến $\vec{n}_i = \{c_1, c_2\}$), gọi là các đường mức (mức giá trị α). Mỗi điểm $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2) \in D$, sẽ nằm trên đường mức với giá trị:

$$\bar{\varepsilon} = c_1\,\bar{x}_1 + c_2\,\bar{x}_2$$

Xem hình 2.2. Vậy theo ngôn ngữ hình học, có thể phát biểu bài toán (2.10) – (2.12) như sau:

Trong số các đường mức (2.13) tìm đường mức với giá trị lớn nhất có thể:



Hình 2.2

$\alpha_{max} = c_1 x_1^* + c_2 x_2^*$ với $x^* = (x_1^*, x_2^*) \in D$

khi đó $x^* = (x_1^*, x_2^*) = x_{opt}$ với $f(x)_{max} = \alpha_{max}$

2.5.2. Phương pháp hình học giải bài toán QHTT 2 biến .

a. Nhận xét:

Hàm mục tiêu: $f(x) = c_1 x_1 + c_2 x_2$ có thể biểu diễn bằng dạng véc tơ, nhờ khái niệm của tính vô hướng:

$$f(x) = (c, x) \text{ với } c = (c_1, c_2), x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$$

Ta thấy: $f(x) = c_1 x_1 + c_2 x_2 = \alpha$

Khi dịch chuyển song song các đường mức (*) theo hướng véc tơ pháp tuyến

$\vec{c} = \{c_1, c_2\}$, thì giá trị đường mức α (tức f (x)) sẽ tăng.

Ngược lại, khi dịch chuyển theo hướng ngược lại của c , (hay cùng hướng với véc tơ đối của $\vec{c}$ là - $\vec{c}$), thì giá trị đường mức α (hay f(x) sẽ giảm) .

Vậy để giải bài toán trên ta tìm $x^* = (x_1^*, x_2^*) \in D$ mà $\alpha_{max} = f(x^*)$.

Từ đó, ta có thể nêu các bước giải bài toán trên bằng phương pháp hình học như sau:

b. Các bước giải bài toán .

Để giải bài toán trên ta tiến hành:

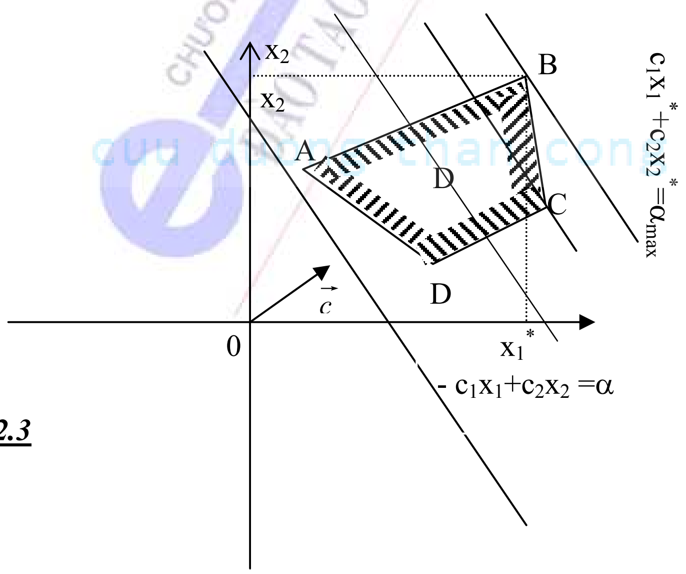
i - Xác định miền ràng buộc D của bài toán trong hệ trục toạ độ $0x_1x_2$.

ii – Vẽ đồ thị đường mức (*): $c_1x_1 + c_2 x_2 = \alpha$ với α nào đó,

iii - Xác định véc tơ pháp tuyến c = $\{c_1,c_2\}$ và dịch chuyển song song các đường mức (*) theo hướng của véc tơ c , cho đến vị trí tới hạn (vị trí tới hạn là vị trí mà đường mức vẫn còn cắt miền D, nhưng nếu tiếp tục dịch chuyển thì sẽ không cắt miền D nữa)

iv - Điểm (*hoặc nhiều điểm*) của D nằm trên giao điểm của đường mức ở vị trí tới hạn với miền D, là lời giải của bài toán.

Minh hoạ hình học (hình vẽ 2.3)



<u>Hình 2.3</u>

c. Chú ý: Ở trên, để tiện lợi ta xét bài toán QHTT chuẩn tắc, đối với bài toán QHTT bất kỳ cũng có thể giải được bằng phương pháp hình học. Có thể xảy ra các trường hợp:

i) - Miền D = ∅ tức các nửa mặt phẳng xác định bởi hệ ràng buộc.

$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \le b_i$(hoặc $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \ge b_i$)

Không có điểm chung, thì bài toán vô nghiệm.

ii) Miền D ≠ ∅:

- Nếu D - đa giác lồi, thì có duy nhất 1 điểm cực biên là phương án tối ưu; hoặc có vô số phương án tối ưu, khi đó 2 điểm cực biên là các phương án tối ưu (*theo tính chất bài toán QHTT*).

- Nếu D - khúc lồi *(đa giác lồi không giới nội*), thì bài toán có một phương án cực biên tối ưu, nếu miền D nằm về một phía của đường mức (2.4) cắt đường mức (2.4) tại 1 điểm, hoặc bài toán có vô số phương án tối ưu, nếu có 2 điểm cực biên là các phương án tối ưu, hoặc bài toán không có lời giải (f(x) không bị chặn). Có thể minh hoạ bằng một số ví dụ sau:

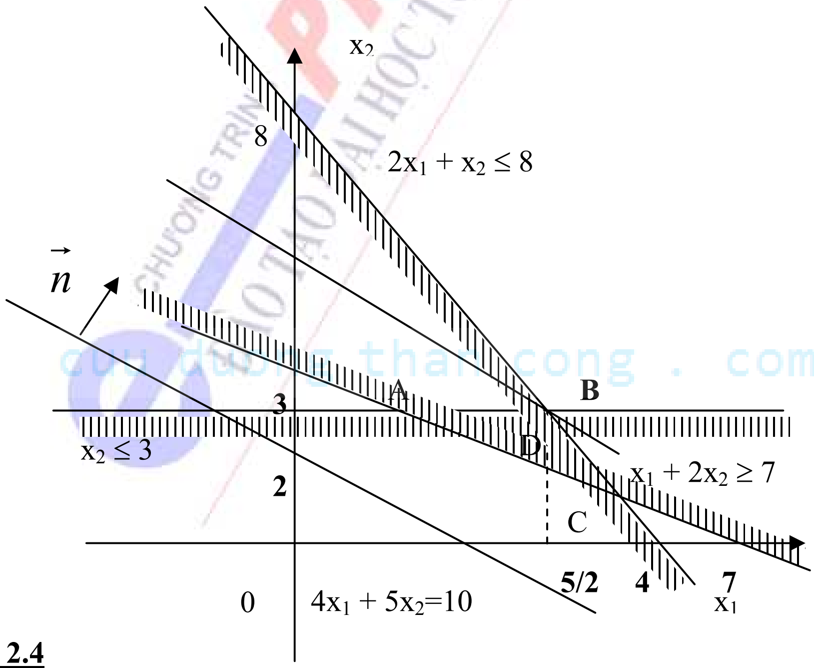
2.5.3 - Ví dụ:

Ví dụ 1: Giải bài toán sau bằng phương pháp hình học:

$$f(x) = 4x_1 + 5x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 8 \\ x_1 + 2x_2 \ge 7 \\ x_2 \le 3 \\ x_j \ge 0 \ (j = 1, 2) \end{cases}$$

Xác định miền ràng buộc D (hình vẽ 2.4) là đa giác lồi (tam giác ABC)



<u>Hình 2.4</u>

Xét đường mức:

$$4x_1 + 5x_2 = 10$$

(cho $\alpha = 10$, dễ vẽ)

Dịch chuyển đường mức song song với nhau theo hướng $\vec{n} = \{4; 5\}$, đỉnh B $(\frac{5}{2};3) \in D$ ở trên đường mức cuối cùng là điểm cực biên tối ưu:

$$x_{opt} = (\frac{5}{2};3) \Leftrightarrow$$

$$\alpha_{max} = f(x)_{max} = 4.\frac{5}{2} + 5.3 = 25$$

<u>Ví dụ 2:</u> Giải bài toán sau bằng phương pháp hình học:

$$f(x) = 4x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 4 \\ -x_1 + 3x_2 \le 3 \\ 2x_1 - x_2 \le 2 \\ x_j \ge 0 \ (j = 1,2) \end{cases}$$

Xác định miền ràng buộc D (*hình vẽ 2.5*)

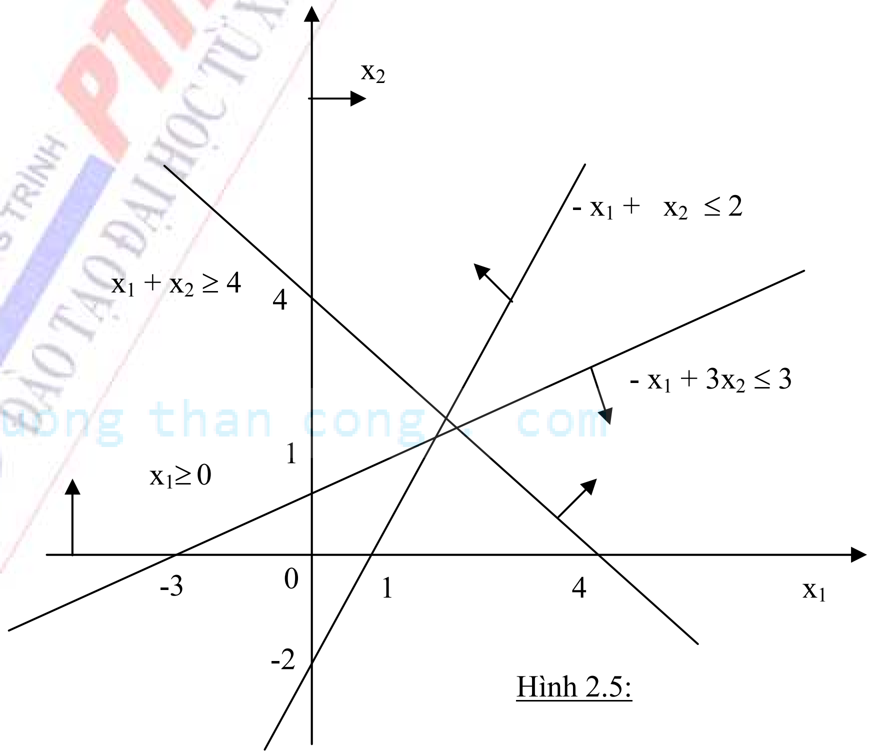
Ta thấy $D = \phi$

Vậy bài toán không có lời giải.

Ví dụ 3: Giải bài toán sau bằng phương pháp hình học:

$$f(x) = 3x_1 + 4x_2 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \ge 4 \\ -x_1 + x_2 \le 2 \\ 2x_1 - 4x_2 \le 12 \\ x_j \ge 0 \ (j = 1,2) \end{cases}$$



<u>Hình 2.5:</u>

Xác định miền ràng buộc D của bài toán: khúc lồi (*hình vẽ 2.6*)

Xét đường mức:

$3x_1 + 4x_2 = 4$

Dịch chuyển song song các đường mức theo hướng ngược với $\vec{n} = \{3;4\}$

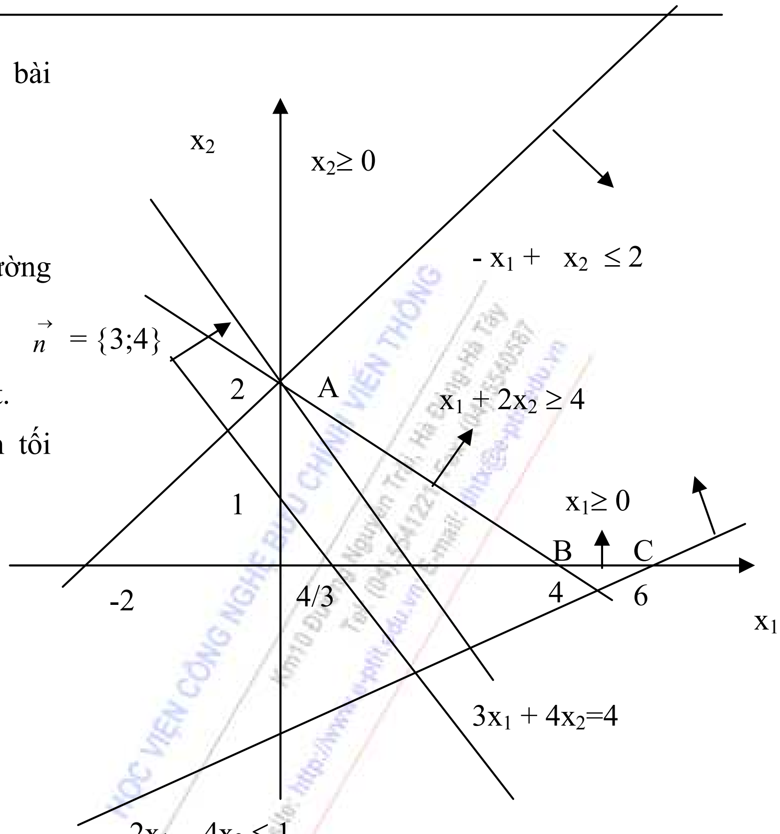
Cắt D tại điểm A (0 ;2) là duy nhất.

Vậy A (0;2) là điểm cực biên tối ưu:

$X_{opt} = (0;2) \Leftrightarrow$

$\alpha_{min} = f(x)_{min} =$

$= 3.0 + 2.4 = 8$



Hình 2.6:

Chú ý: Nếu ở bài toán trên, giữ nguyên miền ràng buộc, còn $f(x) = 3x_1 + 4x_2 \to \max$ thì bài toán sẽ vô nghiệm, bởi vì khi dịch chuyển song song các đường mức theo hướng $\vec{n} = \{3 ; 4\}$, sẽ có vô số các đường thẳng song song với đường mức đi qua điểm cực biên C và có khoảng cách lớn tuỳ ý đến nó, tức f (x) $\to +\infty$ (f(x) không bị chặn trên)

Ví dụ 4: Giải bài toán sau bằng phương pháp hình học:

$$f(x) = 3x_1 + 6x_2 \to \min$$

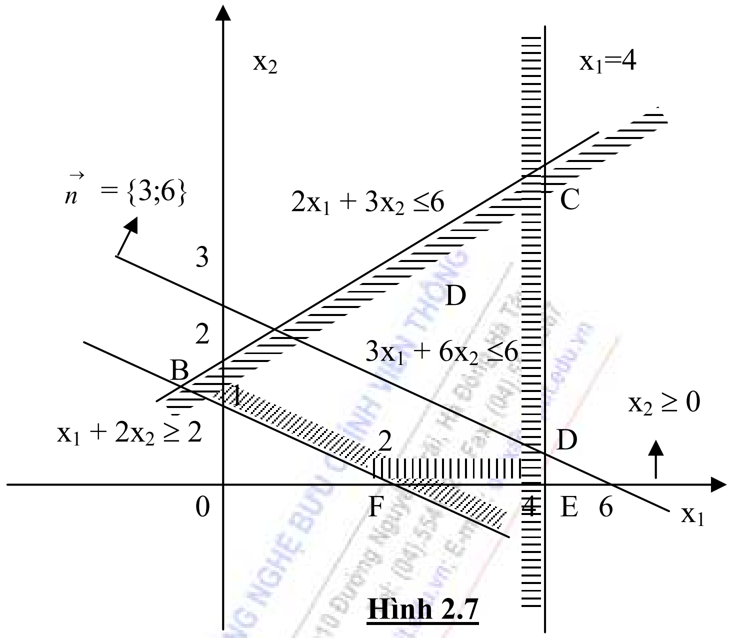
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 2 \\ -2x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ 0 \leq x_1 \leq 4 \end{cases}$$

Xác định miền ràng buộc D của bài toán (hình 2.7)

Xét đường mức: $3x_1 + 6x_2 = 18$

Dịch chuyển song song các đường mức theo hướng ngược với $\vec{n} = \{3;6\}$, có 2 điểm A (0;1), F (2;0) nằm trên đường mức cuối cùng.

Vậy có 2 điểm cực biên tối ưu $\Rightarrow$ bài toán có vô số lời giải là mọi tổ hợp lồi của 2 điểm cực biên tối ưu trên, tức là vô số các điểm nằm trên đoạn thẳng [AF] cũng là phương án tối ưu (*trường hợp đường mức cuối cùng trùng với một cạnh của miền D*)



Hình 2.7

Qua phương pháp hình học, ta thấy rằng:

- Nếu bài toán QHTT có phương án tối ưu, thì ít nhất 1 đỉnh của miền D là tối ưu.

- Nếu miền D giới nội và khác rỗng, thì chắc chắn có phương án tối ưu.

- Nếu miền D không giới nội, nhưng hàm mục tiêu bị chặn trên miền D, thì cũng chắc chắn có phương án tối ưu.

2.6. PHƯƠNG PHÁP ĐƠN HÌNH

2.6.1. Cơ sở lý luận của phương pháp

a. Đường lối chung

Xét bài toán quy hoạch tuyến tính chính tắc

$$f(X) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \rightarrow \min (\max) \qquad (2.13)$$

$$\begin{cases} \sum_{j=}^{n} a_{ij} x_j = b_i \, (i = \overline{1, m}) \\ x_j \geq 0 (j = \overline{1.n}) \end{cases} \qquad (2.14)$$

Với giả thiết m < n; $b_1 \geq 0$ ($i = \overline{1, m}$) và bài toán không suy biến.

Dạng véctơ của bài toán:

$$f(X) = \langle C, X \rangle \rightarrow \min (\max)$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} A_1 x_j \begin{pmatrix} = \\ \geq \\ \leq \end{pmatrix} B \\ x_j \geq 0 (j = \overline{1, n}) \end{cases}$$

Xuất phát từ một phương án cực biên $x^{(0)} = (x^0{}_1, x^0{}_n$ với cơ sở J_0, ta tìm cách đánh giá $x^{(0)}$, nếu $x^{(0)}$ chưa tối ưu thì tìm cách chuyển sang phương án cực biên $x^{(1)}$ tốt hơn. Vì số phương án cực bkên là hữu hạn nên sau một số hữu hạn bước lặp sẽ tìm được phương án cực biên tối ưu hoặc phát hiện bài toán không có lời giải.

b. Ước lượng các biến

Giả sử $x^{(0)}$ là một phương án cực biên, cơ sở J_0. Gọi $\Delta_k$là ước lượng của biến x_k theo cơ sở J_0 được xác định bởi:

$$\Delta_k = \sum_{j\in J_0} c_j z_{jk} - c_k \ (k = \overline{1, n})$$

Trong đó z_{jk} là hệ số phân tích của véctơ A_k qua véctơ cơ sở A_j ($j \in J_0$) nghĩa:

$$A_k = \sum_{j\in J_0} z_{jk} A_i, \qquad \text{do đó } z_{jk} = A^{-1}{}_j A_k \ (j \in J_0, k = \overline{1, n})$$

Chú ý rằng ước lượng các biến cơ sở x_j: $\Delta_j = 0$ ($\forall j \in J_0$). Vì khi đó:

$$Z_{jk} = \begin{cases} 1 \text{ nếu } k = j \\ 0 \text{ nếu } k \neq j \end{cases}$$

c. Dấu hiệu tối ưu

Nếu phương án cực biên $x^{(0)}$, cơ sở J_0 của bài toán (2.13) - (2.15) có $\forall \Delta_k < 0$ (> 0). ($k \notin J_0$) thì $X^{(0)}$ là phương án tối ưu duy nhất.

Nếu phương án cực biên $X^{0)}$, cơ sở J_0 thoả mãn dấu hiệu tối ưu mà $\exists \Delta_k = 0$. ($k \notin J_0$) thì bài toán có thể có phương án tối ưu khác ngoài $X^{(0)}$.

d. Định lý cơ bản

Đối với phương án cực biên $X^{(0)}$, cơ sở J_0 của bài toán (2.13) - (2.15) mà $\exists \Delta_k > 0$ (< 0), ($k \notin J_0$) thì sẽ sảy ra 1 trong 2 trường hợp sau:

Nếu có một $\Delta_k > 0$ (< 0), ($k \notin J_0$) mà $\forall z_{jk} \leq 0$, ($j \notin J_0$) thì bài toán không có lời giải.

Nếu mỗi $\Delta_k > 0$ (< 0), ($k \notin J_0$) đều tồn tại ít nhất một $Z_{jk} > 0$, ($j \notin J_0$) thì chuyển sang được phương án cực biên mới $X^{(1)}$ tốt hơn $X^{(0)}$; $f[X^{(1)}] < f[X^{(0)}]$ ($[X^{(1)}] > f[X^{(0)}]$).

2.6.2. Thuật toán của phương pháp đơn hình

Toàn bộ quá trình tính toán được sắp xếp theo một trình tự chặt chẽ đảm bảo hiệu quả của việc tìm lời giả của bài toán QHTT. Trình tự đó được gọi là thuật toán.

Không mất tính tổng quát ta xét bài toán QHTT dạng chuẩn.

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x_1 + a_{1m+1}x_{m+1} + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ x_2 + a_{2m+1}x_{m+1} + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_m + a_{mim+1}x_{m+1} + \dots + a_{mim}x_n = b_m \\ x_j \ge 0(j = \overline{1,n}), b_i \ge 0(i = \overline{1,m}), m < n \end{cases}$$

Bài toán có ngay phương án cực biên $x^{(0)} = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0, 0\dots 0) = (b_1, b_2, \dots, b_m, 0, \dots, 0)$

Với cơ sở J_0 gồm m véctơ đơn vị $A_1, A_2, \dots, A_m$; $J_0 = \{1, 2, \dots, m\}$

Thuật toán đơn hình gồm các bước sau:

Bước1. Lập bảng đơn hình

Ta lập một bảng ghi các hệ số phân tích của véctơ B và véctơ A_k,

$k = (1,2, \dots, n)$ qua cơ sở J_0 theo mẫu dưới đây. Với phương án này thì $Z_{jk} = a_{jk}$ $(j \in J_0)$. Bảng này gọi là bảng đơn hình với phương án cực biên $x^{(0)}$, cơ sở J_0.

Hệ số	Cơ sở	Phương án	c_1 $c_2 \dots c_J \dots c_m$ $c_{m+1} \dots c_8 \dots c_n$
			A_1 $A_2 .. A_J \dots A_m$ $A_{m+1} \dots A_8 \dots A_n$
c_1	A_1	X_1^0	1 0 ... 0.... 0 $Z_{1m+1} \dots Z_{18} \dots Z_{1n}$
c_2	A_2	X_2^0	0 1 .... 0.... 0 $Z_{2m+1} \dots Z_{28} \dots Z_{2n}$
....	....	.....	....
c_r	A_r	X_r^0	0 0 .... 1.... 0 $Z_{rm+1} \dots \boxed{Z_{r8}} .. Z_{rn}$
...	....	....	....
c_m	A_m	X_m^0	0 0 .... 0 ... 1 $Z_{m\,m+1} \dots Z_{m.8} \dots Z_{mn}$
		$f(X^{(0)})$	0 0.... 0 .... 0 $\Delta_{m+1} \dots$ Δ_8 .... Δ_n

Hàng cuối bảng gọi là hàng ướclượng Δ_k, $(k = 1, 2, \dots, n)$

$$f[x^{(0)}] = ; \sum_{j \in J_n} c_j x_j^0 \quad \Delta_k = \sum_{j \in J_n} c_j Z_{jk} - c_k\ (k \notin J_0);\ \Delta_k = 0\ (k \in J_0)$$

Bước 2. Kiểm tra tính tối ưu của phương án cực biên $x^{(0)}$.

Nếu $\Delta_k \le 0$, $(\forall k \notin J_0)$ thì $x^{(0)} = x_{0pt}$, $f_{min} = f[x^{(0)}]$ thuật toán kết thúc.

Nếu tồn tại $\Delta_k > 0$, $(k \notin J_0)$ mà $Z_{jk} \le 0$, $(j \in J_0)$ thì bài toán không có lời giải vì $f[x] \to -\infty$, thuật toán kết thúc.

Nếu mỗi $\Delta_k > 0$, $(k \notin J_0)$ mà $\exists Z_{jk} > 0$, $(j \notin J_0)$ thì chuyển sang bước 3.

Bước 3. Tìm véctơ đưa vào cơ sở và véctơ loại khỏi cơ sở.

Giả sử: max $\{\Delta_k > 0, (k \notin J_0)\} = \Delta$, véctơ A_s được đưa vào cơ sở, tính:

$$\theta_0 = \min z_{jt} > J_0 \left\{ \frac{x_j^0}{Z_{js}} ; j \in J_0 \right\}, \text{ giả sử } \theta_0 = \frac{x_r^0}{Z_{rs}}, \text{ véctơ } A_r \text{ loại khỏi cơ sở.}$$

Như vậy, $J_1 = \{J_0 \backslash \{r\} \cup \{S\}\}$. Hệ số phân tích Z_{rs} nằm tại giao của hãng r và cột s gọi là phần tử trục của phép biến đổi.

Bước 4. Biến đổi bảng, xây dựng phương án cực biên mới $x^{(1)}$ với cơ sở J_1. Trong bảng đơn hình tương ứng với phương án cực biến $x^{(1)}$, cơ sở J_1 ta thay c_s, A_s vào vị trí của c_r, A_r các c_j, A_j ($j \neq r$, $j \in J_0$) được giữ nguyên. Các thành phần của $x^{(1)}$ được tính theo công thức:

$$x_j^2 = \begin{cases} 0 & \text{nếu } j \notin J_0 \\ \dfrac{x_r^{(0)}}{Z_{rs}} & \text{nếu } j \in J_0, j = r \\ x_j^{(0)} - & \text{nếu } j \in J_0, j \neq r \end{cases}$$

Cơ sở $J_1 = \{J_0 \backslash \{r\} \cup \{S\}: \{J_1\} = \{J_0\} = m$

Hệ số phân tích $Z_{jk}^{(1)}$ ($j \in J_1$, $k \notin J_1$) được xác định bởi công thức:

$$Z_{jk}^{(1)} = \begin{cases} \dfrac{x_{rk}^{(0)}}{Z_{rs}} & \text{nếu } j \in J_0, j = r \\ Z_{jk} - \qquad Z_{rs} & \text{nếu } j \in J_0, j \neq r \end{cases}$$

Công thức này đúng cho cả các thành phần ở cột phương án và ở hàng ướclượng Δ_1.

Ta có: $f[x^{(1)}] = f[x^{(0)}] - \theta\Delta$, hay $f[x^{(1)}] = \sum_{j \in J_1} c_j x_j^{(1)}$

$$\Delta_k^1 = \Delta_k - \theta\Delta, \text{ hay } \Delta_k^1 = \sum_{j \in J_i} c_{bc} Z_{jk}^1 - c_k \quad (k \notin J_1)$$

Xem $X^{(1)}$ đóng vai trò như $X^{(0)}$, lập lại quá trình trên từ bước hai trở đi sau một số hữu hạn lần hoặc phát hiện bài toán không có lời giải hoặc tìm được phương án tối ưu của bài toán.

Chú ý khi thực hiện thuật toán:

Đối với bài toán $f(x) \to \max$ có thể giải trực tiếp bằng thuật toán đơn hình với véctơ A, được đưa vào cơ sở có $\Delta_s = \min\{\Delta_k < 0, k \notin J_0\}$ còn xác định véctơ loại khỏi cơ sở A_r và các thành phần $x_j^{(1)}$, $Z_{jk}^{(1)}$ ($j \in J_1$, $k \notin J_1$) được tính tương tự, hoặc cũng có thể chuyển thành bài toán:

$g(x) = - f(x) \to \min$ những chú ý rằng $f_{max} = - g_{min}$.

2.6.3. Phương pháp tìm phương án cực biên xuất phát - bài toán "M"

Khi dùng thuật toán đơn hình giải bài toán QHTT chính tắc với giả thiết đã biết một phương án cực biên với cơ sở đơn vị tương ứng. Nhưng nhìn chung giả thiết này không phải bao giờ cũng có ngay. Vì vậy để áp dụng được thuật toán đơn hình cần phải có phương pháp tổng quát cho phép tìm được một phương án cực biên mà không phụ thuộc vào cấu trúc riêng biệt của bài toán. Một trong những phương pháp như vậy là phương pháp biến giả hay phương pháp tìm phương án cực biên xuất phát.

a. Nội dung phương pháp

Xây dựng bài toán mới là bài toán biến giả hay bài toán "M" từ bài toán đang xét. Bài toán "M" có ngay phương án cực biên xuất phát và có đủ điều kiện áp dụng thuật toán đơn hình để giải, đồng thời từ kết quả của bài toán "M" đưa ra được kết luận cho bài toán đang xét.

b. Xây dựng bài toán "M"

Xét bài toán chính tắc:

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min \qquad (2.16)$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} c_j x_j = b_i (i - \overline{1,m}) & (2.17) \\ x_j \geq 0 (j = \overline{1,n}) & (2.18) \end{cases}$$

Bài toán (2.16) ÷ (2.18) gọi là bài toán đầu. Giả thiết $b_i \geq 0$ $(i = \overline{1,m})$ và ma trận các hệ số trong hệ ràng buộc (2.17): $A = (a_{ij})_{mxn}$ không chứa véctơ đơn vị nào.

Bài toán "M" được xây dựng như sau:

Thêm vào vế trái của phương trình thứ i $(i = \overline{1,m})$ trong hệ ràng buộc (2.17) một biến giả $x_{n+i} \geq 0$ $(i = \overline{1,m})$. Hệ số của các biến giả x_{n+i} trên hàm mục tiêu đều bằng M, với m là số dương lớn tuỳ ý (M > 0), bài toán "M" có dạng:

$$f(\overline{X}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + M \sum_{i=1}^{m} X_{n+i} \to \min$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_j x_j + x_{n+i} = b_i (i - \overline{1,m}) \\ x_j \geq 0 (j = \overline{1,n}) \end{cases}$$

Bài toán "M" có ngay phương án cực biên xuất phát:

$\overline{x}^{(0)} = (\underbrace{0,0,....,0}_{n\ \text{số}},\ b_1, b_2,...., b_m)$ với cơ sở J_0 là: $E_m = (A_{n+1}, A_{n+2}, ..., A_{n+m})$;

$J_0=\{n+1, n+2,...,n + m\}$

Do vậy áp dụng được thuật toán đơn hình để giải bài toán "M".

Từ cách xây dựng bài toán "M" như trên ta thấy:

Nếu $\overline{x} = \left[x_1, x_2,....., x_n, \underbrace{0,0,....,0}_{n\ \text{số}}\right]$ là phương án của bài toán "M" thì $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ là phương án của bài toán ban đầu và ngược lại, đồng thời $f(x) = f(\overline{x})$.

c. Mối quan hệ giữa bài toán "M" và bài toán ban đầu

Nếu bài toán "M" có:

$$\overline{X}_{opt} = \overline{X}^* = \left[x_1^*, x_2^*, ...x_n^*, \underbrace{0,0,....,0}_{m\ số}\right]$$ thì bài toán ban đầu có $X_{opt} = x^* = \left(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*\right)$ và $f(\overline{x}^*) = f(x^*)$.

Nếu bài toán "M" có $\overline{x}_{opt} = \overline{x}^* = \left(x_1^*, x_2^*, ..., x_{n+m}^*\right)$ trong đó $\exists$ ít nhất một $x_{n+i}^* > 0 (i = \overline{1, m})$ thì bài toán ban đầu không có phương án nào (không giải được).

Nếu bài toán "M" vô nghiệm thì bài toán ban đầu cũng vô nghiệm.

d. Chú ý khi giải bài toán "M"

Nếu bài toán ban đầu có nghiệm X_{opt} thì nghiệm này chỉ có thể nhận được sau ít nhất m + 1 bảng đơn hình khi giải bài toán "M". Nếu trong ma trận hệ số trong hệ ràng buộc (1.17): A = $(a_{jj})_{mxn}$ đã chứa m_1 véctơ đơn vị khác nhau ($m_1 < m$) thì khi xây dựng bài toán "M" chỉ cần thêm m -m_1 biến giả.

Vì hàm mục tiêu $f(\overline{x})$ là tuyến tính đối với M nên các số ước lượng Δ_K của bài toán "M" có dạng:

Do đó: $\Delta_k = M\alpha_k + \beta_k$ ($\alpha,\beta \in R; k \notin J$)

$$\Delta_k > \Delta_h \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \alpha_k > \alpha_h \\ \alpha_k = \alpha_h ; \beta_k > \beta_h \end{array}\right.$$

Ở mỗi bước cải tiến phương án cực biên, nếu một biến giả bị đưa ra khỏi cơ sở thì nó không thể quay lại cơ sở được nữa. Do đó ở bảng đơn hình ứng với phương án cực biên mới ta không cần tính toán với cột ứng với véctơ tương ứng với biến giả đó.

Với bài toán f(x) $\rightarrow$ max bài toán "M" tương ứng có hàm mục tiêu là:

$$f(\overline{x}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j - M \sum_{i=1}^{m} x_{n+i} \rightarrow \max \quad (M >> 0)$$

Các điều kiện còn lại tương tự bài toán f(x) $\rightarrow$ min

2.6.4. Các bài tập mẫu

Bài 1. Giải bài toán sau bằng phương pháp đơn hình.

$$f(x) = 2x_3 + x_4 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 + x_4 = 6 \\ x_2 + x_3 - 2x_4 = 2 \\ x_j \geq 0 (j = \overline{1,4}) \end{cases}$$

Bài toán có dạng chuẩn, phương án cực biên xuất phát: $X^{(0)} = (6,2,0,0)$ với cơ sở $\{A_1, A_2\} = E_2$

Lập bảng đơn hình:

	C_j	A_j cơ sở	Phương án	0	0	2	- 1
				A_1	A_2	A_3	A_4
$X^{(0)} \leftrightarrow$	0	A_1	6	1	0	2	1
	0	A_2	2	0	1	1	2
			0	0	0	-2	1
$X^{(1)} \leftrightarrow$	-1	A_4	6	1	0	2	1
	0	A_2	14	2	1	5	0
			- 6	- 1	0	- 4	0

Từ bảng đơn hình tương ứng với phương án cực niên $x^{(1)}$ ta thấy phương án $x^{(1)}$ có $\Delta_k \le 0$, (k = $\overline{1,4}$) . Đặc biệt $\Delta_k \le 0$ ($k \notin J_1$). Do đó bài toàn có nghiệm duy nhất:

$X_{opt} = X^{(1)} = (0,14,0,6)$ và $f_{min} = f\,[X^{(1)}\,] = -\,6$.

Bài 2. Giải bài toán sau bằng phương pháp đơn hình

$$f(x) = -\,x_1 + 4x_2 + 3x_3 \to \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 16 \\ -4x_1 + 2x_3 + x_5 = 8 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_6 = 12 \\ x_j \ge 0 (j = \overline{1,6}) \end{cases}$$

Bài toán có ngay phương án cực biên xuất phát:

$x^{(0)} = (0,0,0,16,8,12)$ với cơ sở $\{A_4, A_5, A_6\}$

Lập bảng đơn hình:

	C_1 Cơ sở	A_1 Cơ sở	Phương án	- 1	4	3	0	0	0
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
$x^{(0)} \leftrightarrow$	0	A_4	16	2	1	- 2	1	0	0
	0	A_5	8	- 4	0	2	0	1	0
	0	A_6	12	1	2	-1	0	0	1
			0	1	- 4	- 3	0	0	0
$x^{(1)} \leftrightarrow$	0	A_4	10	3/2	0	-3/2	1	0	-1/2
	0	A_5	8	- 4	0	3	0	1	0
	4	A_2	6	1/2	1	-1/2	0	0	1/2
			24	3	0	- 5	0	0	2
$x^{(2)} \leftrightarrow$	0	A_4	16	-3/2	0	0	1	3/4	-1/2
	3	A_3	4	- 2	0	1	0	1/2	0
	4	A_2	8	-1/2	1	0	0	1/4	1/2
			44	-7	0	0	0	5/2	2

Ta thấy trong bảng đơn hình ứng với phương án cực biên $x^{(2)}$, cơ sở J_2 có $\Delta_1 = -\,7 < 0$ đồng thời $Z_{j1} < 0\ \forall_j \in J_2$ nên bài toán không có phương án tối ưu vì trị số hàm mục tiêu tăng vô hạn trên tập phương án.

Bài 3. Giải bài toán sau bằng phương pháp đơn hình

$$f(x) = -\,5x_1 - 2x_2 - 10/3x_3 \to \min$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 \geq 46 \\ 4x_1 + 2x_3 + 3x_5 \leq 38 \\ 3x_1 + x_3 \leq 21 \\ x_j \geq 0 (j = \overline{1,3}) \end{cases}$$

Đưa bài toán về dạng chính tắc đó cũng là bài toán dạng chuẩn:

$f(x) = -5x_1 - 2x_2 - 10/3x_3 \to \min$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_4 = 46 \\ 4x_1 + 2x_3 + 3x_5 + x_5 = 38 \\ 3x_1 + x_3 + x_6 = 21 \\ x_j \geq 0 (j = \overline{1,6}) \end{cases}$$

Bài toán dạng chuẩn có ngay phương án cực biên xuất phát:

$x^{(0)} = (0,0,0,46,38,21)$ với cơ sở đơn vị $\{A_4, A_5, A_6\} = E_3$.

Lập bảng đơn hình.

	C_1 Cơ sở	A_1 Cơ sở	Phương án	-5 A_1	- 2 A_2	-10/3 A_3	0 A_4	0 A_5	0 A_6
	0	A_4	46	2	4	3	1	0	0
$x^{(0)} \leftrightarrow$	0	A_5	38	4	2	3	0	1	0
	0	A_6	21	3	0	1	0	0	1
			0	5	2	10/3	0	0	0
	0	A_4	32	0	4	7/3	1	0	-2/3
$x^{(1)} \leftrightarrow$	0	A_5	10	0	2	5/3	0	1	-4/3
	-5	A_1	7	1	0	1/3	0	0	1/3
			-35	0	2	5/3	0	0	-5/3
	0	A_4	12	0	0	- 1	1	-2	2
$x^{(2} \leftrightarrow$	-2	A_2	5	0	1	5/6	0	1/2	-4/6
	-5	A_1	7	1	0	1/3	0	0	1/3
			-45	0	0	0	0	-1	-1/3
	0	A_4	18	0	-6/5	0	1	-7/5	6/5
$x^{(3} \leftrightarrow$	-10/3	A_5	6	0	6/5	1	0	3/5	-4/5
	-5	A_1	5	1	-2/5	0	0	-1/5	3/5
			-45	0	0	0	0	- 1	-1/3

Trong bảng đơn hình ứng với phương án cực biên $x^{(2)}$ có $\Delta_k \leq 0$ ($k = \overline{1,6}$) nên:

$X_{opt} = X^{(2)} = (7,5,0,12,0,0)$

Do đó bài toán ban đầu có: $x^{1}_{0pt} = (7,5,0)$ và $f_{min} = -45$

Tuy nhiên trong bảng đơn hình với x^2_{0pt} có $\Delta_3 = 0$ ($3 \notin J_0$) và $\exists Z_{23} = 5/6 > 0$; $Z_{33} = 1/3 > 0$. Ta đưa A_3 vào cơ sở sẽ được phương án X_{opt} khác. $X_{0pt} = X^{(3)} = (5,0,6,18,0,0)$ nên bài toán có thêm phương án tối ưu: $x^2_{opt} = (5,0,6)$.

Vậy bài toán có vô số phương án tối ưu, tập phương án tối ưu có dạng:

$$\{X_{opt}\}=\{\lambda x^1_{opt} + (1-\lambda)x^2_{opt}; 0 \le \lambda \le 1\} \text{ và } f_{min} = -45$$

Bài 4. Giải bài toán bằng phương pháp đơn hình

$$f(x) = -x_1 + x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_3 + x_5 = 5 \\ 3x_1 - x_4 + 5x_5 \le 10 \\ x_2 - x_5 = 1 \\ x_j \ge 0 (j = \overline{1,5}) \end{cases}$$

Đưa bài toán về dạng chính tắc với biến phụ $x_6 \ge 0$

$$f(x) = -x_1 + x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_3 + x_5 = 5 \\ 3x_1 = x_4 + 5x_5 + x_6 = 10 \\ x_2 - x_5 = 1 \\ x_j \ge 0 (j = \overline{1,6}) \end{cases}$$

Bài toán có phương án cực biên xuất phát:

$X^{(0)} = (0,1,5,0,0,10)$ với cơ sở $\{A_3, A_6, A_2\} = E_3$

Lập bảng đơn hình

	C_i Cơ sở	A_i Cơ sở	Phương án	-1 A_1	1 A_2	0 A_3	0 A_4	0 A_5	0 A_6
$x^{(0)} \leftrightarrow$	0	A_1	5	-1	0	1	0	1	0
	0	A_6	10	3	0	0	-1	$\boxed{5}$	1
		A_2	1	0	1	0	0	-1	0
			1	1	0	0	0	-1	0
$x^{(1)} \leftrightarrow$	0	A_3	3	-8/4	0	1	$\boxed{1/5}$	0	-1/5
	0	A_5	2	3/5	0	0	-1/5	1	1/5
	1	A_2	3	3/5	1	0	-1/5	0	1/5
			3	8/5	0	0	-1/5	0	1/5
$x^{(2} \leftrightarrow$	0	A_4	15	-8	0	5	1	0	-1
	0	A_5	5	-1	0	1	0	1	0
	1	A_2	6	-1	1	1	0	0	0
			6	0	0	1	0	0	0

Trong bảng đơn hình ứng với phương án $x^{(2)}$ có $\Delta_k \geq 0$ $(k = \overline{1,6})$ nên $x^{(2)}$ là phương án cực biên tối ưu, trong đó $\Delta_1 = \Delta_6 = 0$ $(1,6 \notin J_2)$ nhưng $Z_{j1} < 0$, $Z_{j6} \leq 0$ $(j \in J_2)$ do đó: $x_{opt} = x^{(2)} = (0,6,0,15,5)$ là phương án cực biên tối ưu duy nhất của bài toán ban đầu và $f_{max} = f[x^{(2)}] = 6$.

Bài 5. Cho bài toán

$$f(x) = -2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - 4x_5 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_1 - x_3 + 4x_5 - 2x_5 \geq -4 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 \geq 24 \\ 5x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 = 46 \\ x_j \geq 0 (j = \overline{1,5}) \end{cases}$$

a. Chứng tỏ $x^{(0)} = (0,2,0,20,0)$ là phương án cực biên, lợi dụng $x^{(0)}$ giải bài toán bằng phương pháp đơn hình.

b. Dựa vào phương án $x^{(0)}$ tìm lời giải của bài toán khi hàm mục tiêu có dạng:

$f(x) = 5x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 4x_4 - 2x_5 \rightarrow \min$

Giải.

a. Vì $x^{(0)} \in R^5$ thoả mãn mọi ràng buộc của bài toán, thoả mãn chặt các ràng buộc 2,3 và 3 ràng buộc dấu: $x_1^{(0)} = x_3^{(0)} = x_5^{(0)} = 0$. Hệ 5 ràng buộc chặt này độc lập tuyến tính vì định thức của các matrận tạo bởi các véctơ này:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

Nên $x^{(0)}$ là phương án cực biên của bài toán. Để giải bài toán này bằng phương pháp đơn hình, trước hết ta đưa bài toán về dạng chính tắc:

$$f(x) = -2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x_1 - x_3 + 4x_5 - 2x_5 + x_6 = -4 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 + x_7 = 24 \\ 5x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 = 46 \\ x_j \geq 0 (j = \overline{1,7}) \end{cases}$$

Từ phương án cực biên $X^{(0)}$ của bài toán đã cho suy ra phương án cực biên của bài toán chính tắc là $x^{-(0)} = (0,2,0,20,0,2,0)$ với cơ sở $\{A_2, A_4, A_6\}$ và $J_0 = \{2,4,6\}$. Ta tìm matrận hệ số phân tích của véctơ A_k $(k = \overline{1,7})$ và véctơ B qua cơ sở J_0 bằng phương pháp biến đổi sơ cấp trên các hàng của ma trận.

$$\left[\begin{array}{cccccccc} -1 & 1 & -4 & 0 & 2 & 1 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 24 \\ 5 & 3 & 1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 46 \end{array}\right] \xrightarrow[2h_2-h_3\to h_3]{\substack{h_1\to h_1 \\ +h_2\to h_2}}$$

$$\left[\begin{array}{cccccccc} -1 & 1 & -4 & 0 & 2 & 1 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 24 \\ 1 & 1 & -3 & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow[2h_2-h_3\to h_3]{\substack{-h_1+h_1\to h_1 \\ -2h_3+h_2\to h_2}}$$

$$\left[\begin{array}{cccccccc} -2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 5 & 1 & -2 & 0 & -3 & 20 \\ 1 & 1 & -3 & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right]$$

Lập bảng đơn hình ứng với phương án cực biên $x^{(0)}$ và áp dụng thuật toán đơn hình.

Toàn bộ quá trình tính toán ở bảng

	C_1 Cơ sở	A_1 Cơ sở	Phương án	-2	-1	3	1	-4	0	0
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7
$x^{(0)}\leftrightarrow$	0	A_6	2	-2	0	-1	0	1	1	-2
	1	A_4	20	1	0	$\boxed{5}$	1	-2	0	-3
	-1	A_2	2	1	1	-3	0	1	0	2
			18	2	0	5	0	1	0	-5
	0	A_6	6	-9/5	0	0	1/5	$\boxed{3/5}$	1	-13/5
$x^{(1)}\leftrightarrow$	3	A_5	4	1/5	0	10	1/5	-2/5	0	-3/5
	-1	A_2	14	8/5	1		3/5	-1/5	0	1/5
			-2	-1	0	0	-1	3	0	-2
	-4	A_5	10	-3	0	0	1/3	1	5/3	-13/3
	3	A_5	8	-1	0	1	1/3	0	2/3	-7/3
$x^{(2)}\leftrightarrow$	-1	A_2	16	1	1	0	2/3	0	1/3	-2/3
			-32	-1	0	0	-2	0	-5	11

Trong bảng đơn hình ứng với phương án cực biên $X^{(2)}$ có $\Delta_7 = 11 > 0$ nhưng $Z_{j7} < 0$ $(\forall j\in J_2)$ nên bài toán không có lời giải vì $f(x) \to -\infty$ trên tập phương án.

b. Trong trường hợp

$$f(X) = 5X_1 + 2X_2 + 4X_3 + 4X_4 - 2X_5 \to \min$$

Ta lập bảng đơn hình ứng với các c_k mới và với $x^{(0)} = (0,2,0,20,0,2,0)$.

	C_I Cơ sở	A_I Cơ sở	Phương án	5 A_1	2 A_2	4 A_3	4 A_4	-2 A_5	0 A_6	0 A_7
$x^{(0)}\leftrightarrow$	2	A_6	2	-2	0	-1	0	1	1	-2
	4	A_4	20	1	0	$\boxed{5}$	1	-2	0	-3
	2	A_2	2	1	1	-3	0	1	0	2
			84	2	0	10	0	-4	0	-8
$x^{(1)}\leftrightarrow$	0	A_6	6	-9/5	0	0	1/5	$\boxed{3/5}$	1	-13/5
	4	A_5	4	1/5	0	1	1/5	-2/5	0	-3/5
	2	A_2	14	8/5	1	0	3/5	-1/5	0	1/5
			-2	-1	0	0	-1	3	0	-2
$x^{(2)}\leftrightarrow$	-2	A_5	10	-3	0	0	1/3	1	5/3	-13/3
	4	A_5	8	-1	0	1	1/3	0	2/3	-7/3
	2	A_2	16	1	1	0	2/3	0	1/3	-2/3
			44	-1	0	0	-2	0	0	-2

Bảng đơn hình tương ứng với phương án cực biên $X^{(1)}$ có $\Delta_k \le 0$ ($k = \overline{1,7}$) nên $X^{(1)}_{opt} = X^{(1)}$ = (0,14,4,0,0,6,0) và $f_{min} = 44$. Nhưng trong đó có $\Delta_5 = 0$ ($5 \notin J_1$) do đó đưa A_5 vào cơ sở ta được phương án tối ưu khác:

$$X^{(2)}_{opt} = X^{(2)} = (0,16,8,0,10,0,0) \text{ với cơ sở } \{A_5, A_3, A_2\}.$$

Vậy khi đó bài toán có vô số phương án tối ưu:

$$\{X_{opt}\}=\{\lambda\, X^{(1)}_{opt} +(1-\lambda)\, X^{(2)}_{opt};\ 0 \le \lambda \le 1\} \text{ và } f_{min} = 44$$

Bài 6. Giải bài toán bằng phương pháp đơn hình

$$f(x) = 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_5 - 2x_4 & = 2 \\ 3x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 & = 6 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = 7 \\ x_j \ge 0 \quad (j = \overline{1,4}) \end{cases}$$

Vì trong matrận hệ số của các ẩn trong hệ ràng buộc không chứa véctơ đơn vị nào, ta lập bài toán "M" với các ẩn giả $x_5, x_6, x_7 \ge 0$ có dạng:

$$f(\overline{x}) = 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + M(x_5 + x_6 + x_7) \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_5 - x_4 + x_5 & = 2 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 x_6 & = 6 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_7 & = 7 \\ x_j \ge 0 \quad (j = \overline{1,7}); M >> 0 \end{cases}$$

Bài toán "M" có phương án cực biên xuất phát:

$\overline{x}^{(0)} = (0,0,0,0,2,6,7)$ với cơ sở đơn vị: $\{A_5, A_6, A_7\} = E_3$

Lập bảng đơn hình

	C_1 Cơ sở	A_1 Cơ sở	Phương án	2 A_1	1 A_2	-1 A_3	-1 A_4	M A_5	M A_6	M A_7
	M	A_5	2	$\boxed{1}$	-1	2	-1	1	0	0
$\overline{x}^{(0)} \leftrightarrow$	M	A_6	6	2	1	-3	1	0	1	0
	M	A_7	7	1	1	1	1	0	0	1
			15M	4M-2	M-1	1	M+1	0	0	0
	2	A_1	2	1	-1	2	-1		0	0
$\overline{x}^{(1)} \leftrightarrow$	M	A_6	2	0	3	-7	$\boxed{3}$		1	0
	M	A_7	5	0	2	-1	2		0	1
			7M+4	0	5M-3	-8M+5	5M-1			
	2	A_1	8/3	1	0	-1/3	0			0
$\overline{x}^{(2)} \leftrightarrow$	-1	A_4	2/3	0	1	-7/3	1			0
	M	A_3	11/3	0	0	$\boxed{11/3}$	0			1
			$\frac{11M+14}{3}$	0	-2	$\frac{11M+8}{3}$	0			0
	2	A_1	3	1	0	0	0			
$\overline{x}^{(3)} \leftrightarrow$	-1	A_4	3	0	1	0	1			
	-1	A_3	1	0	0	1	0			
			2	0	-2	0	0			

Bảng đơn hình ứng với phương án cực biên $x^{-(3)}$ có $\Delta_k \le 0$ $(k = \overline{1,7})$ nên bài toán "M" có phương án tối ưu: $\overline{x}_{opt} = \overline{x}^{(3)} = (3,0,1,3,0,0,0)$ trong đó các ẩn giả $x_5 = x_6 = x_7 = 0$. Vậy bài toán ban đầu có phương án tối ưu là:

$$x_{opt} = (3,0,1,3) \text{ và } f_{min} = f(\overline{x}_{opt}) = 2$$

Bài 7. Giải bằng phương pháp đơn hình bài toán sau

$$f(x)_t = x_1 - x_2 + 3x_3 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + 3x_5 = 2 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_j \ge 0 \quad (j = \overline{1,3}) \end{cases}$$

Giải.

Đưa về bài toán "M" có 2 ẩn giả $x_4, x_5 \ge 0$, có dạng:

$$f(\overline{x}) = x_1 - x_2 + 3x_3 + M(x_4 + x_5) \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + 3x_5 + x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5 = 1 \\ x_j \ge 0 \quad (j = \overline{1,5}); M >> 0 \end{cases}$$

Bài toán "M" có phương án cực biên xuất phát: $\overline{x}^{(0)} = (0,0,0,2,1)$ với cơ sở đơn vị $\{A_4, A_5\} = E_2$.

Lập bảng đơn hình:

	C_1 Cơ sở	A_1 Cơ sở	Phương án	1	- 1	2	M	M
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
$\overline{x}^{(0)} \leftrightarrow$	M	A_4	2	- 2	1	3	1	0
	M	A_5	1	1	1	$\boxed{2}$	0	1
			3M	-M-1	2M+1	5M-2	0	0
$\overline{x}^{(1)} \leftrightarrow$	M	A_4	1/2	- 7/2	-1/2	0	1	
	M	A_3	1/2	1/2	1/2	1	0	
			$\frac{M+2}{2}$	$\frac{-7M}{2}$	$\frac{-M+4}{2}$	0	0	

Bảng đơn hình ứng với phương án cực biên $\overline{x}^{((1)}$ có $\Delta_k \le 0$ $(k = \overline{1,5})$ nên bài toán "M" có: $\overline{x}_{opt} = \overline{x}^{(1)} = 0,0,\frac{1}{2},\frac{1}{2},0)$. Nhưng có ẩn giả $x_4 = 1/2 > 0$ nên bài toán đầu không có phương án tối ưu (vô nghiệm)

Bài 8. Giải bằng phương pháp đơn hình bài toán sau.

$$f(x) = x_1 - 2x_2 - 4x_3 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 4x_5 & \le 2 \\ -3x_1 - 5x_2 + x_3 & \le -3 \\ x_1 + x_2 - x_4 = 6 \\ x_j \ge 0 \quad (j = \overline{1,4}) \end{cases}$$

Giải. Đưa bài toán về dạng chính tắc với hai biến phụ $x_5, x_6 \ge 0$ ta được:

$$f(x) = x_1 - 2x_2 - 4x_3 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 4x_5 + x_5 & = 5 \\ -3x_1 - 5x_2 + x_3 + x_6 & = -3 \\ x_1 + x_2 - x_4 = 6 \\ x_j \ge 0 \quad (j = \overline{1,6}) \end{cases}$$

Trong ma trận hệ số của ẩn ở hệ ràng buộc của bài toán chính tắc đã có một véctơ đơn vị A_5. Đưa về bài toán "M" với hai biến giả $x_7, x_8 \ge 0$ ta được:

$$f(\overline{x}) = x_1 - 2x_2 =- 4x_3 - M(x_7 + x_8) \to \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 4x_5 + x_5 & = 5 \\ -3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_6 + x_7 & = -3 \\ x_1 + x_2 - x_4 + x_8 & = 6 \\ x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,8}) \end{cases}$$

Bài toán "M" có phương án cực biên xuất phát:

$\overline{x}^{(0)}$ = (0,0,0,0,5,0,3,6) với cơ sở: $\{A_5, A_7, A_8\} = E_3$

Lập bảng đơn hình

	C_1 Cơ sở	A_1 Cơ sở	Phương án	2	A_1	1	-1	-1	M	M	M
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_7
	0	A_5	5	2	3	-4	0	1	0	0	0
$\overline{x}^{(0)} \leftrightarrow$	-M	A_7	3	3	$\boxed{5}$	-1	0	0	-1	1	0
	-M	A_8	6	1	1	0	-1	0	0	0	1
			-9M	04M-4	-6M+2	M		0	M	0	0
	0	A_5	16/5	1/5	0	-17/5	0	1	3/5		0
$\overline{x}^{(1)} \leftrightarrow$	-2	A_2	3/5	$\boxed{3/5}$	1	-1/5	0	0	-1/5		0
	-M	A_8	27/5	2/5	0	1/5	-1	0	1/5		1
			$\frac{-27+6}{5}$	$\frac{-2M+1}{5}$	0	$\frac{-M-2}{5}$	M	0	$\frac{-M-2}{5}$		0
	0	A_5	3	0	-1/3	-50/15	0	1	2/3		
$\overline{x}^{(2)} \leftrightarrow$	1	A_1	1	1	5/3	$\boxed{-1/3}$	0	0	-1/3		
	M	A_8	5	0	-2/3	1/3	-1	0	1/3		
			-5M+1	0	2M+11	$\frac{M-1}{3}$	$\frac{-M+1}{3}$	0	$\frac{-M-1}{3}$		
	0	A_5	53	0	-7	0	-10	1	4		
$\overline{x}^{(3)} \leftrightarrow$	1	A_1	6	1	1	0	-1	0	0		
	0	A_3	15	0	-2	1	-3	0	1		
			6	0	3	0	0	0	0		
	0	A_6	53/4	0	-7/4	0	-10/4	1/4	1		
$\overline{x}^{(4)} \leftrightarrow$	1	A_1	6	1	1	0	-1	0	0		
	0	A_3	7/4	0	-1/4	1	-2/4	-1/4	0		
			6	0	3	0	0	0	0		

Bảng đơn hình ứng với phương án $\overline{x}^{(3)}$ của bài toán "M" có $\Delta_k \leq 0$ $(k = \overline{1,8})$ nên $\overline{x}_{opt} = \overline{x}^{(3)}$ = (6,0,15,0,53,0,0,0) và các ẩn giả $x_7 = x_8 = 0$. Do đó bài toán ban đầu có: $x^{(1)}_{opt}$ = (6,0,15,0) và $f_{max} = 6$. Nhưng trong bảng đơn hình ứng với $\overline{x}^{(3)}$ có $\Delta_6 = 0$ $(6 \notin J_3)$ và $Z_{36} =$ 1 > 0 do đó đưa A_6 vào cơ sở ta được phương án tối ưu khác:

$x_{opt}^{(4)} = (6,0,1/4,0,0,53/4,0,0)$ các ẩn giả $x_7 = x_8 = 0$ nên bài toán đầu có $x_{opt}^{(2)} = (6,0,7/4,0)$.

Vậy khi đó bài toán có vô số phương án tối ưu:

$$\{X_{opt}\} = \{\lambda\ x_{opt}^{(1)} + (1-\lambda)x_{opt}^{(2)}; 0 \le 1\ \} \text{ và } f_{max} = 6$$

Bài 9. Giải và biện luận bài toán sau theo tham số λ

$$f(x) = 5x_1 + 2x_2 + 5x_3 \ \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} 3\lambda(x_1 - 1) - x_2 + 4x_5 & \ge 2 - 3\lambda \\ \lambda x_1 + x_2 + x_3 & \ge 3 \\ x_j \ge 0 \quad (j = \overline{1,3}); \lambda \ne 0 \end{cases}$$

Giải. Đưa bài toán về dạng chính tắc với 2 biến phụ x_4, $x_5 \ge 0$ sau đó đưa về bài toán "M" với ẩn giả $x_6 \ge 0$: $f(\overline{x}) = 5x_1 + 2x_2 + 5x_3 + Mx_6 \ \rightarrow \min$

$$\begin{cases} 3\lambda(x_1 - 1) - x_2 + 4x_5 + x_6 & = 2 - 3\lambda \\ \lambda x_1 + x_2 + x_3 + x_5 & = 3 \\ x_j \ge 0 \quad (j = \overline{1,6}); \lambda \ne 0; M >> 0 \end{cases}$$

Bài toán "M" có ngay phương án cực biên xuất phát: $\overline{x}^{(0)} = (0,0,0,0,3,2)$ với cơ sở đơn vị: $\{A_6, A_5\} = E_2$.

Lập bảng đơn hình

	C_i Cơ sở	A_i Cơ sở	Phương án	5 A_1	2 A_2	5 A_3	0 A_4	0 A_5	M A_6
$\overline{x}^{(3)} \leftrightarrow$	M 0	A_6 A_5	2 3	$\boxed{3\lambda}$ λ	- 1 1	4 1	- 1 0	0 1	1 0
			2M	3Mλ-5	-M-2	4M-5	- M	0	0
$\overline{x}^{(4)} \leftrightarrow$	5 0	A_3 A_5	1/2 5/2	3λ/4 λ/4	-1/4 5/4	1 0	-1/4 1/4	0 1	
			5/2	$\frac{15\lambda-20}{4}$	-13/4	0	-5/4	0	
$\overline{x}^{(2)} \leftrightarrow$	5 0	A_1 A_5	2/(3λ) 7/3	1 0	-1/(3λ) 4/3	4/(3λ) -1/3	-1/(3λ) 1/3	0 1	
			10/(3λ)	0	$\frac{-5-6\lambda}{3\lambda}$	$\frac{20-15\lambda}{3\lambda}$	$\frac{-5}{3\lambda}$	0	

Trong bảng đơn hình ứng với $\overline{x}^{(0)}$ tồn tại: $\Delta_1 = 3M\lambda - 5$ và $\Delta_3 = 4M - 5 > 0$.

a. Nếu $0 \ne \lambda < \dfrac{4}{3}$ thì $\Delta_3 > \Delta_1$ và $\Delta_3 > 0$. Đưa véctơ A_3 vào cơ sở ta được phương án $\overline{x}^{(1)}$ = (0,0,1/2,0,5/2,0) ẩn giả x6 = 0 nên bài toán ban đầu có xopt = (0,0,1/2) và fmin = 5/2.

b. Nếu $\lambda \geq \frac{4}{3}$ thì $\Delta_1 \geq \Delta_3 > 0$ đưa véctơ A_1 vào cơ sở cải tiến $\overline{x}^{(0)} \rightarrow \overline{x}^{(1)}$ ta được phương án $\overline{x}^{(1)}_{opt}$ = (2/(3λ),0,0,0,7/3,0) ẩn giả $x_6 = 0$ nên bài toán ban đầu có x_{opt} = (2/(3λ),0,0)và $f_{min} = \frac{10}{3\lambda}$

Kết luận: nếu $0 \neq \lambda < \frac{4}{3}$ bài toán có x_{opt} = (0,0,1/2) và f_{min} = 5/2.

Nếu $\lambda \geq \frac{4}{3}$ bài toán có x_{opt} =(2/(3λ),0,0) và $f_{min} = \frac{10}{3\lambda}$

Bài 10. Giải và biện luận bài toán sau theo tham số a:

$$f(x) = -2x_1 - 5x_2 + x_3 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} ax_1 - 2x_2 \geq 1 \\ x_1 + ax_2 + x_3 = 5 \\ x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,3}) \end{cases}$$

Giải.

Nếu $a \leq 0$ thì ràng buộc 1 không thoả mãn nên bài toán không có phương án nào (tập các phương án $D = \varnothing$).

Nếu $a > 0$, đã bài toán về dạng chính tắc với biến phụ $x_4 \geq 0$, sau đó đưa về bài toán "M" với biến giả $x_5 \geq 0$.

$$f(\overline{x}) = -2x_1 - 5x_2 + x_3 - Mx_5 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} ax_1 - 2x_2 - x_4 + x_5 = 1 \\ x_1 + ax_2 + x_3 = 5 \\ x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,5}); M >> 0 \end{cases}$$

Bài toán "M" có phương án cực biên xuất phát $\overline{x}^{(0)}$ = (0,0,5,0,1 với cơ sở đơn vị: {A_5, A_3 } = E_2.

Lập bảng đơn hình

	C_1 Cơ sở	A_1 Cơ sở	Phương án	- 2 A_1	- 5 A_2	1 A_3	0 A_4	-M A_5
$\overline{x}^{(0)} \leftrightarrow$	-M	A_5	1	a	- 2	0	- 1	0
	1	A_5	5	1	a	1	0	1
			-M+5	- aM+3	2M+a+5	0	M	0
$\overline{x}^{(1)} \leftrightarrow$	- M	A_5	1 - 5a	0	$-2-a^2$	- a	- 1	0
	- 2	A_1	5	1	a	1	0	1
				0	$(2+a^2)M-2a+5$	aM-3	M	0
$\overline{x}^{(1)} \leftrightarrow$	- 2	A_1	1/2	1	- 2/a	0	-1/a	
	1	A_5	5- 1/a	0	a + 2/a	1	1/a	
			5-3/a	0	a+6/a+5	0	3/a	

Trong bảng đơn hình ứng với phương án $\overline{x}^{(0)}$: tồn tại Δ_1 = - aM + 3 < 0, nên véctơ A_1 được đưa vào cơ sở, và chọn:

$\theta = \min\left\{\frac{1}{a}.\frac{5}{1}\right\}$ nếu $\frac{1}{2} > \frac{5}{1}$ $\Leftrightarrow$ 0<a<1/5,véctơ A_3 được đưa ra khỏi cơ sở, ta được phương án $\overline{x}^{(0)}_{OPT}$ = (5.0,0,0,1- 5a), nhưng ẩn giả x_5 = 1 -5a > 0 (a < 1/5) nên bài toán đầu không có phương án tối ưu.

Nếu $\frac{1}{a} \le 5 \Leftrightarrow a \ge \frac{1}{5}$, véctơ A_5 được đưa ra khỏi cơ sở, ta được phương án $\overline{x}^{(1)}_{opt}$ = (1/a,0,5-1/a,0,0) ẩn giả x_5 =0, nên bài toán ban đầu có x_{opt} = (1/a,0,5-1/a) và f_{min} = 5-3/a.

Kết luận: Nếu a < 1/5 bài toán ban đầu vô nghiệm

Nếu $a \ge \frac{1}{5}$ bài toán có: x_{opt} = (1/a,0,5-1/a) và f_{min}=5-3/a.

2.7. ĐỐI NGẪU CỦA BÀI TOÁN QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH.

2.7.1 Các dạng bài toán đối ngẫu.

a, Bài toán đối ngẫu không đối xứng

Xét bài toán qui hoạch tuyến tính dạng chính tắc.

$$f(X) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min \qquad (2.19)$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i & (i = \overline{1,m}) \qquad (2.20) \\ x_j \ge 0 & (j = \overline{1,n}) \qquad (2.21) \end{cases}$$

Tương ứng với nó ta có bài toán đối ngẫu không đối xứng:

$$\varphi(Y) = \sum_{j=1}^{n} b_i y_i \to \max \qquad (2.22)$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_j \le c_j & (j = \overline{1,n}) \qquad (2.23) \\ y_j \in R & (i = \overline{1,m}) \qquad (2.24) \end{cases}$$

b. Bài toán đối ngẫu đối xứng.

Xét bài toán qui hoạch tuyến tính dạng chuẩn tắc.

$$f(X) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min \qquad (2.25)$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i & (i = \overline{1,m}) \qquad (2.26) \\ x_j \ge 0 & (j = \overline{1,n}) \qquad (2.27) \end{cases}$$

Tương ứng với nó ta có bài toán đối ngẫu đối xứng.

$$\varphi(Y) = \sum_{j=1}^{n} b_i y_i \rightarrow \max \qquad (2.28)$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_j \le c_j & (j = \overline{1,n}) \qquad (2.29) \\ y_j \ge 0 & (i = \overline{1,m}) \qquad (2.30) \end{cases}$$

c. Bài toán đối ngẫu tổng quát

Xét bài toán qui hoạch tuyến tính dạng tổng quát sau:

$$f(X) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i & (i \in I_1) \qquad (2.31) \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i & (i \in I_2) \qquad (2.32) \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i & (i \in I_3) \qquad (2.33) \\ x_j \in R & (j \in J_1) \qquad (2.34) \\ x_j \ge 0 & (j \in J_2) \qquad (2.35) \\ x_j \le 0 & (j \in J_3) \qquad (2.36) \end{cases}$$

Trong đó: I_i , J_i ($i = \overline{1,3}$) - Tập chỉ số các phương trình, bất phương trình và các ẩn. $|I_1|+|I_2|+|I_3| = m$, $|J_1|+|J_2|+|J_3| = n$ Với $|I_i|$, $|J_i|$ - lực lượng của tập I_i, J_i ($i = \overline{1,3}$).

Tương ứng với nó ta có bài toán đối ngẫu tổng quát sau:

$$\varphi(Y) = \sum_{j=1}^{n} b_i y_i \rightarrow \max \qquad (2.37)$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_j = c_j & (j \in J_1) \qquad (2.20) \\ \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_j \le c_j & (j \in J_2) \qquad (2.38) \\ \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_j \ge c_j & (j \in J_3) \qquad (2.39) \\ y_j \in R & (i \in I_1) \qquad (2.40) \\ y_j \ge 0 & (i \in I_2) \qquad (2.41) \\ y_j \le 0 & (i \in I_3) \qquad (2.42) \end{cases}$$

***Chú ý*:** Khi thành lập bài toán đối ngẫu cần chú ý ma trận hệ số các ẩn trong hệ ràng buộc của hai bài toán là hai ma trận chuyển vị của nhau.

2.7.2. Cặp ràng buộc đối ngẫu

Gọi hai cặp ràng buộc (kể cả ràng buộc về dấu) trong hai bài toán đối ngẫu cùng tương ứng với một chỉ số là một cặp ràng buộc đối ngẫu.

Chẳng hạn, với cặp bài toán đối ngẫu đối xứng có tất cả m+n cặp ràng buộc đối ngẫu sau:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i, (i = \overline{1,m}) \leftrightarrow y_i \geq 0, (i = \overline{1,m})$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i, (i = \overline{1,m}) \leftrightarrow y_i \in R, (i = \overline{1,m})$$

$$xj \geq 0, (j = 1,n) \leftrightarrow \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \leq c_i, (j = \overline{1,n})$$

2.7.3. Các tính chất của bài toán đối ngẫu.

1. Đối với hai phương án bất kỳ X,Y của một cặp bài toán đối ngẫu f(X)→ min ta luôn có:

$f(X) \quad \geq \quad \varphi(Y)$

2. Nếu đối với hai phương án X^* , Y^* của một cặp bài toán đối ngẫu mà $f(X^*) = \varphi(Y^*)$ thì X^* , Y^* là hai phương án tối ưu.

2.7.4. Quan hệ của cặp bài toán đối ngẫu

Định lý: Đối với một cặp bài toán đối ngẫu, bao giờ cũng chỉ xảy ra 1 trong 3 trường hợp sau:

• Cả hai bài toán cùng không có phương án, hiển nhiên cả hai bài toán đều không giải được.

• Cả hai bài toán có phương án thì cả hai bài toán đều giải được. Khi đó với mọi cặp phương án tối ưu X^* Y^* ta luôn có: $f(X^*) = \varphi(Y^*)$.

• Một trong hai bài toán không có phương án thì bài toán còn lại nếu có phương án thì cũng không có phương án tối ưu.

2.7.5. Các bài tập mẫu

Bài 1. Hãy thiết lập bài toán đối ngẫu của bài toán sau:

a. $f(X) = x_1 - 3x_2 + 2x_3 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 & = 3 \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 & = 2 \\ 5x_1 \qquad + 7x_3 & = 14 \\ x_j \geq 0 & (j = \overline{1,3}) \end{cases}$$

b. $f(X) = -3x_1 - 5x_2 + 4x_3 + x_4 \rightarrow \max$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \leq 6 \\ \quad - 3x_2 + 2x_3 + x_4 \leq -5 \\ \\ 2x_1 + x_2 \qquad - 3x_4 \leq 4 \\ x_j \geq 0 \qquad (j = \overline{1,4}) \end{cases}$$

Giải a. Ta thấy bài toán qui hoạch tuyến tính dạng chính tắc có hàm mục tiêu $f(X) \to \min$, nên hàm mục tiêu trong bài toán đối ngẫu là $\varphi(Y) \to \max$ và hệ ràng buộc bài toán sẽ có dạng "$\le$".

Bài toán đã cho có 3 ràng buộc (không kể ràng buộc về dấu) với dấu "=" nên trong bài toán đối ngẫu sẽ có 3 biến: y_1, y_2, y_3 và các biến này sẽ nhận các giá trị tuỳ ý.

Theo định nghĩa bài toán đối ngẫu, ta có bài toán đối ngẫu không đối xứng sau:

$$\varphi(Y) = 3y_1 + 2y_2 + 14y_3 \to \max$$

$$\begin{cases} 2y_1 - y_2 + 5y_3 \le 1 \\ y_1 + 3y_2 \le -3 \\ -y_2 + 7y_3 \le 2 \\ y_i \in R, (i = \overline{1,3}) \end{cases}$$

b. Đây là bài toán qui hoạch tuyến tính dạng chuẩn tắc có hàm mục tiêu

$f(X) \to \max$, nên hàm mục tiêu trong bài toán đối ngẫu là $\varphi(Y) \to \min$ và hệ ràng buộc sẽ có dấu "$\ge$".

Bài toán đã cho có 3 ràng buộc với dấu "$\le$" (không kể ràng buộc dấu) nên bài toán đối ngẫu sẽ có 3 biến $y_1, y_2, y_3 \ge 0$.

Theo định nghĩa bài toán đối ngẫu, ta có bài toán đối ngẫu đối xứng sau đây:

$$\varphi(Y) = 6y_1 - 5y_2 + 4y_3 \to \min$$

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 \ge -3 \\ y_1 - 3y_2 + y_3 \ge -5 \\ y_1 + 2y_2 \ge 4 \\ -y_1 + y_2 - 3y_3 \ge 1 \\ y_i \ge 0 \quad (i = \overline{1,3}) \end{cases}$$

Bài 2. Xét bài toán: $f(X) = -2x_1 + x_2 - 4x_3 \to \min$

$$\begin{cases} 3x_1 - 6x_2 + 2x_4 = -8 \\ -2x_1 + 3x_2 + x_3 \ge 9 \\ -4x_2 + 7x_3 + 5x_4 \le 10 \\ x_1, x_3 \ge 0,\ x_4 \le 0,\ x_2 \in R \end{cases}$$

Viết bài toán đối ngẫu và chỉ ra các cặp ràng buộc đối ngẫu của hai bài toán.

Giải Bài toán đối ngẫu.

$$\varphi(Y) = -8y_1 + 9y_2 + 10y_3 \to \max.$$

$$\begin{cases} 3y_1 - 2y_2 \le -2 \\ -6y_1 + 3y_2 - 4y_3 = 1 \\ y_2 + 7y_3 \le -4 \\ 2y_1 + 5y_3 \ge 0 \\ y_1 \in R,\ y_2 \ge 0,\ y_3 \le 0 \end{cases}$$

Các cặp ràng buộc đối ngẫu.

$3x_1-6x_2+2x_4 = 8 \quad \leftrightarrow y_1 \in R$

$-2x_1+3x_2+x_3 \geq 9 \quad \leftrightarrow y_2 \geq 0$

$-4x_2+7x_3+5x_4 \leq 10 \leftrightarrow y_3 \leq 0$

$x_1 \geq 0 \qquad \leftrightarrow 3y_1-2y_2 \leq -2$

$x_2 \in R \qquad \leftrightarrow -6y_1+3y_2-4y_3 = 1$

$x_3 \geq 0 \qquad \leftrightarrow y_2 +7y_3 \leq -4$

$x_4 \leq 0 \qquad \leftrightarrow 2y_1+5y_3 \geq 0$

Bài 3. Cho bài toán:

$$f(X)= 7x_1+6x_2-12x_3+x_4 \rightarrow \max.$$

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 8 \\ 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 \leq - 1 \\ 2x_1 - \qquad 3x_3 + x_4 = 10 \\ x_3 \geq 0 \ (j = \overline{1,4}) \end{cases}$$

Lập bài toán đối ngẫu của bài toán trên và xác định các cặp ràng buộc đối ngẫu.

Xét 2 véctơ $X^0 = (0,6,0,10)$, $Y^0 = (-3,0,7)$. Chứng tỏ rằng X^0, Y^0 là phương án tối ưu của cặp bài toán đối ngẫu.

Giải

Bài toán đối ngẫu có dạng:

$$\varphi(Y) = 8y_1- y_2 + 10y_3 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} 2y_1 + 2y_3 \geq 7 \\ -2y_1 + 2y_3 \geq 6 \\ -3y_1 + 2y_2 - 3y_3 \geq -12 \\ 2y_1 - 2y_2 + y_3 \geq 1 \\ y_1 \in R, y_2 \geq 0, y_3 \in R \end{cases}$$

Các cặp ràng buộc đối ngẫu:

$2x_1-2x_2-3x_3+2x_4 = 8 \leftrightarrow y_1 \in R$

$3x_2 + 2x_3 - 2x_4 \leq -1 \leftrightarrow y_2 \geq 0$

$2x_1-3x_3+x_4 = 10 \qquad \leftrightarrow y_3 \in R$

$x_1 \geq 0 \qquad \leftrightarrow y_1 +2y_3 \geq 7$

$x_2 \geq 0 \qquad \leftrightarrow -2y_1 +3y_2 \geq 6$

$x_3 \geq 0 \qquad \leftrightarrow -3y_1 +2y_2 -3y_3 \geq -12$

$x_4 \geq 0 \qquad \leftrightarrow 2y_1-2y_2+y_3 \geq -1$

Theo tính chất 2 đối ngẫu, để chứng minh X^0, Y^0 là phương án tối ưu ta phải chứng minh: X^0, Y^0 là phương án của cặp bài toán đối ngẫu và $f(X^0)= \varphi (Y^0)$.

Thật vậy, thay $X^0 = (0,6,0,10)$ vào tất cả các ràng buộc của bài toán gốc ta thấy X^0 thoả mãn mọi ràng buộc của bài toán gốc.

Suy ra X^0 là phương án của bài toán gốc.

Thay $Y^0 = (-3,7,0)$ vào các ràng buộc của bài toán đối ngẫu thấy thoả mãn suy ra Y^0 là phương án của bài toán đối ngẫu.

Mặt khác ta lại có:

$$f(X^0) = 7.0+6.6-12.0+10 = 46$$

$$\varphi(Y^0) = 8.(-3)-0+10.7 \quad = 46$$

Nên $\quad f(X^0) = \varphi(Y^0)$.

Vậy X^0, Y^0 là phương án tối ưu của cặp bài toán đối ngẫu (tính chất 2).

Bài 4. Cho bài toán.

$$f(X) = -x_1-5x_2+4x_3-2x_4 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + x_3 - 6x_4 \le 13 \\ x_1 + 2x_2 \qquad + 3x_4 \le 9 \\ -3x_1 \;\; - x_2 - x_3 + 2x_4 \le 8 \\ x_j \ge 0 \quad (j = \overline{1;n}) \end{cases}$$

Dùng định lý đối ngẫu chứng tỏ bài toán đã cho giải được

Giải

Bài toán đối ngẫu:

$$\varphi(Y) = 13y_1+9y_2+8y_3 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} y_1 + y_3 - 3y_3 \le -1 \\ -4y_1 + 2y_2 - y_3 \le -5 \\ y_1 - y_3 \quad \le 4 \\ 6y_1 + 3y_2 + 2y_3 \le -2 \\ y_i \le 0 \quad (i = \overline{1,3}) \end{cases}$$

Để chứng tỏ bài toán đã cho giải được ta cần chứng minh:

- Bài toán gốc có phương án.
- Bài toán đối ngẫu có phương án.

Thật vậy

Với bài toán gốc, xét véctơ $X^0 = (0,0,0,0)$. Thay vào hệ ràng buộc của bài toán ta được:

$x_1-4x_2+x_3-6x_4 = 0 <13 = VP.$

$x_1+2x_2+3x_4 = 0 <9 = VP.$

$-3x_1-x_2-x_3+2x_4 = 0 < 8 = VP.$

$x_j = 0 \;\; (j = \overline{1,4})$ thoả mãn

Như vậy X^0 là phương án của bài toán, tức là bài toán có phương án.

Với bài toán đối ngẫu, xét véctơ $Y^0 = (0,-3,0)$ thay vào hệ ràng buộc của bài toán đối ngẫu, ta được:

$y_1+y_2-3y_3 = -3 < -1 = VP.$

$-4y_1+2y_2-y_3 = -6 < -5 = VP$

$y_1-y_3 = 0 < 4 = VP.$

$-6y_1+3y_2+2y_3 = -9 < -2 = VP.$

$y_1 = 0$

$y_2 = -3$

$y_3 = 0$ thoả mãn $y_j \le 0$, $(i = \overline{1,3})$.

Như vậy Y^0 là phương án của bài toán đối ngẫu, tức là bài toán đối ngẫu có phương án.

Theo định lý về mối quan hệ của cặp bài toán đối ngẫu thì cả hai bài toán trên đều có phương án tối ưu, tức là bài toán gốc giải được.

2.8. CÁC ĐỊNH LÝ ĐỐI NGẪU VÀ Ý NGHĨA CẶP BÀI TOÁN ĐỐI NGẪU

2.8.1.Định lý 1 (đối ngẫu).

Nếu 1 trong 2 bài toán đối ngẫu có lời giải thì bài toán kia cũng có lời giải và khi đó với mọi cặp phương án tối ưu X^*, Y^* ta luôn có: $f(X^*) = \varphi(Y^*)$.

Hệ quả

1. Điều kiện cần và đủ để cặp phương án X^*, Y^* của hai bài toán đối ngẫu tối ưu là: $f(X^*) = \varphi(Y^*)$.

2. Điều kiện cần và đủ để cặp bài toán đối ngẫu giải được là mỗi bài toán có ít nhất một phương án.

2.8.2. Định lý 2 (về độ lệch bù).

Điều kiện cần và đủ để 2 phương án X, Y của một cặp bài toán đối ngẫu tối ưu là trong các cặp ràng buộc đối ngẫu nếu một ràng buộc thoả mãn với dấu bất đẳng thức thực sự (lỏng) thì ràng buộc kia phải thoả mãn với dấu bằng(chặt).

Hệ quả

Nếu một ràng buộc là lỏng đối với một phương án tối ưu của bài toán này thì ràng buộc đối ngẫu cuả nó phải là chặt đối với mọi phương án tối ưu của bài toán kia.

2.8.3. Ứng dụng của định lý độ lệch bù phân tích tính chất tối ưu của một phương án

Cho X là phương án của bài toán gốc, để phân tích tính chất tối ưu của X ta làm như sau:

Giả sử X là phương án tối ưu, theo định lý độ lệch bù mọi phương án tối ưu Y của bài toán đối ngẫu phải thoả mãn chặt các ràng buộc đối ngẫu với các ràng buộc mà X thoả mãn lỏng. Các ràng buộc này tạo thành một hệ phương trình đối với Y.

Giải hệ phương trình này để tìm nghiệm nếu:

Hệ vô nghiệm thì kết luận phương án X không tối ưu.

Hệ có nghiệm thì thử các nghiệm vào các ràng buộc còn lại của bài toán đối ngẫu nếu:

• Mọi nghiệm Y đều không thoả mãn các ràng buộc còn lại của bài toán đối ngẫu, nghĩa là mọi nghiệm đều không phải là phương án thi X không tối ưu.

• Có nghiệm Y là phương án (thoả mãn tất cả các ràng buộc còn lại của bài toán đối ngẫu) thì phương án này là phương án tối ưu đồng thời X là phương án tối ưu, từ đó sẽ xác định được toàn bộ tập phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu. Đồng thời nhờ một phương án tối ưu nào đó của bài toán đối ngẫu ta lại xác định được tập phương án tối ưu (nếu có) của bài toán gốc.

Để khảo sát ứng dụng này ta sẽ lấy ví dụ trong bài tập mẫu (xét sau).

2.8.4. Ý nghĩa cặp bài toán đối ngẫu

Khi phân tích song song một cặp bài toán đối ngẫu ta có thể nhận được những kết luận hay cả về toán học cả về ý nghĩa king tế. Để phân tích được nhiều khía cạnh về mối quan hệ của cặp bài toán đối ngẫu ta sử dụng cặp bài toán đối ngẫu đối xứng (7) → (9), (10)→(11):

(P): $f(X)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min$

$$\begin{cases}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \ge b_i & (i=\overline{1,m})\\ x_j \ge 0 & (j=\overline{1,n})\end{cases}$$

(P'): $\varphi(Y)=\sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to \max$

$$\begin{cases}\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_j \ge c_j & (j=\overline{1,n})\\ y_i \ge 0 & (i=\overline{1,m})\end{cases}$$

a. Ý nghĩa hình học

Khi có $c_j > 0$, $\forall j$ thì biết ngay được 1 phương án cực biên của bài toán đối ngẫu.

Nếu Y^0 là phương án cực biên của bài toán đối ngẫu thì khi bài toán gốc thêm 1 ràng buộc ta có $(Y^0, 0)$ vẫn là phương án cực biên của bài toán đối ngẫu.

Đôi khi dùng cặp bài toán đối ngẫu để giải gần đúng theo ý nghĩa sau: Giải cả hai bài toán và nếu hiệu giữa các giá trị tương ứng của các hàm mục tiêu đủ nhỏ thì dừng lại và phương án cực biên thu được lấy làm nghiệm gần đúng.

b. Ý nghĩa kinh tế

Giả sử bài toán (P) mang nội dung kinh tế sau: có n phương pháp khác nhau để sản xuất m loại sản phẩm. Khi sử dụng 1 đơn vị thời gian cho phương pháp j ($j=\overline{1,n}$) sẽ thu được đồng thời a_{ij} đơn vị sản phẩm i ($i=\overline{1,m}$) và mất một chi phí là c_j ($j=\overline{1,n}$). Nhu cầu xã hội về sản phẩm i là b_i ($i=\overline{1,m}$).

Hãy xác định các khoảng thời gian x_j sử dụng mỗi mỗi phương pháp j ($j=\overline{1,n}$) sao cho tổng chi phí sản xuất là nhỏ nhất với điều kiện tổng số đơn vị sản phẩm i mỗi loại sản xuất ra không ít hơn b_i ($i=\overline{1,m}$).

Nội dung kinh tế bài toán (P') sẽ là:

Trong những điều kiện như trên hãy tìm một hệ thống giá trị y_i (i= $\overline{1,m}$) sao cho tổng giá trị toàn bộ sản phẩm theo yêu cầu xã hội đạtcực đại với điều kiện tổng các giá trị sản phẩm sản xuất theo từng phương pháp j (j= $\overline{1,n}$) trong 1 đơn vị thời gian không vượt quá chi phí sản xuất c_j (j= $\overline{1,n}$).

Để thích hợp, ta goị véctơ x =($x_1,x_2,...x_n$) của bài toán (P) là phương án sản xuất, véctơ Y = ($y_1,y_2,...y_m$) của bài toán (P') là phương án đánh giá. Từ định lý về độ lệch bù suy ra:

1. Nếu một phương án sản xuất được sử dụng ($x_j > 0$) thì tổng giá trị các sản phẩm sản xuất theo phương pháp ấy phải đúng bằng chi phí $(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_j \ = c_j)$.

2. Nếu một phương án có giá trị (yi >0) thì tổng số đơn vị sản phẩm ấy sản xuất ra phải đúng bằng nhu cầu $(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \ = b_i)$

Các vấn đề nêu trên hoàn toàn phù hợp với lý luận kinh tế, đồng thời có thể dùnh làm căn cứ để xác định hệ thống giá cả sản phẩm có tác dụng thúc đẩy sản xuất.

Để làm phong phú thêm ý nghĩa kinh tế của cặp bài toán đối ngẫu nhờ định lý độ lệch bù, ta sẽ xét ví dụ cụ thể trong phần bài tập mẫu.

2.8.5. Các bài tập mẫu

Bài 1. Cho bài toán.

$$f(X) = 5x_1-9x_2+15x_3+7x_4+6x_5 \to \min$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 + x_5 \le 1 \\ 4x_1 + \quad x_3 + 2x_4 - x_5 \quad = 4 \\ -x_1 - x_2 + x_3 \quad - 2x_5 \quad \ge -1 \\ x_j \ge 0 \quad (j = \overline{2,5}),\ x_1 \in R \end{cases}$$

Và véctơ X= (0,1,0,2,0).

- Viết bài toán đối ngẫu;
- Phân tích tính chất của X đối với bài toán đã cho.

Giải

$$\varphi(Y) = y_1 + 4y_2 - y_3 \to \max$$

$$\begin{cases} y_1 + 4y_2 - y_3 \quad = 5 \\ 3y_1 \quad - y_3 \quad \le -9 \\ -y_1 + y_2 + y_3 \quad \le 15 \\ -y_1 + 2y_2 \quad \le 7 \\ y_1 - y_2 - 2y_3 \quad \le 6 \\ y_1 \le 0,\ y_2 \in R,\ y_3 \ge 0. \end{cases}$$

Dễ dàng thấy véctơ X = (0,1,0,2,0) thoả mãn mọi ràng buộc của bài toán nên X- là phương án của bài toán đã cho.

Phương án X thoả mãn chặt các ràng buộc 1,2,3 và hai ràng buộc về dấu $x_1 = x_3 = x_5 = 0$ suy ra X thoả mãn chặt 6 ràng buộc chặt

Suy ra X không phải là phương án cực biên.

Phương án X thoả mãn lỏng 2 ràng buộc về dấu; $x_2 = 1>0$ và $x_4 = 2>0$.

Giả sử X là phương án tối ưu, theo định lý về độ lệch bù mọi phương án tối ưu Y của bài toán đối ngẫu phải thoả mãn hệ phương trình:

$$\begin{cases} y_1 + 4y_2 - y_3 = 5 \\ 3y_1 - y_3 = -9 \\ -y_1 + 2y_2 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 + 4y_2 - y_3 = 5 \\ 6y_2 - y_3 = 12 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_1 = -3 + \frac{1}{3}y_3 \\ y_2 = 2 + \frac{1}{6}y_3 \\ y_3 \in R \end{cases}$$

Vậy nghiệm của hệ là:

$$Y = (y_1,y_2,y_3) = (-3 + \frac{1}{3}y_3, 2 + \frac{1}{6}y_3, y_3), \qquad y_3 \in R$$

Thay Y vào các ràng buộc còn lại của bài toán ta có:

- $-y_1+y_2+y_3 \le 15 \Rightarrow 3- \frac{1}{3}y_3 +2 + \frac{1}{6}y_3 +y_3 \le 15 \Rightarrow y_3 \le 12.(1)$
- $y_1-y_1-2y_3 \le 6 \Rightarrow -3 + \frac{1}{3}y_3 -2 - \frac{1}{6}y_3 -2y_3 \le 6 \Rightarrow y_3 \ge -6$ (2)
- $y_1 \le 0 \Rightarrow -3+\frac{1}{3}y_3 \le 0 \Rightarrow y_3 \le 9$ (3)
- $y_3 \ge 0$ (4)

Từ (1), (2), (3), (4) $\Rightarrow$ Y muốn là phương án thì y_3 phải thoả mãn điều kiện: $0 \le y_3 \le 9$

Kết luận: X là phương án tối ưu của bài toán gốc và Y với $0 \le y_3 \le 9$ là phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu (theo định lý độ lệch bù).

Bài 2. Một nhà máy có 3 phương pháp khác nhau để sản xuất ra 3 mặt hàng 1,2,3. số lượng hàng loại i phải sản xuất tối thiểu là b_i chiếc. Nếu áp dụng cách sản xuất thứ j trong một đơn vị thời gian thì chi phí là c_j và thu được a_{ij} đơn vị hàng loại i. Các số liệu được cho trong bảng sau:

j / i	1	2	3	b_j
1	4	4	1	16
2	5	3	1	20
3	1	1	1	3
c_j	10	8	2	

Yêu cầu đối với nhà máy là cần sử dụng phương pháp sản xuất sao cho đảm bảo nhu cầu về sản phẩm đồng thời chi phí là ít nhất.

a. Lập dạng toán học của bài toán trên? Viết bài toán đối ngẫu của nó (nói rõ nội dung kinh tế các biến trong bài toán đối ngẫu).

b. Dùng lý thuyết đối ngẫu, chứng tỏ véctơ X = (4,0,0) là phương án tối ưu của bài toán gốc. Phân tích ý nghĩa kinh tế trong mối quan hệ giữa hai bài toán trêncơ sở hai phương án tối ưu của chúng.

Giải

a. Gọi x_j là thời gian áp dụng phương pháp sản xuất thứ j (j= $\overline{1,3}$). Dạng toán học của bài toán này là:

Tìm véctơ $X = (x_1,x_2,x_3) \in R^3$:

$$f(X) = 10x_1+8x_2+2x_3 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 4x_2 + 2x_3 \geq 16 \\ 5x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 20 \\ x_1 + x_2 + x_3 \geq 3 \\ x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,3}) \end{cases}$$

Bài toán đối ngẫu:

Gọi y_i là giá trị của 1 đơn vị hàng loại i (i=$\overline{1,3}$). Ta có:

$$\varphi(Y) = 16y_1+20y_2+3y_3 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 4y_1 + 5y_2 + y_3 \leq 10 \\ 4y_1 + 3y_2 + y_3 \leq 8 \\ 2y_1 + y_2 + y_3 \leq 2 \\ y_i \geq 0 \quad (i = \overline{1,3}) \end{cases}$$

Vậy nội dung kinh tế thì f(X) chính là tổng chi phí, φ(Y) là tổng giá trị sản phẩm sản xuất được.

b. Giả sử X = (4,0,0) là phương án tối ưu và X thoả mãn lỏng các ràng buộc (3) và $x_1 = 4 > 0$ nên theo định lý về độ lệch bù mọi phương án tối ưu Y =(y_1,y_2,y_3) của bài toán đối ngẫu phải thoả mãn hệ phương trình:

$$\begin{cases} y_3 \quad = 0 \\ 4y_1 + 5y_2 + y_3 \quad 10 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 4y_1+5y_2 = 10 \Rightarrow y_2 = 2- \frac{4}{5} y_1 \quad , y_1 \in R$$

Vậy nghiệm của hệ là: $Y= (y1, 2- \frac{4}{5} y_1,0)$, $y_1 \in R$

Thay vào các ràng buộc còn lại ta được:

- $4y_1+3y_2+y_3 \le 8 \Rightarrow 4y_1+3(2- \frac{4}{5} y_1) \le 8 \Rightarrow y_1 \le \frac{5}{4}$ (7)
- $2y_1+y_2+y_3 \le 2 \Rightarrow 2y_1 + 2- \frac{4}{5} \quad y_1 \le 2 \Rightarrow y_1 \le 0$ (8)
- $y_2 \ge 0 \Rightarrow 2- \frac{5}{4} y_1 \ge 0 \Rightarrow y_1 \le \frac{5}{2}$ (9)
- $y_1 \ge 0$ (10)

Từ (7), (8), (9), (10) $\Rightarrow y_1 = 0$

Vậy Y = (0,2,0) là phương án của bài toán đối ngẫu, nên theo định lý về độ lệch bù thì X = (4,0,0), Y = (0,2,0) tương ứng là phương án tối ưu của bài toán gốc và bài toán đối ngẫu.

Phân tích ý nghĩa kinh tế:

Ta có $x_1 = 4 > 0$ chứng tỏ cách sản xuất thứ nhất đã được sử dụng, chỉ cần 4 đơn vị thời gian cho cách sản xuất thứ nhất là đáp ứng được nhu cầu về sản phẩm và tổng các giá trị các sản phẩm sản xuất được là φ(Y) =16.0 +20.2+3.0 = 40. Tương ứng trong đánh giá tối ưu ràng buộc (4) thoả mãn chặt, điều này nói nên với phương pháp sản xuất đó mọi hao phí bỏ ra đều được chuyển hoá thành giá trị sản phẩm. Đây là cách sản xuất tối ưu cần được áp dụng. Với cách sản xuất này nếu ta tăng thêm 1 đơn vị thời gian thì có thể xây dựng được phương án tối ưu mới với tổng giá trị sản phẩm cao hơn trước là 10.

Thay phương án tối ưu Y vào các ràng buộc của bài toán đối ngẫu ta được ràng buộc (5) thoả mãn lỏng, chứng tỏ với phương pháp sản xuất thứ hai mọi hao phí bỏ ra không được chuyển hoá hết thành giá trị sản phẩm nên không sử dụng phương pháp sản xuất này ($x_2 = 0$).

Trong phương án tối ưu Y ta có $y_2 = 2 > 0$, điều này nói nên sản phẩm hàng loại 2 được đánh giá có giá trị và chính nó có vai trò làm tăng tổng giá trị sản phẩm. Tương ứng trong phương án tối ưu X ràng buộc (2) thoả mãn chặt, nghĩa là sản phẩm hàng loại 2 sản xuất vừa đủ nhu cầu tối thiểu, sản phẩm đến đâu tiêu thu đến đấy. Vì vậy trong phương án sản xuất theo hướng sản phẩm hàng loại 2 phải tăng thêm về số lượng.

Ở đây ràng buộc (6) của bài toán đối ngẫu cũng thoả mãn chặt, điều này nói nên có thể sử dụng cách sản xuất thứ 3 thay thế cách sản xuất thứ nhất trong trường hợp cách sản xuất thứ nhất gặp khó khăn về trang thiết bị, nhiên liệu.... Ràng buộc (3) của bài toán gốc thoả mãn lỏng nên trong phương án đánh giá tối ưu Y, sản phẩm này được xem là không có giá trị, nghĩa là trong phương án sản xuất tiếp theo không nên chú trọng sản xuất sản phẩm này.

2.9. PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TOÁN ĐỐI NGẪU ĐỐI XỨNG

2.9.1. Đặt vấn đề.

Đối với cặp bài toán đối ngẫu đối xứng , lời giải của bài toán này có thể thông qua lời giải của bài toán kia (bằng phương pháp đơn hình) mà không cần giải trực tiếp nó.

Xét cặp bài toán đối ngẫu đối xứng sau:

$$(P):\quad f(X) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i & (i = \overline{1,m}) \\ x_j \ge 0 & (j = \overline{1,n}) \end{cases}$$

$$(Q):\quad \varphi(Y) = \sum_{j=1}^{n} b_i y_i \to \min$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_j \ge c_j & (j = \overline{1,n}) \\ y_j \ge 0 & (i = \overline{1,m}) \end{cases}$$

Giả sử $Y^* = (y_1^*, y_2^*, ..., y_m^*)$ là phương án tối ưu của bài toán (Q).

Để tìm Y^* ta giải bài toán (P).

Đưa bài toán (P) về dạng chính tắc, ta được bài toán (P'):

$$(P'):\quad f(X) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i & (i = \overline{1,m}) \\ x_j \ge 0 & (j = \overline{1,n+m}) \end{cases}$$

Giải bài toán (P') bằng phương pháp đơn hình:

- Nếu bài toán (P') vô nghiệm thì bài toán (Q) cũng vô nghiệm.

- Nếu bài toán (P') có nghiệm tức có phương án tối ưu thì bà toán (Q) cũng có phương án tối ưu và từ dòng cuối cùng của bảng đơn hình ứng với phương án tối ưu của bài toán (P') ta suy ra được phương án tối ưu của bài toán (Q).

Công thức suy nghiệm: $Y^* = (y_1^*, y_2^*, ..., y_m^*) = (\Delta^*_{n+1}, \Delta^*_{n+2}, ..., \Delta^*_{n+m})$.

Trong đó Δ^*_{n+i} , (i= $\overline{1,m}$) là các số kiểm tra của các biến phụ $x_{n+i} \ge 0$,

(i= $\overline{1,m}$) trong bảng đơn hình ứng với phương án tối ưu của bài toán (P')).

Giả sử $x^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$ là phương án tối ưu của bài toán (P) thì nghiệm X^* của bài toán đó cũng được tìm thông qua các số kiểm tra tương ứng của bài toán đối ngẫu (Q) trong bảng đơn hình ứng với phương án tối ưu. $x^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*) = (-\Delta^*_{m+1}, -\Delta^*_{m+2}, ..., -\Delta^*_{m+n})$.

Trong đó Δ^*_{m+j}, ($j= \overline{1,n}$) là các số kiểm tra của các biến phụ $y_{m+j} \geq 0$ ($j= \overline{1,n}$) trong bảng đơn hình ứng với phương án tối ưu của bài toán (Q)).

Đối với cặp bài toán đối ngẫu đối xứng , vai trò của bài toán gốc và bài toán đối ngẫu có thể thay thế cho nhau.

2.9.2. Các bài tập mẫu

Bài 1. Cho bài toán:

$$f(X) = x_1+3x_2 +4x_3+x_4 \to \min$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \quad + 2x_4 \geq 4 \\ 3x_2 - x_3 + 4x_4 \geq -9 \\ -3x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 \geq 10 \\ x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,4}) \end{cases}$$

- Viết bài toán đối ngẫu.
- Giải bài toán đối ngẫu bằng phương pháp đơn hình, từ đó suy ra nghiệm cho bài toán trên.

Giải

$$\varphi(Y) = 4y_1 - 9y_2 + 10y_3 \to \max.$$

$$\begin{cases} y_1 \quad - 3y_3 \leq 1 \\ -2y_1 + 3y_2 + y_3 \leq 3 \\ \quad - y_2 + 2y_3 \leq 4 \\ 2y_1 + 4y_2 - y_3 \leq 1 \\ y_i \geq 0 \quad (i = \overline{1,3}) \end{cases}$$

Đưa bài toán đối ngẫu về dạng chính tắc bằng cách thêm vào bài toán các biến phụ $y_i \geq 0$ ($i= \overline{1,3}$) . Ta có:

$$\varphi(Y) = 4y_1 - 9y_2 + 10y_3 \to \max.$$

$$\begin{cases} y_1 \quad - 3y_3 + y_4 = 1 \\ -2y_1 + 3y_2 + y_3 + y_5 = 3 \\ \quad - y_2 + 2y_3 + y_6 = 4 \\ 2y_1 + 4y_2 - y_3 + y_7 = 1 \\ y_i \geq 0 \quad (i = \overline{1,7}) \end{cases}$$

Từ bài toán dạng chính tắc này ta có ngay phương án cực biên xuất phát

$\overline{Y^0} = (0,0,0,1,3,4,1)$ với cơ sơ đơn vị $E_4 = \{A_4, A_5, A_6, A_7\}$ trong R^4.

Lập bảng đơn hình giải bài toán chính tắc đó với phương án cực biên xuất phát $\overline{Y^0}$.

Bảng 3 có $\Delta_j \geq 0 \ \forall j = \overline{1,7}$. Phương án tối ưu của bài toán chính tắc là:

$$\overline{Y_{opt}} = (\frac{3}{2},0,2,\frac{11}{2},4,0,0) \ , \ \varphi_{max} = 26.$$

Suy ra phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu là: $Y_{opt} = (\frac{3}{2},0,2)$, $\varphi_{max} = 26$.

Từ bảng 3 ta suy ra phương án tối ưu của bài toán gốc là:

$$X_{opt} = (x_1,x_2,x_3,x_4) = (\Delta_\$, \Delta_5, \Delta_6, \Delta_7) = (0,0,6,2) \text{ và } f_{min} = \varphi_{max} = 26.$$

Bài 2. Cho bài toán:

$$f(X) = 2x_1 - x_2 + 4x_3 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 \leq 5 \\ x_1 - 2x_2 \leq 4 \\ x_2 + x_3 \leq 2 \\ x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,3}) \end{cases}$$

Viết bài toán đối ngẫu.

Tìm nghiệm của bài toán trên thông qua bài toán đối ngẫu của nó.

Giải

Bài toán đối ngẫu:

$$\varphi(Y) = 5y_1 + 4y_2 + 2y_3 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} y_1 + y_2 \geq 2 \\ y_1 - 2y_2 + y_3 \geq -1 \\ -2y_1 + y_3 \geq 4 \\ y_i \geq 0 \quad (i = \overline{1,3}) \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ $\varphi(Y) = 5y_1 + 4y_2 + 2y_3 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} y_1 + y_2 \geq 2 \\ -y_1 + 2y_2 - y_3 \leq 1 \\ -2y_1 + y_3 \geq 4 \\ y_i \geq 0 \quad (i = \overline{1,3}) \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ $\varphi(\overline{Y}) = 5y_1 + 4y_2 + 2y_3 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} y_1 + y_2 - y_4 = 2 \\ -y_1 + 2y_2 - y_3 + y_5 = 1 \\ -2y_1 + y_3 - y_6 = 4 \\ y_i \geq 0 \quad (i = \overline{1,6}) \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ $\overline{\varphi}(\overline{Y}) = 5y_1 + 4y_2 + 2y_3 + My_7 + My_8 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} y_1 + y_2 \quad - y_4 \quad + y_7 \quad = 2 \\ -y_1 + 2y_2 - y_3 \quad + y_5 \quad = 1 \\ -2y_1 + y_3 \qquad - y_6 \quad + y_8 = 4 \\ y_i \geq 0 \quad (i = \overline{1,8}) \end{cases}$$

Từ bài toán này ta có ngay phương án cực biên xuất phát:

$\overline{Y^0}$ = (0,0,0,0,1,0,2,4) với cơ sở đơn vị $E_3 = \{A_7, A_5, A_8\}$ trong R^3.

Lập bảng đơn hình giải bài toán với phương án cực biên xuất phát $\overline{Y^0}$ đã biết.

Bảng 3 có: $\Delta_j \leq 0 \quad \forall j = \overline{1,6}$. Phương án tối ưu của bài toán (M) là:

$\overline{Y_{opt}}$ = (0,2,4,0,1,0,0,0) , $\overline{\varphi_{opt}}$ = 16.

$\Rightarrow$ Phương án tối ưu của bài toán chính tắc là: $\overline{Y_{opt}}$ = (0,2,4,0,1,0) , φ_{min} = 16.

$\Rightarrow$ Phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu là: Y_{opt} = (0,2,4) , φ_{min} = 16.

Từ bảng 3, suy ra phương án tối ưu của bài toán gốc là:

$X_{opt} = (x_1,x_2,x_3) = (-\Delta_4, -\Delta_5, -\Delta_6) = (4,0,2)$ và $f_{max} = \varphi_{min} = 16$.

BÀI TẬP CHƯƠNG 2

Giải bằng phương pháp đơn hình

1. $f(x) = 2x_1 + 3x_3 \rightarrow \max$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 + 3x_2 + x_4 = 9 \\ x_1 - x_5 = 4 \\ x_1 + 2x_2 + x_6 = 8 \\ x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,6}) \end{cases}$$

ĐS: x_{opt} = (3,2,0,0,1,1); f_{max} = 12

2. $f(x) = 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 5x_4 - 5x_5 - 5x_6 \rightarrow \max$

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_6 = 1 \\ x_1 + 4x_2 + x_3 + x_5 = 4 \\ -x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,6}) \end{cases}$$

ĐS: bài toán không có lời giải ($f(x) \rightarrow +\infty$)

3. $f(x) = 7x_1 - 21x_2 + 14x_3 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 & \geq 6 \\ x_1 + 7x_2 - 3x_3 & \leq 1 \\ -3x_1 - x_2 + x_3 & = -3 \\ x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,3}) \end{cases}$$

ĐS: $x_{opt} = (0,1/7,0,45/7,0,20/7)$; $f_{min} = -3$

4. $f(x) = x_1 + 2x_2 - 2x_4 - x_5 - 3x_6 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 - x_6 & = 2 \\ x_4 + x_5 + x_6 & = 12 \\ 4x_1 + x_3 + 2x_4 + 3x_6 & = 9 \\ x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,6}) \end{cases}$$

5. $f(x) = 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 \rightarrow \max$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 & \leq 5 \\ x_1 + 2x_2 + x_4 & \leq 7 \\ x_1 + x_3 + 2x_4 & \leq 3 \\ x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,4}) \end{cases}$$

ĐS: $x_{opt} = (3,2,0,0)$; $f_{max} = 8$

6. $f(x) = -5x_1 + 5x_2 - 9x_3 + 3x_4 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} -3x_1 + 2x_3 - x_4 & \geq -13 \\ 4x_1 - 3x_3 + 8x_4 & \leq 25 \\ x_2 - 2x_3 + 2x_4 & = 4 \\ -2x_1 + x_3 - 3x_4 & \geq -13 \\ x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,4}) \end{cases}$$

ĐS: bài toán không có lời giải (f(x) → -∞)

7. $f(x) = 2x_1 + 7x_2 - 5x_3 + \frac{9}{2}x_2 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 + 3x_4 & = 14 \\ x_2 - 4x_3 + x_4 & \leq 8 \\ x_2 - 2x_3 + 3x_4 & = 4 \\ -2x_1 + x_3 - 3x_4 & \geq -20 \\ x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,4}) \end{cases}$$

ĐS: $x_{opt} = (0,0,34,16)$: $f_{min} = -98$

8. Cho bài toán quy hoạch tuyến tính

$f(x) = 6x_2 + 4x_4 + x_5 + x_6 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 - 7x_4 - 2x_5 + x_6 & = 14 \\ -4x_1 + 6x_2 - 9x_3 + 21x_4 + 5x_5 - 2x_6 & = -45 \\ -2x_1 + 4x_3 - x_3 + 2x_4 - x_5 + x_6 & = -15 \\ x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,6}) \end{cases}$$

Chứng tỏ $x^{(0)} = (12,0,0,0,7,16)$ là một phương án cực biên của bài toán. Lợi dụng $x^{(0)}$ giải bài toán bằng phương pháp đơn hình.

Hướng dẫn và đáp số:

Chứng tỏ $x^{(0)}$ thoả mãn chặt 6 ràng buộc trong hệ ràng buộc của bài toán và 6 véctơ tương ứng độc lập tuyến tính.

Để giải bằng phương pháp đơn hình cần biến đổi matrận mở rộng của hệ phương trình trong hệ điều kiện để đưa các véctơ A_1, A_5, A_6 về các véctơ đơn vị. Ta được bài toán tương đương.

$f(x) = 6x_2 + 4x_4 + x_5 + x_6 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 & = 14 \\ 4x_2 + x_4 + x_6 & = 16 \\ 2x_2 - x_3 + 3x_4 + x_5 & = 7 \\ x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,6}) \end{cases}$$

Phương án cực biên $x^{(0)} = (12,0,0,0,7,16)$ ứng với cơ sở đơn vị:

$\{A_1, A_5, A_6, \} = E_3$

Bài toán có vô số phương án tối ưu, tập các phương án tối ưu:

$\{x_{opt}\} = \{\lambda_0 x_{opt}^{(0)} + \lambda_1 x_{opt}^{(1)} + \lambda_2 x_{opt}^{(2)}\}$ với $0 \leq \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2 \leq 1$ và $\lambda_0 + \lambda_1 \lambda_2 = 1$

Trong đó: $x_{opt}^{(0)} = (50/3,0,0,7/3,41/3)$. và $f_{min} = 23$

9. Cho bài toán:

$f(x) = x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 - 2x_5 \rightarrow \max$

$$\begin{cases} 3x_2 + 7x_2 - x_3 + 7x_4 - 2x_5 & = 9 \\ x_2 + 8x \ \ + 9x_4 + 7x_5 & = 25 \\ x_3 + x_4 + x_5 & = 3 \\ x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,5}) \end{cases}$$

Chứng tỏ $x^{(0)} = (3,0,0,2,1)$ là một phương án cực biên của bài toán. Giải bài toán với phương án cực biên xuất phát đó.

H.D: chỉ ra $x^{(0)}$ thoả mãn chặt 5 ràng buộc độc lập tuyến tính. Giả tương tự bài tập 9. $x_{opt} = (5,1,3,0,0)$; $f_{max} = 10$.

10. $f(x) = 2x_1 + 10x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 8x_5 + 3x_6 \rightarrow \max$

$$\begin{cases} x_1 + x_5 = 5 \\ -\frac{3}{5}x_1 + x_5 + 2x_6 = 11 \\ \frac{3}{5}x_1 + x_2 - \frac{6}{5}x_6 = 4 \\ x_j \ge 0 \quad (j = \overline{1,6}) \end{cases}$$

Đ.S: $x_{opt} = (5,7,0,0,4,5)$; $f_{max} = 127$

11. $f(x) = 5x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 + x_5 + 3x_6 \to \min$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_5 = 46 \\ 4x_1 + 3x_3 - x_4 + 2x_5 = 38 \\ 3x_1 + x_3 + x_6 = 21 \\ x_j \ge 0 \quad (j = \overline{1,6}) \end{cases}$$

ĐS: $x^{(1)}_{opt} = (7,12,0,5,0,0)$; $x^{(2)}_{opt} = (5,0,0,9,0,6)$

$\{x_{opt}\} = \{\lambda x^{(1)}_{opt} + (1-\lambda)x^{(2)}_{opt};\ 0 \le \lambda \le 1\}$ *và* $f_{min} = 79$

12. $f(x) = 2x_1 + x_2 - x_3 - 4x_4 \to \min$

$$\begin{cases} 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 \le 12 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 10 \\ 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 - 4x_4 = 6 \\ x_j \ge 0 \quad (j = \overline{1,4}) \end{cases}$$

ĐS: $x_{opt} = (5,0,0,1)$; $f_{min} = 6$

13. $f(x) = -x_1 + x_2 - 3x_3 \to \max$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + 3x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_j \ge 0 \quad (j = \overline{1,3}) \end{cases}$$

ĐS: bài toán không có phương án

14. $f(x) = -x_1 - 2x_2 - x_4 + 5 \to \max$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 \le 5 \\ -3x_1 - 5x_2 + x_3 \le -3 \\ x_1 + x_2 - x_4 = 6 \\ x_j \ge 0 \quad (j = \overline{1,4}) \end{cases}$$

ĐS: Bài toán có vô số phương án tối ưu. Tập phương án tối ưu có dạng:

$\{x_{opt}\} = \{\lambda x^{(1)}_{opt} + (1-\lambda)x^{(2)}_{opt} + 0 \le \lambda \le 1\}$

Trong đó: $x^{(1)}_{opt} = (6,0,15,0)$; $x^{(2)}_{opt}$;$= (6,0,7/4,0)$;$f_{max} = 11$

15. $f(x) = 6x_1 + x_2 - 2x_3 \to \min$

$$\begin{cases} 9x_1 + x_2 + x_3 \le 18 \\ 15x_1 + x_2 - 2x_3 = 20 \\ 3x_1 + x_3 = 3 \\ x_j \ge 0 \quad (j = \overline{1,3}) \end{cases}$$

ĐS: $x_{0pt} = (1,5,0)$, $f_{min} = 11$

16. $f(x) = x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 3x_4 \to \min$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ -6x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 18 \\ -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 10 \\ x_j \ge 0 \quad (j = \overline{1,4}) \end{cases}$$

ĐS: $x_{opt} = (2,6,0,6)$, $f_{min} = 32$

17. $f(x) = x_1 - 2x_2 + x_3 - 8x_4 + x_5 + x_6 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_3 - x_4 + x_6 = 12 \\ x_3 - 2x_4 = 6 \\ -2x_2 + 3x_3 + 6x_4 - 2x_5 - x_6 = 12 \\ x_j \ge 0 \quad (j = \overline{1,6}) \end{cases}$$

Nếu $c_4 = -11$ thì có kết luận gì ?

ĐS: trị số của f(x) không bị chặn trên tập phương án $(f(x) \to +\infty)$

Với c_4 *- 11 bài toán có phương án cực biên tối ưu:*

$x_{opt} = (11,0,6,0,3,0)$ *và* $f_{max} = 20$

18. $f(x) = -2x_1 - 3x_2 + 6x_3 - 4x_4 \to \min$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 3 \\ x_j \ge 0 \quad (j = \overline{1,4}) \end{cases}$$

ĐS: bài toán có tập phương án tối ưu:

$\{x_{opt}\} = \{\lambda x^{(1)}_{opt} + (1-\lambda)x^{(2)}_{opt} + 0 \le \lambda \le 1\}$

Trong đó: $x^{(1)}_{opt} = (0,2/5,1/5,0)$; $x^{(2)}_{opt} = (3/5,0,1/5,0)$; $f_{min} = 0$

19. $f(x) = 3x_1 + 4x_2 - 6x_4 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 2x_3 + x_4 = 10 \\ 2x_2 - x_3 + x_5 \le -2 \\ -7x_2 + x_2 + 4x_3 \le 22 \\ 4x_2 + 2x_3 - 2x_4 - 4x_5 = 20 \\ x_j \ge 0 \quad (j = \overline{1,5}) \end{cases}$$

ĐS: Bài toán không có phương án tối ưu($f(x) \to +\infty$).

20. $f(x) = 4x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 \to \min$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_4 = 10 \\ x_1 + 5x_2 + 3x_3 + \frac{3}{2}x_4 \le 32 \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 16 \\ x_j \ge 0 \quad (j = \overline{1,4}) \end{cases}$$

ĐS: $x_{opt} = (8,3,0,6)$; $f\min = 20$

21. $f(x) = x1 - 2x2 - 2x3 + x6 \to \min$

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - x_4 + x_5 + 2x_6 = 5 \\ x_2 - 3x_3 + 2x_4 - x_6 \le 10 \\ 3x_1 - x_2 - 5x_3 + 3x_4 - 4x_6 \le 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 = 4 \\ x_j \ge 0 \quad (j = \overline{1,6}) \end{cases}$$

ĐS: Trị số: $f(x) \to -\infty$ trên tập phương án. Bài toán không có phương án tối ưu

Giải và biện luận các bài toán sau đây theo tham số m

22. . Cho quy hoạch tuyến tính: $f(x) = -2x_1 + x_2 \to \max$

$$\begin{cases} -x_1 + ax_2 \le 1 \\ x_1 - a(3 - x_2) = 10 - 3a \\ x_j \ge 0 \quad (j = \overline{1,2});\ a - \text{tham số} \end{cases}$$

ĐS: Nếu $a \le 0$ bài toán không có phương án tối ưu ($f(x) \to +\infty$)

Nếu $0 < a < 1/3$; $x_{opt} = (9/2;\ 11/2a)$; $f_{max} = \dfrac{11}{2a} - 9$

Nếu $a \ge \dfrac{1}{3}$; $x_{opt} = (10,0)$; $f_{max} = -20$

23. $f(x) = 3x_1 + 4x_2 \to \min$

$$\begin{cases} ax_1 - 2x_2 & \geq 2 \\ x_1 + a(x_2 - 2) + x_3 & = 2(2 - a) \\ x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,3}); a - \text{tham số} \end{cases}$$

ĐS: Nếu $a < \frac{1}{2}$ *bài toán vô nghiệm*

Nếu $a \geq \frac{1}{2}$; $x_{opt} = (\frac{2}{a}, 0, 4 - \frac{2}{a})$; $f_{min} = \frac{6}{a}$

24. $f(x) = 5x_1 + 2x_2 + 5x_3 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} 4a(x_1 - 1) - x_2 + 4x_3 & \geq 2(1 - 2a) \\ ax_1 + x_2 + x_3 & \leq 3 \\ x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,3}); a - \text{tham số} \end{cases}$$

ĐS: Nếu $a \leq 1$; $x_{opt} = (0, 0, \frac{1}{2})$; $f_{min} = \frac{5}{2}$

Nếu $a > 1$; $x_{opt} = (\frac{1}{2a}, 0, 0,)$; $f_{min} = \frac{5}{2a}$

25. $f(x) = 4x_1 + 2x_2 \rightarrow \max$

$$\begin{cases} ax_1 + x_2 & \leq 6 \\ ax_1 & \leq 3 \\ -2ax_1 - x_2 & \geq -10 \\ x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,2}); a - \text{tham số} \end{cases}$$

ĐS: Nếu $a \leq 0$ *bài toán vô nghiệm*

Nếu $0 < a \leq 2$; $x_{opt} = (3/a, 3)$; $f_{max} = \frac{12}{a} + 6$

Nếu $a > 2$; $x_{opt} = (0,6)$; $f_{max} = 12$

26. $f(x) = x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + ax_3 & = 2 \\ x_1 + 2ax_3 + x_4 & = 3 \\ 4x_1 + ax_3 & = 1 \\ x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,4}); a - \text{tham số} \end{cases}$$

ĐS: Nếu $a < \frac{-4}{7}$; $x_{opt} = (\frac{1}{4}, \frac{4}{7}, 0, \frac{11}{4})$; $f_{min} - \frac{9}{2}$.

27. $f(x) = ax_1 + x_2 + \frac{3}{2} x_3 + 3x_4 - x_5 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 - 6x_5 = 12 \\ -5x_1 + \dfrac{7}{2}x_2 + 3x_4 - 5x_5 \leq 22 \\ 4x_1 - \dfrac{1}{2}x_2 - x_4 + 2x_5 \leq 38 \\ x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,5}) \end{cases}$$

Giải bài toán với a ≥ - 2. Tìm giá trị của a để bài toán có vô số phương án tối ưu. Tìm một phương án tối ưu có $x_2 = 32$

ĐS: $x^{(1)}_{opt} = (0,12,0,0,4); f_{min} = 8$

Với a = - 2 tìm được phương án tối ưu nữa: $x^{(2)}_{opt} = (\frac{36}{5}, 36, 0, 0, \frac{68}{5})$;

Nên tập phương án tối ưu là:

$\{x_{opt}\} = \{ \lambda x^{(1)}_{opt} + (1-\lambda) x^{(2)}_{opt}; 0, \leq \lambda \leq 1 \}$

Dựa vào yêu cầu có $x_2 = 32$ *suy ra* $\lambda x^{(1)}_{opt} + (1-\lambda) x^{(2)}_{opt} = 32$

Giải ra được $\lambda = \frac{1}{6}$ *suy ra phương án tối ưu cần tìm là:*

$x_{opt} = (6,32,0,0,12)$

Giải các bài toán qui hoạch tuyến tính thông qua bài toán đối ngẫu:

28. $f(x) = x_1 + 5x_2 + x_3 \to \min$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 4 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 \geq -2 \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 \geq 1 \\ x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,3}) \end{cases}$$

ĐS: $x_{opt} = (\frac{4}{3}, 0, 0)$, $f_{min} = \frac{4}{3}$

29. $f(x) = x_1 + 5x_2 + 4x_3 - 6x_4 \to \max$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 - 5x_4 \leq 1 \\ -5x_1 + 6x_2 - x_3 + x_4 \geq -2 \\ 4x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 \leq 2 \\ x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,4}) \end{cases}$$

ĐS: Bài toán không có phương án.

30. $f(x) = -x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 + 5x_5 \to \max$

$$\begin{cases} \frac{2}{3}x_1 + 5x_2 \quad - \frac{5}{3}x_4 \quad \le \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3}x_1 - 3x_2 + x_3 + \frac{5}{3}x_4 - \frac{4}{3}x_5 \quad \ge \frac{13}{3} \\ x_1 + 7x_2 - x_3 - 3x_4 - 7x_5 \quad \ge -5 \\ x_j \ge 0 \quad (j = \overline{1,5}) \end{cases}$$

ĐS: $X_{opt}= (6,0,5,2,0)$, $f_{min} = 6$.

31. $f(x) = 3x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 - 2x_5 \to \max$

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 \quad + 8x_5 \quad \ge 5 \\ \frac{23}{2}x_1 + 3x_2 - \frac{2}{3}x_3 - 6x_4 + 20x_5 \quad \ge 20 \\ \frac{17}{4}x_1 + x_2 - \frac{3}{4}x_3 - \frac{3}{2}x_4 + 6x_5 \quad \le \frac{15}{2} \\ \frac{2}{3}x_1 \quad + \frac{1}{2}x_3 \quad \le 3 \\ x_j \ge 0 \quad (j = \overline{1,5}) \end{cases}$$

ĐS: $X_{opt} = (0,15,6,2,0)$, $f_{max} = 25$.

32. Giải bài toán qui hoạch tuyến tính sau thông qua bài toán đối ngẫu của nó:

$f(X) = 2x_1 + x_2 - x_3 \to \min$

$$\begin{cases} -x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 \quad \ge 1 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 2x_4 \ge 3 \\ -2x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 \ge b_3 \\ -2x_1 \quad + x_2 - 3x_3 - 3x_4 \quad \ge -2 \\ x_1, x_2, x_4 \ge 0, \quad x_3 \le 0 \end{cases}$$

- Nêu trình tự giải bài toán trên.
- Với b_3 nhận giá trị dương, tìm kết quả của bài toán.
- Tìm b_3 để bài toán có phương án tối ưu.
- Thông qua việc tính toán giải bài toán đối ngẫu, hãy xác định xem có dấu hiệu nào chứng tỏ bài toán gốc đã cho có nhiều phương án tối ưu? Nếu có, hãy tìm một phương án tối ưu khác của bài toán.

33. Cho bài toan:

$f(X) = (C,X) \to \max$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} A_j x_j = B \\ X \ge 0 \end{cases}$$

Chứng minh rằng nếu $A_j = A_k$, $j \neq k$ và $c_j < c_k$ thì điều kiện cần để phương án X^* tối ưu là $x_j^* = 0$.

HD: Xét hai ràng buộc j và k của bài toán đối ngẫu.

34. Chứng minh rằng bài toán:

$$f(X) = (C,X) \to \max$$

$$\begin{cases} AX \le B \\ X \ge 0 \end{cases}, (A \ge 0 \quad, B \ge 0)$$

Giải được nếu với mỗi chỉ số j đều có ít nhất một $a_{ij} > 0$.

HD: Xét bài toán đối ngẫu nhận thấy vế trái của mọi ràng buộc đều có ít nhất một $a_{ij} > 0$. Suy ra bài toán có phương án.

35. Cho bài toán:

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i & (i = \overline{1,m}) \\ x_j \ge 0 & (j = \overline{1.n}) \end{cases}$$

Dùng bài toán đối ngẫu chứng minh bài toán trên không giải được nếu $b_i < 0 \ \forall i$ và $\exists i \ : \ a_{ij} > 0 \ \forall j$.

36. Viết bài toán đối ngẫu và chỉ ra cặp ràng buộc đối ngẫu của bài toán sau:

a. $f(X) = x_1+3x_2-x_3+2x_4 \to \min$

$$\begin{cases} -x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 3 \\ -x_2 + 2x_3 - x_4 = -2 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_4 = 5 \\ x_j \ge 0 \quad (j = \overline{1,4}) \end{cases}$$

b. $f(X) = 2x_1-x_2+5x_3 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 \le 8 \\ -3x_1 + x_2 - 2x_3 \le -4 \\ -5x_2 + x_4 \le 12 \\ x_j \ge 0 \quad (j = \overline{1,4}) \end{cases}$$

c. $f(x) = x_1+2x_2+3x_3+4x_4 + 5x_5 \to \min$

$$\begin{cases} -7x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 \le 1 \\ 4x_1 + 2x_3 - x_4 + 3x_5 \ge -2 \\ -2x_2 + 3x_3 + 5x_4 - x_5 \le -4 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_5 \ge 3 \\ x_j \ge 0 (j = \overline{1,5}) \end{cases}$$

d. f(x) = $-4x_1+2x_2-5x_3-x_4+x_5 \to$ max

$$\begin{cases} -2x_1 + x_3 - x_4 + 3x_5 \ge -12 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + x_5 = 23 \\ 4x_1 - x_2 + 3x_4 - x_5 \le 4 \\ x_j \ge 0 \quad (j = \overline{1,5}) \end{cases}$$

e. f(x) = $2x_1-3x_2+4x_3+5x_4-x_5 \to$ min

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 - 5x_3 + x_5 - x_6 = 4 \\ 2x_1 - x_2 + x_4 + 2x_6 \le 8 \\ 3x_1 + 7x_3 - 2x_5 \ge -6 \\ 5x_2 - x_3 + 3x_4 = 12 \\ -2x_1 + x_4 + 3x_6 \ge 10 \\ x_6 \le 1 \\ x_2, x_4 \ge 0; x_3, x_5 \le 0; x_1, x_6 \in R \end{cases}$$

37. Dùng lý thuyết đối ngẫu chứng tỏ các bài toán sau giải được:

a. f(X) = $2x_1 + 5x_3 + 3x_4 \to$ max

$$\begin{cases} x_1 - 2x_3 + 2x_4 = -5 \\ 3x_2 + 4x_3 - x_4 = -9 \\ 5x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 14 \\ x_1, x_2, x_3 \le 0; \quad x_2, x_5 \in R \end{cases}$$

b. f(X) = $3x_1 + 2x_3 + 4x_5 \to$ min

$$\begin{cases} 2x_1 - x_3 + 3x_5 \le 16 \\ 4x_3 - 3x_4 + x_5 \ge 9 \\ -x_2 + x_3 - 2x_5 = -11 \\ x_1, x_3, x_5 \ge 0; \quad x_2, x_4 \in R \end{cases}$$

c. f(X) = $x_1+2x_2+3x_3+...+nx_n \to$ min

$$\begin{cases} x_1 \ge 1 \\ x_1 + x_2 \ge 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 \ge 3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_1 + x_2 + \dots\dots\dots + x_n \ge n \\ x_j \ge 0 \quad (j = \overline{1,n}) \end{cases}$$

38. Dùng lý thuyết đối ngẫu, chứng minh rằng các bài toán sau không giải được:

a. $f(X) = -2x_1 + x_2 + 4x_3 + 3x_4 \to \min$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 + 5x_4 = 30 \\ 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 20 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 12 \\ x_j \ge 0 \quad (j = \overline{1,4}) \end{cases}$$

b. $f(X) = 2x_1 + 3x_3 - 4x_3 + x_4 + 2x_5 \to \max$

$$\begin{cases} -2x_2 + 5x_3 - x_4 - 3x_5 \ge -7 \\ x_2 + 2x_3 - x_5 \le 11 \\ -x_1 + 4x_2 - x_3 + 6x_4 - x_5 \le 0 \\ 3x_3 + 2x_4 = 24 \\ x_4, x_5 \ge 0; \quad x_1, x_2, x_3 \in R \end{cases}$$

c. $f(X) = -x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 - 3x_5 + 5x_6 \to \min$

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_3 + x_5 = 12 \\ -4x_2 + x_6 = -8 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 - 2x_5 + 4x_6 \ge 15 \\ -x_1 + 5x_3 + 4x_5 - 2x_6 \le 7 \\ x_j \ge 0 \quad (j = \overline{1,3}),\ x_j \in R \quad (j = \overline{4,6}) \end{cases}$$

39. Cho bài toán:

$$f(X) = -2x_1 - 6x_2 + 5x_3 - x_4 - 4x_5 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 5x_4 + 9x_5 = 3 \\ x_2 - 3x_3 + 4x_4 - 5x_5 = 6 \\ x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 1 \\ x_j \ge 0 \quad (j = \overline{1,5}) \end{cases}$$

Áp dụng lý thuyết đối ngẫu, chứng minh rằng X* = (0,0,16,31,14) là phương án tối ưu của bài toán đã cho.

HD: Viết bài toán đối ngẫu và sử dụng định lý độ lệch bù.

40. Biết rằng X* = (0,5,0,3) là phương án tối ưu của bài toán:

$$f(X) = 10x_1+5x_2+13x_3+16x_4 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 \geq 16 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \geq 22 \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 + 5x_4 \geq 20 \\ x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,4}) \end{cases}$$

Tìm phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu:

ĐS: $Y_{opt} = Y = (0, \frac{3}{2}, 2)$.

41. Cho bài toán:

$$f(X) = x_1+3x_2+2x_3+3x_4+5x_5 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 3 \\ -x_2 - x_3 + 2x_4 + 4x_5 \geq 18 \\ -x_2 + 3x_3 + 2x_5 \leq 10 \\ x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,5}) \end{cases}$$

Tìm phương án tối ưu của bài toán đã cho biết rằng $Y^* = (\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, 0)$ là phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu.

ĐS: $X_{opt} = X = (0,0,0,5,2)$.

42. Kiểm tra tính tối ưu của phương án X = (5,-6,1,-4,0) đối với bài toán:

$$f(x) = x_1-2x_2+x_3-x_4+x_5 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5 \leq 4 \\ x_1 + 3x_3 - 4x_4 \geq 8 \\ x_1, x_3, x_5 \geq 0;\ x_2, x_4 \in R \end{cases}$$

HD: Sử dụng định lý độ lệch bù.

43. Cho bài toán

$$f(x) = 3x_1+9x_2-2x_3+x_4-4x_5 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} -x_1 + 5x_2 - 3x_3 + x_4 - 2x_5 = -6 \\ 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 = 4 \\ 4x_1 - x_3 + 2x_4 - 3x_5 \geq 2 \\ x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,5}) \end{cases}$$

Và véctơ $X^0 = (2,0,0,8,6)$.

Viết bài toán đối ngẫu và chỉ ra cặp ràng buộc đối ngẫu của hai bài toán.

Phân tích tính chất của véctơ X^0 đối với bài toán đã cho. Xác định tập phương án tối ưu và các phương án cực biên tối ưu của 2 bài toán (nếu có).

ĐS: $X_{opt} = X = (-1+\frac{1}{2}x_5, 0, 0, -7+\frac{5}{2}x_5, x_5)$, $x_5 \geq 0$

$X^* = (\frac{3}{2}, 0, 0, \frac{11}{2}, 5)$

***44.** Cho bài toán:*

$$f(X) = x_1 - x_2 + 6x_3 + 5x_4 + c_5x_5 + c_6x_6 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_4 + 3x_5 \geq -3 \\ x_2 - 2x_3 - x_4 + 2x_5 + 3x_6 \leq -5 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 - x_5 + 3x_6 = 10 \\ x_j \geq 0 \quad (j = \overline{2,6}), \quad x_1 \in R \end{cases}$$

Và phương án X = (0,2,3,1,0,0).

Viết bài toán đối ngẫu. X^0 có phải là phương án cực biên hay không?

Tìm điều kiện đối với c_5, c_6 để X^0 là phương án tối ưu, khi đó xác định phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu.

ĐS: X^0 *- không là phương án cực biên.*

$c_5 \geq 3$, $c_6 \geq 2$

$Y_{opt} = (3,-2,2)$.

***45.** Xét bài toán:*

$$f(X) = x_1 + 7x_2 + 3x_3 + 5x_4 - x_5 - 5x_6 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = b_1 \\ -x_1 + 2x_2 - 5x_3 - x_5 + 3x_6 \geq b_2 \\ -6x_1 + 7x_2 + 3x_3 - x_4 + 4x_5 + x_6 = b_3 \\ x_1, x_3, x_4 \geq 0; \quad x_6 \leq 0; \quad x_2, x_5 \in R \end{cases}$$

Dùng lý thuyết đối ngẫu chứng minh bài toán trên giải được với mọi véctơ B = (b_1, b_2 , b_3). Xác định phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu theo véctơ B.

Tìm phương án tối ưu của cặp bài toán đối ngẫu khi B = (6,6,-4).

Cho $b_2 = 4$, $b_3 = 5$. Xác định b_1 để mọi phương án của bài toán đối ngẫu đều tối ưu.

ĐS: $3b_1 + b_2 + b_3 > 0$ $Y = (8,5,3)$.

$3b_1 + b_2 + b_3 < 0$ $Y = (-7,0,-2)$

$3b_1 + b_2 + b_3 = 0$ *mọi phương án của bài toán đối ngẫu đều tối ưu.*

$X = (0,2,0,10,-2,0)$.

$b_1 = -3$.

46. Một doanh nghiệp làm kinh tế có 3 loại nguyên vật liệu (NVL) khác nhau có thể sản xuất được 4 loại sản phẩm (SP) . Định mức về NVL mỗi loại cho việc sản xuất 1 đơn vị sản phẩm cùng loại với lượng NVL mỗi loại mà đơn vị có thể huy động được cho trong bảng sau:

SP / NVL	SP1	SP2	SP3	SP4	trữ lượng NVL
NVL1	3	4	5	3	44
NVL2	3	4	6	5	50
NVL3	5	2	4	3	41
Giá bán (USD)	11	6,5	10	7	

Yêu cầu đối với đơn vị là cần sử dụng các phương pháp sản xuất sao cho phù hợp với điều kiện hạn chế về NVL, đồng thời tổng thu nhập khi bán các sản phẩm sản xuất ra được nhiều nhất.

a. Lập dạng toán học của bài toán trên ? Viết bài toán đối ngẫu, nói rõ nội dung kinh tế các biến trong bài toán đối ngẫu.

b. Dùng lý thuyết đối ngẫu, Chứng tỏ véctơ X = (5,8,0,0) là phương án tối ưu của bài toán gốc. Phân tích ý nghĩa kinh tế trong mối quan hệ giưa hai bài toán trên cơ sở 2 phương án tối ưu của chúng.

HD:

a. Gọi x_j là lượng sản phẩm loại j sẽ sản xuất, $j=\overline{1,4}$

- Khi đó mô hình toán học của bài toán là:

$$f(x)=11x_1+6.5x_2+10x_3+7x_4\to \max \quad (1)$$

$$\begin{cases}3x_1+4x_2+5x_3+3x_4\le 44\\ 3x_1+4x_2+6x_3+5x_4\le 50\\ 5x_1+2x_2+4x_3+3x_4\le 41\end{cases} \quad (2)$$

$$x_j\ge \overline{0,4} \quad (3)$$

- Bài toán đối ngẫu với bài toán (1)-(2)-(3) là:

$$g(y)=44y_1+50y_2+41y_3\to \min \quad (1')$$

$$\begin{cases}3y_1+3y_2+5y_3\ge 11\\ 4y_1+4y_2+2y_3\ge 6.5\\ 5y_1+6y_2+4y_3\ge 10\\ 3y_1+5y_2+3y_3\ge 7\end{cases} \quad (2')$$

$$y_i\ge 0, i=\overline{1,3} \quad (3')$$

- Ý nghĩa kinh tế:

- x_j $j=\overline{1,4}$ *là số lượng sản phẩm loại j sẽ sản xuất theo kế hoạch.*

- y_i $i = \overline{1,4}$ *là giá đầu vào của các loại nguyên liệu thứ i.*

Khi đó nếu tồn tại một kế hoạch sản xuất thỏa mãn các điều kiện đã có của doanh nghiệp sao cho bán được nhiều tiền nhất thì cũng tồn tại một giá đầu vào để doanh nghiệp lựa chọn sao cho đáp ứng mọi điều kiện đã có mà chi phí sản xuất là ít nhất và tại hệ thống giá đầu vào đó, tổng số tiền chi phí sản xuất bằng tổng số tiền bán sản phẩm.

b. Dùng định lý đối ngẫu chứng tỏ x=(5,8,0,0) là $y^* = (y^*_1, y^*_2, y^*_3)$ *xác định được từ x là 2 phương án của cặp bài toán đối ngẫu và f(x) = g(y*).*

CHƯƠNG III: CÁC MỞ RỘNG CỦA QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH

3.1. BÀI TOÁN VẬN TẢI ĐÓNG

3.1.1. Nội dung bài toán.

a: Bài toán:

Một đơn vị quốc phòng nhận nhiệm vụ vận chuyển một loại hàng hoá thuần nhất từ m địa điểm (kho, nơi sản xuất …) phát A_i ($i=\overline{1.m}$) với lượng hàng tương ứng là a_i ($i=\overline{1.m}$) đơn vị đến n địa điểm nhận hàng (điểm thu) B_j ($j=\overline{1.n}$) với nhu cầu tiếp nhận là B_j ($j=\overline{1.n}$) đơn vị. Biết chi phí vận chuyển một đơn vị hàng hoá từ điểm phát A_i ($i=\overline{1.m}$) đến điểm thu B_j ($j=\overline{1.n}$) là C_{ij} ($i=\overline{1.m}$, $j=\overline{1.n}$). Hãy lập kế hoạch vận chuyển thoả mãn yêu cầu giao hết nhận đủ, sao cho chi phí vận chuyển tổng cộng là nhỏ nhất, biết rằng tổng lượng hàng phát ra đúng bằng lượng hàng thu vào, tức là:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \qquad (*)$$

Điều kiện (*) gọi là điều kiện cân bằng cung - cầu (C- C) hay gọi là điều kiện cân bằng thu - phát.

b. Mô hình toán học:

Gọi X_{ij} ($i=\overline{1.m}$, $j=\overline{1.n}$) là lượng hàng vận chuyển từ trạm phát A_i ($i=\overline{1.m}$) đến trạm thu B_j ($j=\overline{1.n}$), khi đó bài toán có dạng:

$$f(x)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \rightarrow \min \quad (3.1)$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \; (i=\overline{1.m}) & (3.2) \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \; (j=\overline{1.n}) & (3.3) \\ x_{ij} \geq 0 (i=\overline{1.m}, j=\overline{1.n}) & (3.4) \end{cases}$$

Ta thấy (3.1), (3.2), (3.3), (3.4) là dạng toán học của bài toán dạng đóng.

Nếu kết hợp với điều kiện $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$ ta gọi là bài toán cân bằng thu phát (còn gọi là bài toán vận tải dạng đóng).

c. Bài toán vận tải dạng bảng

Ta đưa bài toán vào một bảng gọi là bảng vận tải.

Bảng gồm (m+1) hàng và (n+1) cột, cột 1 ghi tên và lượng hàng ở các điểm phát (A_i và a_i). Hàng 1 ghi tên và lượng hàng ở các điểm thu (B_j và b_j), ($m \times n$) ô còn lại trong mỗi ô góc trên bên trái ghi cước phí c_{ij}, góc dưới bên phải ghi lượng hàng x_{ij}.

$A_i \backslash B_j$	b_1	b_2	……	b_j	……	b_n
a_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	……	c_{1j} x_{1j}	……	c_{1n} x_{1n}
a_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	……	c_{2j} x_{2j}	……	c_{2n} x_{2n}
……	……	……	……	……	……	……
a_i	c_{i1} x_{i1}	c_{i2} x_{i2}	……	c_{ij} x_{ij}	……	c_{in} x_{in}
……	……	……	……	……	……	……
a_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	……	c_{mi} x_{mi}	……	c_{mn} x_{mn}

* Các khái niệm về bài toán dạng bảng:

+ Ô chọn: Là ô có lượng hàng $x_{ij} > 0$, còn gọi là ô sử dụng, khoanh tròn x_{ij} lại.

+ Ô loại: Là ô không có hàng, tức $x_{ij}=0$, ta để trống ô đó.

+ Dây chuyền: là một đoạn thẳng hay một dãy liên tiếp các đoạn thẳng gấp khúc mà hai đầu mút là hai ô chỉ nằm trên cùng một hàng hoặc một cột với một ô chọn khác thuộc dây truyền của bảng vận tải.

+ Chu trình: Là dây chuyền khép kín

Như vậy một hàng hoặc một cột mà chu trình đi qua thì chỉ đi qua hai ô và số ô. Do đó số ô ít nhất của một chu trình là 4.

+ Ma trận $X = (x_{i\,j})_{m.n}$ thỏa mãn hệ (2) - (4) được gọi là một phương án của bài toán.

+ Phương án: $X = (x_{i\,j})_{m.n}$ thỏa mãn được gọi là phương án cực biên của bài toán vận tải nếu tập hợp các ô tương ứng với các thành phần dương của nó không tạo thành chu trình.

+ Phương án $X = (x_{i\,j})_{m.n}$ được gọi là phương án cực biên không suy biến nếu số ô chọn của nó đúng bằng m+n+1.

+ Phương án $X = (x_{i\,j})_{m.n}$ được gọi là phương án cực biên suy biến nếu số ô chọn của nó nhỏ thua m+n+1.

+ Một phương án thoả mãn yêu cầu (1) được gọi là phương án tối ưu (nghiệm) của bài toán, ký hiệu là X_{opt}.

3.1.2. Tính chất chung của bài toán vận tải đóng

- Bài toán vận tải đóng là một trường hợp riêng của bài toán QHTT dạng chính tắc. Trong hệ (m+n) phương trình ràng buộc chỉ có (m+n-1) phương trình độc lập tuyến tính do đó một phương án cực biên có tối đa (m+n-1) thành phần dương.

- Các véc tơ điều kiện A_j tương ứng với biến x_{ij} có thành phần i và thành phân (m+j) bằng 1, các thành phần còn lại đều bằng 0.

- Bài toán luôn luôn có lời giải.

3.1.3. Phương pháp thế vị giải bài toàn vận tải dạng đóng

a. Phương pháp tìm phương án cực biên xuất phát.

Để xây dựng một phương án cực biên xuất phát người ta thường sử dụng một trong ba phương pháp sau:

- Phương pháp góc Tây-Bắc.

Phương pháp góc tây bắc gồm những bước sau:

Bước 1. Chọn ô nằm ở dòng 1, cột 1 của bảng vận tải.

Bước 2. Phân lượng hàng h = min$\{a_1, b_1\}$ vào ô(1,1)

Bước 3. Đánh dấu hàng (cột), theo đó lượng hàng ở trạm phát (trạm thu) tương ứng đã hết (đã đủ).

Bước 4. Quay trở về bước 1 thực hiện công việc ở những ô còn lại.

- Phương pháp min- cước.

Nội dung phương pháp min cước gồm các bước sau đây.

Bước 1. Chọn ô có cước phí thấp nhất để phân hàng giả sử là ô (i,j).

Bước 2. Phân lượng hàng h = min $\{a_i, b_j\}$ vào ô(i,j)

Bước 3. Đánh dấu các ô thuộc hàng i, hoặc cột j nếu trạm phát A_i đã phát hết hàng, hoặc trạm thu B_j đã nhận đủ hàng.

Bước 4. Quay trở lại bước 1 thực hiện công việc ở những ô còn lại.

- Phương pháp xấp xỉ Phoghel.

* Định nghĩa. Độ lệch của hàng (cột) là hiệu số giữa ô có cước phí thấp thứ nhì trừ đi ô có cước phí thấp thứ nhất của hàng (cột) đó.

Nội dung của phương pháp Phoghen gồm các bước sau:

Bước 1. Chọn hàng hoặc cột có độ chênh lệch lớn nhất

Bước 2. Chọn ô có cước phí thấp nhất thuộc hàng (cột) có độ chênh lệch lớn nhất, giả sử ô(i,j).

Bước 3. Phân lượng hàng h = min$\{a_i, b_j\}$ vào ô(i,j)

Bước 4. Đánh dấu các ô thuộc hàng (cột), theo đó trạm phát A_i đã phát hết hàng hoặc trạm thu B_j đã nhận đủ hàng, quay trở về từ bước 1 tiếp tục thực hiện thuật toán.

b. Tiêu chuẩn tối ưu

Phương án cực biên không suy biến $X=(x_{ij})_{m.n}$ được gọi là phương án tối ưu khi và chỉ khi tồn tại các số u_i ($i=\overline{1.m}$) cho các hàng và các số v_j ($j=\overline{1.n}$) cho các cột của bảng vận tải sao cho:

$$\begin{cases} u_i + v_j = c_{ij} & ,(i.j): x_{ij} > 0 \quad (1) \\ u_i + v_j \le c_{ij} & ,(i.j): x_{ij} = 0 \quad (2) \end{cases}$$

Phương trình (1) ứng với ô (i.j) là ô chọn.

Phương trình (2) ứng với ô (i.j) là ô loại.

Các số u_i ,v_j được gọi là hệ thống thế vị, trong đó u_i ($i=\overline{1.m}$) được gọi là thế vị hàng, v_j ($j=\overline{1.n}$) gọi là thế vị cột.

c. Thuật toán thế vị

Bước 1: Tìm phương án cực biên xuất phát $X^0= (x_{ij})_{m..xn}$

Sử dụng một trong 3 phương pháp đã trình bầy ở trên để tìm phương án cực biên xuất phát (nếu phương án tìm được là phương án suy biến thì ta phải bổ xung ô chọn không để được phương án không suy biến, ô chọn có vai trò như các ô chọn khác).

Bước 2: Kiểm tra tính tối ưu của phương án.

+ Xây dựng hệ thống thế vị.

Hệ (1) là hệ phương trình có (n+ m) ẩn và (n + m -1) phương trình độc lập tuyến tính nên hệ (1) có vô số nghiệm. Nếu cho u_i ($i=\overline{1.m}$) hoặc v_j ($j=\overline{1.n}$) một giá trị a tuỳ ý thì mọi giá trị khác đều xác định được một cách duy nhất theo (1).

+ Tính các số kiểm tra.

Dựa vào (2) ta đặt $\Delta_{ij}= u_i+ v_j-c_{ij}$ ($i=\overline{1.m}, j=\overline{1.n}$) gọi là ước lượng kiểm tra và tính Δ_{ij} ứng với các ô loại. Có hai khả năng xảy ra:

- Nếu mọi $\Delta_{ij} \le 0$ ($i = \overline{1.m}, j = \overline{1.n}$) thì phương án đang xét là tối ưu (thuật toán kết thúc).

- Nếu tồn tại $\Delta_{ij} >0$ ($i = \overline{1.m}, j = \overline{1.n}$) thì phương án đang xét chưa tối ưu, chuyển sang bước 3.

Bước 3: Xây dựng phương án mới

+ Chọn ô điều chỉnh:

Ô (r,s) gọi là ô điều chỉnh nếu: $\Delta_{rs} = \max\ \{\Delta_{ij} > 0\ \ (i = \overline{1.m}, j = \overline{1.n})\}$.

+ Tìm chu trình điều chỉnh: Là chu trình với ô xuất phát là ô điều chỉnh, các ô còn lại là ô chọn. Gọi V là tập hợp các ô thuộc chu trình điều chỉnh.

+ Đánh dấu các ô của chu trình, bắt đầu từ ô điều chỉnh đánh dấu (+) rồi xen kẽ nhau đánh dấu (-), (+)... cho đến hết chu trình. Ký hiệu V^+ là tập hợp các ô có dấu (+), V^- là tập hợp các ô có dấu (-). Khi đó: $V= V^+ \quad V^-$.

+ Xác định lượng hàng điều chỉnh:

$q = \min\{x_{ij}: (i,j) \in V^-\}, q > 0.$

+ Điều chỉnh sang phương án mới: $X^1 = (x^1_{ij})_{mxn}$ với:

$$x^1_{ij} = \begin{cases} x_{ij} & \text{, nếu } (i,j) \notin V \\ x_{ij} + q & \text{, nếu } (i,j) \in V^+ \\ x_{ij} - q & \text{, nếu } (i,j) \in V^- \end{cases}$$

Gọi X^1 đóng vai trò như X^0 rồi quay lại bước 2 cho đến khi tìm được phương án tối ưu.

Chú ý:

- Nếu ô điều chỉnh không duy nhất (tức có hai hay nhiều ô có $\Delta_{ij} = \Delta_{rs}$) thì ta chọn theo nguyên tắc: Xét theo hàng từ trên xuống dưới trong bảng vận tải gặp ô nào đầu tiên thì ta chọn làm ô điều chỉnh.

- Nếu có thể thì ta chọn ô (i_0,j_0) nào đó mà:

$$q\,.\Delta_{i_0,j_0} = \max\{q.\,\Delta_{ij}\}>0$$

thì giá trị hàm mục tiêu giảm nhanh hơn, thuật toán được rút ngắn.

3.1.4. Các dạng bài tập mẫu

Bài 1: Giải bài toán vận tải với số liệu cho trong bảng sau:

Bảng 1

a_i \ b_j	30	25	35	40
45	9	1	2	7
50	5	4	6	2
35	5	6	1	3

Giải:

<u>Cách 1</u>: Tìm phương án cực biên bằng phương pháp góc Tây Bắc.

Bước 1: Tìm phương án xuất phát X^0 bằng phương pháp góc Tây Bắc.

Sử dụng phương pháp góc Tây Bắc ta được phương án cho ở bảng 2.

Bảng 2: X^0

a_j \ b_j	30	25	35	40	u_i
45	9 1 - 30	1 2 + 15	2 $\boxed{1}$	7 $\boxed{-8}$	0
50	5 $\boxed{}$	4 3 - 10	6 4 35	2 5 + 5	3
35	5 $\boxed{8}$ + ⊕	6 $\boxed{-1}$	1 $\boxed{6}$	3 6 - 35	4
v_j	9	1	3	-1	

+ Ta thấy X^0 là phương án cực biên không suy biến.

Bước 2: Kiểm tra tính tối ưu của X^0.

+ Xây dựng hệ thống thế vị: Cho $u_1 = 0$ khi đó ta tính được các số u_i và v_j còn lại như trong bảng 1.

+ Tính số kiểm tra: Số kiểm tra $\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}$ $(i = \overline{1.m}, j = \overline{1.n})$ được ghi ở góc trên bên phải như trong bảng 1. Trong bảng 1 ta thấy X^0 chưa tối ưu vì tồn tại một số ước lượng kiểm tra không âm. Khi đó ta chuyển sang bước 3.

Bước 3: Xây dựng phương án mới X^1.

+ Chọn ô điều chỉnh.

Ô điều chỉnh là ô (1,3) vì $\Delta_{13} = 8 = \max\{7,8,1,6\}$.

+ Tìm chu trình điều chỉnh.

Chu trình điều chỉnh như trong bảng 1.

+ Đánh dấu chẵn lẻ xen kẽ như trong bảng 1. (Bắt đầu từ ô điều chỉnh đánh dấu (+))

+ Xác định lượng hàng điều chỉnh.

Lượng hàng điều chỉnh q = min{30,10,35}=10.

+ Điều chỉnh sang phương án mới $X^1 = (x^1_{ij})$

Dựa vào công thức:

$$x'_{ij} = \begin{cases} x_{ij} & \text{nếu } (i,j) \notin V \\ x_{ij} + q & \text{nếu } (i,j) \in V^+ \\ x_{ij} - q & \text{nếu } (i,j) \in V^- \end{cases}$$

ta có bảng 3 sau:

Bảng 3: X^1

b_j / a_j	30	25	35	40	u_i
45	9 - 20	1 25	2 $\boxed{9}$ + +	7 $\boxed{0}$	0
50	5 $\boxed{-1}$	4 $\boxed{-8}$	6 - 35	2 + 15	-5
35	5 +10	6 $\boxed{-9}$	1 $\boxed{6}$	3 - 25	-4
v_j	9	1	11	7	

Bảng 4: X^2

b_j / a_j	30	25	35	40	u_i
45	9 $\boxed{-}$	1 25	2 $\boxed{9}$ 20	7 $\boxed{-}$	0
50	5 $\boxed{-}$	4	6 - 15	2 + 35	4
35	5 30	6 $\boxed{-9}$	1 $\boxed{6}$ + ⊕	3 - 5	5
v_j	0	1	2	-2	

Ở bảng 3 ta coi X^1 như X^0 rồi quay lại bước 2. Cứ tiếp tục như vậy ta tìm được phương án X^2 , X^3 và phương án tối ưu cho ở bảng 6.

Bảng 5: X^3

b_j / a_j	30	25	35	40	u_i
45	9 $\boxed{-}$	1 25	2 20	7 $\boxed{-}$	2
50	5 $\boxed{5}$ + ⊕	4 $\boxed{1}$	6 - 10	2 40	6
35	5 - 30	6	1 + 5	3 $\boxed{0}$	1
v_j	4	-1	0	- 4	

Bảng 6: X^4

a_j / b_j	30	25	35	40	u_i
45	9 $\boxed{-3}$	1 25	2 20	7 $\boxed{-4}$	0
50	5 10	4 $\boxed{-4}$	6 $\boxed{-5}$	2 40	-1
35	5 20	6 $\boxed{-6}$	1 15	3 $\boxed{-1}$	-1
v_j	6	1	2	3	

Kết luận:

$$X_{opt} = X^4 = \begin{bmatrix} 0 & 25 & 20 & 0 \\ 10 & 0 & 0 & 40 \\ 20 & 0 & 15 & 0 \end{bmatrix}; \; f_{min} = f(X_{opt}) = 310 \text{ (đvcp)}.$$

Cách 2: Bước 1: Tìm phương án xuất phát X^0 bằng phương pháp Min- Cước.

Bảng 1: X^0

b_j \ a_j	30	25	35	40	u_i
45	9 - 20	1 25	2 + 0	7 $\boxed{-1}$	0
50	5 10	4 $\boxed{1}$	6 $\boxed{0}$	2 40	-4
35	5 $\boxed{3}$ + +	6 $\boxed{-6}$	1 - 35	3 $\boxed{2}$	-1
v_j	9	1	2	6	

Khi sử dụng dùng phương pháp Min-cước ta được phương án cho ở bảng 1 như trên. Phương án X^0 ở bảng 1 là phương án suy biến, ta thấy số ô chọn là m+n-1=5 nên ta phải bổ sung ô chọn 0 vào ô(1,3).

Bước 2: Kiểm tra tính tối ưu của X^0.

+ Xây dựng hệ thống thế vị.

Cho $u_1 = 0$ khi đó ta tính được các u_i, v_j còn lại như ở bảng 1.

+ Tính các số kiểm tra.

Số kiểm tra $\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}$ được tính và ghi ở góc trên bên phải như ở bảng 1.

Ta thấy tồn tại $\Delta_{ij} > 0$ nên X^0 là phương án chưa tối ưu, ta chuyển bước 3.

<u>Bước 3</u>: Xây dựng phương án mới.

+ Xác định ô điều chỉnh. Ô điều chỉnh là ô (1,3) vì $\Delta_{13} = \max\{\Delta_{ij} > 0\} = \max\{1,0,3,2\} = 3$.

+ Xác định chu trình điều chỉnh. Chu trình điều chỉnh được xác định như trong bảng 1.

+ Xác định lượng hàng điều chỉnh: Lượng hàng điều chỉnh: $q = \min\{x_{ij}: (i,j) \in V^-\} = \min\{20, 35\} = 20$.

+ Điều chỉnh sang phương án mới X^1:

Sử dụng công thức:

$$x'_{ij} = \begin{cases} x_{ij} & \text{nếu } (i,j) \notin V \\ x_{ij} + q & \text{nếu } (i,j) \in V^+ \\ x_{ij} - q & \text{nếu } (i,j) \in V^- \end{cases}$$

ta được phương án mới X^1 ở bảng 2:

Bảng 2: X^1

$a_j \backslash b_j$	30	25	35	40	u_i
45	9 $\boxed{-3}$	1 (25)	2 (20)	7 $\boxed{-4}$	0
50	5 (10)	4 $\boxed{-4}$	6 $\boxed{-5}$	2 (40)	-1
35	5 (20)	6 $\boxed{-6}$	1 (15)	3 $\boxed{-1}$	-1
v_j	6	1	2	3	

Với phương án X^1 ở bảng 2 ta coi như X^0 rồi quay lại bước 2 (kiểm tra tính tối ưu của phương án). Ta thấy X^1 là phương án tối ưu vì mọi $\Delta_{ij} \le 0$ ($i = \overline{1,3}, j = \overline{1,4}$).

<u>Kết luận</u>: Phương án tối ưu của bài toán là:

$$X_{opt} = \begin{bmatrix} 0 & 25 & 20 & 0 \\ 10 & 0 & 0 & 40 \\ 20 & 0 & 15 & 0 \end{bmatrix}; \quad f_{min} = f(X_{opt}) = 310 \text{ (đvcp)}$$

Cách 3: Tìm phương án cực biên bằng phương pháp xấp xỉ Phogel.

Bước 1: Tìm phương án xuất phát X^0 bằng phương pháp Phogel.

Khi sử dụng dụng phương pháp xấp xỉ Phogel ta được phương án X^0 cho ở bảng 1 như sau:

Bảng 1: X^0

$a_j \backslash b_j$	30	25	35	40	Chênh lệch hàng
45	9	1 (25)	2 (20)	7	1 1 $\boxed{5}$
50	5 (30)	4	6	2 (20)	2 2 4 $\boxed{4}$
35	5	6	1 (15)	3 (20)	2 2 2 2 $\boxed{2}$
Chênh lệch cột	$\boxed{4}$	3 $\boxed{3}$	1 1 1	1 1 1	

Để cho dễ nhìn ta chuyển phương án X^0 xuống bảng 2 sau:

Bảng 2: X^0

$a_j \backslash b_j$	30	25	35	40	u_1
45	9 $\boxed{-3}$	1 25	2 20	7 $\boxed{-3}$	0
50	5 - 30	4 $\boxed{-5}$	6 $\boxed{-6}$	2 + 20	-2
35	5 $\boxed{1}$ +	6 $\boxed{-6}$	1 15	3 - 20	-1
$\mathbf{v_j}$	7	1	2	4	

Bước 2: Kiểm tra tính tối ưu của phương án xuất phát X^0. Ta thấy X^0 là phương án chưa tối ưu. Điều chỉnh $X^0 \to X^1$ ta được phương án X^1 cho ở bảng sau:

Bảng 3: X^1

$\mathbf{a_j} \backslash \mathbf{b_j}$	**30**	**25**	**35**	**40**	$\mathbf{u_1}$
45	9 $\boxed{-3}$	1 25	2 20	7 $\boxed{4}$	0
50	5 10	4 $\boxed{-4}$	6 $\boxed{-5}$	2 40	-1
35	5 20	6 $\boxed{-6}$	1 15	3 $\boxed{-1}$	-1
$\mathbf{v_j}$	6	1	2	3	

X^1 là phương án tối ưu: $X_{opt} = X^1 = \begin{bmatrix} 0 & 25 & 20 & 0 \\ 10 & 0 & 0 & 40 \\ 20 & 0 & 15 & 0 \end{bmatrix}$; $f_{min} = f(X_{opt}) = 310$ (đvcp)

Bài tập 2: Giải bài toán vận tải với các số liệu được cho ở bảng sau:

$a_i \backslash b_j$	150	90	90	70
120	9	6	3	9
125	6	8	7	8
155	5	7	2	7

Giải: <u>Cách 1</u>: Tìm phương án xuất phát bằng phương pháp góc Tây Bắc.

Bước 1:Tìm phương án xuất phát bằng phương pháp góc Tây Bắc ta được phương án xuất phát X^0 được cho ở bảng 1.

Bước 2: Kiểm tra tính tối ưu của phương án xuất phát X^0.

Ta thấy X^0 là phương án không suy biến, chưa tối ưu.

Bảng 1: X^0

a_i \ b_j	**150**	**90**	**90**	**70**	u_1
120	9 -120	6 $\boxed{5}$	3 $\boxed{7}$ +	9 $\boxed{6}$	3
125	6 + 30	8 90	7 - 5	8 $\boxed{4}$	0
155	5 $\boxed{-}$	7 $\boxed{-}$	2 85	7 70	- 5
v_j	6	8	7	12	

Bước 3: Điều chỉnh $X^0 \to X^1$ ta được phương án X^1 cho ở bảng 2

Bảng 2: X^1

a_i \ b_j	**150**	**90**	**90**	**70**	u_1
120	9 - 115	6 $\boxed{+}$ + 5	3 5	$\boxed{9-}$	3
125	6 + 35	8 - 90	$\boxed{7-}$	$\boxed{-}$	0
155	5 $\boxed{3}$	7 $\boxed{3}$	2 85	7 70	2
v_j	6	8	0	5	

Ta coi X^0 như X^1 rồi quay lại bước 2, cứ tiếp tục như vậy ta tìm được phương án X^2, X^3 cho ở bảng 3, bảng 4.

Bảng 3: X^2

a_i \ b_j	**150**	**90**	**90**	**70**	u_1
120	9 - 25	6 $\boxed{5}$ + 90	3 + 5	9 $\boxed{-}$	0
125	6 + 125	8 $\boxed{-}$	7 $\boxed{-}$	8 $\boxed{-}$	-3
155	5 + $\boxed{3}$ +	7 $\boxed{-}$	2 - 85	7 70	-1
v_j	9	6	3	8	

Bảng 4: X3

a_i \ b_j	**150**	**90**	**90**	**70**	u_1
120	9 $\boxed{-}$	6 $\boxed{5}$ + 90	3 30	9 $\boxed{-}$	1
125	6 +125	8 $\boxed{-}$	7 $\boxed{-}$	8 $\boxed{0}$	1
155	5 $\boxed{3}$ +25	7 $\boxed{-}$	2 60	7 70	0
v_j	5	5	2	7	

Ở bảng 4 ta thấy $\forall\, \Delta_{ij} \le 0\ (i = \overline{1,3}\ , j = \overline{1,4}) \Rightarrow X^3 = X_{opt}$

$$X_{opt} = \begin{bmatrix} 0 & 90 & 30 & 0 \\ 125 & 0 & 0 & 0 \\ 25 & 0 & 60 & 70 \end{bmatrix} ;\ f_{min} = f(X_{opt}) = 2065\ (\text{đvcp})$$

Bài toán có phương án tối ưu là không duy nhất. Thật vậy nếu chọn ô (2,4) làm ô điều chỉnh ta tìm được phương án tối ưu khác.

Cách 2: Tìm phương án xuất phát bằng phương pháp Min-cước

Khi tìm phương án xuất phát bằng phương pháp Min- cước ta được phương án xuất phát X^0 cho ở bảng sau:

Bảng 1: X^0

$$X_{opt} = \begin{bmatrix} 0 & 90 & 30 & 0 \\ 55 & 0 & 0 & 70 \\ 95 & 0 & 60 & 0 \end{bmatrix} \; ; \; f_{min} = f(X_{opt}) = 2065 \text{ (đvcp)}$$

Bài toán có phương án tối ưu là không duy nhất. Thật vậy nếu chọn ô (2,4) làm ô điều chỉnh ta tìm được phương án tối ưu khác.

Cách 3: Tìm phương án xuất phát bằng phương pháp xấp xỉ Phogel

Khi sử dụng phương pháp xấp xỉ Phogel ta được phương án xuất phát X^0 được cho ở bảng 1 sau:

Bảng 1: X^0

b_j / a_i	150	90	90	70	Chênh lệch hàng
120	9	6 (90)	3	9 (30)	3 $\boxed{3}$ 0 0
125	6 1 (85)	8	7	8 (40)	1 2 2 2
155	5 (65)	7	2 (90)	7	$\boxed{3}$ 2 $\boxed{2}$
Chênh lệch cột	1 1 1 $\boxed{3}$	1	1	1 1 1 1	

Để cho dễ nhìn ta chuyển phương án X^0 xuống bảng 2.

Bảng 2: X^0

b_j / a_i	150	90	90	70	u_i
120	9 $\boxed{-}$	6 (90)	3 + ( )	9 - (30)	0
125	6 1 (85)	8 $\boxed{-}$	7 $\boxed{}$	8 + (40)	-1
155	5 + (65)	7 $\boxed{-}$	2 - (90)	7 $\boxed{0}$	-2
V_j	7	6	4	9	

Ở bảng 2 ta thấy X^0 là phương án chưa tối ưu.

Điều chỉnh $X^0 \rightarrow X^1$ được cho ở bảng 3 sau:

Bảng 3: X^1

a_i \ b_j	150	90	90	70	u_I
120	9 $\boxed{-}$	6 (90)	3 (30)	9 $\boxed{-}$	0
125	6 1 (55)	8 $\boxed{-}$	7 $\boxed{-}$	8 (70)	-1
155	5 + (95)	6 $\boxed{-}$	1 (60)	3 $\boxed{0}$	-2
V_j	7	6	4	9	

Ta thấy X^1 là phương án tối ưu vì $\forall\ \Delta_{ij} \le 0\ \ (i = \overline{1,3}\ , j = \overline{1,4})\ \ X^1 = X_{opt}$

$$X^1 = X_{opt} = \begin{bmatrix} 0 & 90 & 30 & 0 \\ 55 & 0 & 0 & 70 \\ 95 & 0 & 60 & 0 \end{bmatrix};\ f_{min} = f(X_{opt}) = 2065\ (\text{đvcp})$$

Bài toán có phương án tối ưu là không duy nhất. Thật vậy nếu chọn ô (3,4) làm ô điều chỉnh ta tìm được phương án tối ưu khác.

3.2. MỘT SỐ MỞ RỘNG CỦA BÀI TOÁN VẬN TẢI .

3.2.1. Bài toán vận tải mở (cung khác cầu)

a. Dạng toán học:

+ Cung lớn hơn cầu. $\sum_{i+1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_i$

$$f(x) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i\ \ (i = \overline{1,m}) \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j\ \ (j = \overline{1,n}) \qquad \text{với } \sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j \quad \text{(I)} \\ x_{ij} \ge 0\ (i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n}) \end{cases}$$

Ở Bài toán này, n điểm thu B_j $(j = \overline{1,n})$ sẽ thu đủ hàng, còn m điểm phát A_i $(i = \overline{1,m})$ sẽ có điểm chưa phát hết hàng.

+) Cầu lớn hơn cung: $\sum_{i+1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$

$$f(x) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min(\max)$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \,(i = \overline{1,m}) \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \le b_j \,(j = \overline{1,n}) \qquad \text{với } \sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j \qquad \text{(II)} \\ x_{ij} \ge 0 (i = \overline{1,m}; j = \overline{1,n}) \end{cases}$$

Ở bài toán này, m điểm phát A_i ($i=\overline{1,m}$) sẽ phát hết hàng, còn n điểm thu B_j ($j = \overline{1,n}$) có những điểm chưa thu đủ hàng.

b. Phương pháp giải

* Giải bài toán vận tải cung lớn hơn cầu:

Ta thêm vào bài toàn một trạm thu giả B_{n+1} với lượng hàng thu là: ($\sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j = b_{n+1}$)

Cước phí từ trạm phát giả A_{m+1} đến các trạm thu B_j là $c_{m+1,j} = 0$ ($j = \overline{1,n}$).

Khi đó bài toán đã cho trở về bài toán cung bằng cầu mà ta đã biết cách giải.

Chú ý: - Khi giải bài toán trên, nếu sử dụng phương pháp min- cước tìm phương án cực biên xuất phát ta ưu tiên phân phối hàng tối đa vào ô có cựợc phí dương nhỏ nhất trước rồi mới mới đến ô có cước phí bằng không.

- Giá trị hàm mục tiêu: $f(X_{opt}) = f(\overline{X}_{opt}) = f_{min}$.

c. Bài tập mẫu

Bài 1: Giải bài toán vận tải với số liệu cho ở bảng sau:

a_i \ b_j	**55**	**35**	**45**
60	2	6	7
45	9	4	5
55	4	8	6

Giải: Với bài toán đã cho ta thấy:

$$\sum_{i=1}^{3} a_i = 60 + 45 + 55 = 160 \text{ (đvhh)};$$

$$\sum_{j=1}^{3} b_j = 55 + 35 + 45 = 135 \text{ (đvhh)}$$

Như vậy: $\sum_{i+1}^{3} a_i > \sum_{j=1}^{3} b_i$ bài toán ở dạng cung lớn hơn cầu. Để giải bài toán này ta lập trạm thu giả B_4 với lượng hàng: $b_4 = \sum_{i+1}^{3} a_i - \sum_{j=1}^{3} b_i = 25$; $c_{i4} = 0$; $i = \overline{1,3}$

Sử dụng phương pháp min- cước tìm phương án cực biên xuất phát ta được phương án X^0 cho ở bảng 1 sau:

Bảng 1

b_j / a_i	55	35	45	25	u_I
60	2 55	6 $\boxed{-}$	7 $\boxed{-}$	0 5	0
45	9 $\boxed{-}$	4 35	5 10	0 $\boxed{-}$	-1
55	4 $\boxed{-}$	8 $\boxed{-}$	6 35	0 20	0
V_j	2	5	6	0	

Kiểm tra tính tối ưu của $\overline{X^0}$ ta thấy: $\forall \Delta_{ij} \le 0$

$(i = \overline{1,3}$; $j = \overline{1,4})$ Suy ra $\overline{X^0} \equiv \overline{X^0}_{opt}$

$$\overline{X^0}_{opt} = \begin{bmatrix} 55 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 35 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 35 & 20 \end{bmatrix} ; \ \overline{f}_{min} = 510 \text{ (đvcp)}$$

Vậy phương án tối ưu của bài toán ban đầu là:

$$X_{opt} = \begin{bmatrix} 55 & 0 & 0 \\ 0 & 35 & 10 \\ 0 & 0 & 35 \end{bmatrix} ; \quad \overline{f}_{min} = 510 \text{ (đvcp)}$$

Bài 2: Giải bài toán vận tải với số liệu được cho ở bảng sau:

b_j / a_i	**30**	**20**	**70**
40	3	2	1
30	9	4	6
30	8	2	3

<u>Giải:</u> Với bài toán đã cho ta thấy:

$$\sum_{i=1}^{3} a_i = 40 + 30 + 30 = 100 \text{ (đvhh)} ;$$

$$\sum_{j=1}^{3} b_j = 30 + 20 + 70 = 120 \text{ (đvhh)}$$

Như vậy $\sum_{i+1}^{3} a_i < \sum_{j=1}^{3} b_i$. Để giải bài toán này ta thêm vào bài toán trạm phát giả A_4 với lượng hàng phát là: $a_4 = \sum_{i+1}^{3} a_i - \sum_{j=1}^{3} b_i$ = 120-100 = 20 (đvhh) và cước phí $c_{4j} = 0$ ($j = \overline{1,3}$). Khi đó ta có bài toán cân bằng cung cầu được cho ở bảng 1 sau:

Bảng 1: X^0

a_i \ b_j	30	20	70	u_1
40	4 $\boxed{0}$	2 $\boxed{-}$	1 40	1
30	9 10	4 $\boxed{1}$ +	6 - 20	6
30	8 $\boxed{-}$	2 - 20	3 + 10	3
20	0 20	0 $\boxed{-}$	0 $\boxed{-}$	-3
V_j	3	-1	0	

Sử dụng phương pháp min- cước phí ta được phương án $\overline{X^o}$.

Sử dụng thuật toán thế vị giải bài toán vận tải ta được các phương án cho ở các bảng sau:

Ở bảng 1 tương đương với $\overline{X^o}$ ta thấy $\overline{X^o}^{\,0}$ chưa tối ưu. Chọn ô (2,2) làm ô điều chỉnh với lượng hàng điều chỉnh q = 20. Sau khi điều chỉnh ta được bảng 2: $\overline{X^1}$

Bảng 2: $\overline{X^1}$

a_i \ b_j	30	20	70	u_1
40	4 $\boxed{0}$ +	2 $\boxed{-}$	1 + 40	1
30	9 -10	4 20	6 - 0	6
30	8 $\boxed{-}$	2 $\boxed{-}$	3 30	3
20	0 20	0 $\boxed{-}$	0 $\boxed{-}$	-3
V_j	3	-2	0	

Ở bảng 2 $\overline{X^1}$ ta thấy $\Delta_{ij} \le 0 \; \forall \; i = \overline{1,4}, j = \overline{1,3} \Rightarrow \overline{X^1} = \overline{X}_{opt} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 40 \\ 10 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 30 \\ 20 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; $\overline{f}_{min}$= 290 (đvcp)

Tuy nhiên ô(1,1) có $\Delta_{11} = 0$ nên ta có thể chọn ô (1,1) làm ô điều chỉnh và điều chỉnh được phương án $\overline{X^2}$ là phương án tối ưu bảng 2.

Vậy bài toán ban đầu có tập phương án xác định bởi:

$$X^1_{opt} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 40 \\ 10 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 30 \end{bmatrix}; \quad X^2_{opt} = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 20 \\ 0 & 20 & 10 \\ 0 & 0 & 30 \end{bmatrix};$$

$$f_{min} = 290 \text{ (đvcp)}$$

$$X_{opt} = \lambda \; X^1_{opt} + (1-\lambda)\, X^2_{opt}, \; (0<\lambda<1)$$

3.2.2. Bài toán vận tải cực đại

a. Bài toán

$$f(x) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \max$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le (=)\; a_i \,(i = \overline{1,m}) \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \le (=)\; b_j \; (j = \overline{1,n}) \\ x_{ij} \ge 0 \; (i = \overline{1,m};\; j = \overline{1,n}) \end{cases}$$

Bài toán vận tải cực đại có thể cân bằng hoặc không cân bằng cung cầu. Cước phí trong bài toán này mang ý nghĩa năng xuất, hiệu quả công việc...

b. Phương pháp giải

Có thể áp dụng thuật toán thế vị đã biết để giải bài toán vận tải cục đại, cần chú ý một số điểm sau:

- Khi tìm phương án cực biên ban đầu, ưu tiên phân phối hàng tối đa vào ô c_{ij} lớn nhất trong bảng vận tải .

- Tiêu chuẩn tối ưu của bài toán vận tải cực đại như sau:

Nếu $\Delta_{ij} \ge 0 \; (\forall \; i = \overline{1,m}, \forall \; j = \overline{1,n})$ thì phương án đang xét là tối ưu.

- Tìm hệ thống thế vị và kiểm tra tính tối ưu của bài toán giống như bài toán min- cước.

- Ô điều chỉnh là ô (i, j) có $\Delta_{ij} = \min \{\Delta_{ij} < 0\}$.

c. Bài tập mẫu

Bài 1: Giải bài toán vận tải cực đại được cho ở bảng sau:

a_i \ b_j	45	70	25
50	9	8	5
30	7	6	1
20	5	6	7
50	10	6	6

Giải: Ta thấy bài toán đã cho ở dạng không cân bằng cung cầu.

$$\sum_{i=1}^{4} a_i = 50+30+20+50 = 150 \text{ (đvhh)}; \quad \sum_{j=1}^{3} b_j = 45+70+25 = 140 \text{ (đvhh)}$$

Như vậy, ta phải lập thêm trạm thu giả B_4 như trong bảng1 với $c_{4i} = 0$ ($i = \overline{1,4}$), $b_4 = 150-140 = 10$ (đvhh).

Sử dụng phương Pháp max- cước tìm phương án xuất phát ta được $\overline{X^0}$ cho ở bảng 1.

Bảng1. $\overline{X^0}$

a_i \ b_j	45	70	25	10	u_i
50	9 $\boxed{+}$	8 50	5 $\boxed{+}$	0 $\boxed{}$	2
30	7 $\boxed{+}$	6 20	1 $\boxed{+}$	0 10	0
20	5 $\boxed{+}$	6 $\boxed{+}$	7 20	0 $\boxed{+}$	1
50	10 45	6 0	6 5	0 $\boxed{+}$	0
v_j	10	6	6	0	

Ở bảng1, $\overline{X^0}$ là phương án suy biến nên bổ sung ô(4,2) làm ô chọn. Khi đó kiểm tra tính tối ưu của $\overline{X^0}$ ta thấy: $\Delta_{ij} \geq 0$ ($\forall\, i = \overline{1,4}$, $j = \overline{1,4}$) nên $\overline{X^0}$ là phương án tối ưu.

$$\overline{X^0} = \overline{X_{opt}} = \begin{bmatrix} 0 & 50 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 20 & 0 \\ 45 & 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}; \quad f_{max} = f(\overline{X_{opt}}) = 1140 \text{(đv)}$$

$$\text{Suy ra } X_{opt} = \begin{bmatrix} 0 & 50 & 0 \\ 0 & 20 & 0 \\ 45 & 0 & 5 \end{bmatrix}; \; f_{max} = \bar{f}_{min} = 1140 \text{ (đv)}$$

Bài 2: Giải bài toán vận tải cực đại với các số liệu được cho trong bảng sau:

a_i \ b_j	35	45	50	60
55	10	3	5	4
65	3	5	7	10
70	2	5	6	8

Giải:

Sử dụng phương án "max-cước", tìm phương án xuất phát X^0 được cho ở bảng 1.

- X^0 - là phương án không suy biến
- X^0 - chưa tối ưu.
- Điều chỉnh $X^0 \rightarrow X^1$ (ở bảng2).

Ô (1,3) là ô điều chỉnh. $\Delta_{13} = \min \{\Delta_{ij}\}$, lượng hàng điều chỉnh q = 20.

Bảng 1 X^0

a_i \ b_j	35	45	50	60	u_i
55	10 (35)	3 (20)	5 -1 + (+)	4 $\boxed{+}$	-3
65	3 $\boxed{+}$	5 $\boxed{-1}$	7 (5)	10 (60)	0
70	2 $\boxed{+}$	5 + (25)	6 (45)	8 $\boxed{+}$	-1
V_j	13	6	7	10	

Bảng 2 X^0

a_i \ b_j	35	45	50	60	u_i
55	10 35	3 $\boxed{0}$	5 20	4 $\boxed{0}$	-3
65	3 $\boxed{+}$	5 $\boxed{+}$	7 5	10 60	0
70	2 $\boxed{+}$	5 + 45	6 25	8 $\boxed{-}$	-1
V_j	13	6	10	7	

Ở bảng 2

- X^1 là phương án không suy biến

- X^1 tối ưu vì $\Delta_{ij} \geq 0$ ($\forall\, i = \overline{1,3}$, $j = \overline{1,4}$).

$$X^1 = X_{opt} = \begin{bmatrix} 35 & 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 60 \\ 0 & 45 & 25 & 0 \end{bmatrix};$$

$$f_{max} = f(X_{opt}) = 1465(\text{đv})$$

3.2.3. Bài toán vận tải theo chỉ tiêu thời gian

a. Bài toán

$$T_x = \max\{t_{ij} \in T\} \rightarrow \min.$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \ (i = \overline{1,m}) \\ \sum_{i}^{m} x_{ij} = b_j \ (j = \overline{1,n}) \qquad ; T = (t_{ij})_{m.n} \\ x_{ij} \geq 0 \ (i = \overline{1,m} \ ; \ j = \overline{1.n}) \end{cases}$$

Hàm mục tiêu của bài toán không phải là hàm tuyến tính nhưng có thể sử dụng công cụ của QHTT để giải.

b. phương pháp giải

* Bước 1: Tìm phương án xuất phát X^0 (bằng phương pháp tây bắc, min-cước,...). Tính thời gian thực hiện phương án X^0.

$$t_{X^0} = \text{Max}\{t_{ij:}\ x_{ij} > 0\}$$

* Bước 2: Giải bài toán phụ:

Giải bài toán cước phí phụ bằng phương pháp thế vị, bài toán phụ được lập ra theo nguyên tắc sau:

$$C = (c_{ij})_{m.n} \text{ với } c_{ij} = \begin{cases} 0 \text{ nếu } t_{ij} < t_{X^0} \\ 1 \text{ nếu } t_{ij} \geq t_{X^0} \end{cases}$$

Lấy PA xuất phát của bài toán thời gian làm phương án xuất phát của bài toán cước phí phụ.

Khi giải bài toán cước phí phụ sẽ có 2 khả năng sau xảy ra:

Khả năng 1: Giải bài toán phụ ta được phương án tối ưu X_k nào đó mà còn có ô chọn (i j) mà $c_{ij} = 1$ thì phương án $X_k = X_{opt}$ của bài toán theo chỉ tiêu với thời gian thực hiện ngắn nhất là $t_{X_k} = \min\{t_{X^0}, t_{X_1}, ..., t_{X_k}\}$ suy ra thuật toán kết thúc.

Khả năng 2: Nếu giải bài toán phụ được phương án tối ưu X_k nào đó mà tất cả các ô (i j): $c_{ij} = 0$ thì phương án $X_k \neq X_{opt}$ của bài toán theo chỉ tiêu thời gian. Khi đó ta tiếp tục thực hiện thuật toán như trên cho đến khi nhận được phương án tối ưu.

c. Bài tập mẫu

Bài 1: Giải bài toán vận tải theo chỉ tiêu thời gian được cho ở bảng dưới đây.

a_i \ b_j	17	12	15	16
25	2	6	7	4
15	3	7	3	8
20	4	2	5	7

Giải:

Sử dụng phương pháp min-cước tìm phương án xuất phát ta được phương án X^0

Bảng 1. X^0

a_i \ b_j	17	12	15	16
25	2 17	6	7	4 8
15	3 0	7	3 15	8
20	4	2 12	5	7 8

- X^0 là phương án suy biến ta bổ sung ô chọn không vào ô (2,1).
- $t_{X^0} = \max\{2,3,2,3,4,7\} = 7$
- Lập bài toán cước phí phụ theo công thức. ta có bảng 2.

$$c_{ij} = \begin{cases} 0 \text{ nếu } t_{ij} < t_{X^0} \\ 1 \text{ nếu } t_{ij} \geq t_{X^0} \end{cases}$$

- Chuyển phương án X^0 xuống làm phương án xuất phát của bài toán phụ ta có bảng 2.

Bảng 2. X_1^0

a_i \ b_j	17	12	15	16	u_i
25	0 - 17	0	1	0 + 8	0
15	0 + 0	1	0 - 15	1	0
20	0	0 12	0 +	1 - 8	1
v_j	0	-1	0	0	

- Giải bài toán phụ ta thu được phương án tối ưu cho ở bảng 3:
- Bảng3: X_2^0

a_i \ b_j	17	12	15	16	u_i
25	0 9	0	1	0 16	0
15	0 8	1	0 7	1	0
20	0	0 12	0 8	0	0
v_j	0	0	0	0	

- X_2^0 chưa tối ưu vì thuộc trường hợp hai.

- Lấy phương án X_2^0 làm phương án thứ hai X^1 (coi như X^0) rồi lại tính lại thời gian thực hiện phương án X^1.

Bảng 4. X^1

a_i \ b_j	17	12	15	16
25	2 9	6	7	4 16
15	3 8	7	3 7	8
20	4	2 12	5 8	7

ta có: $t_{X^1} = \max\{2,3,2,3,5,4\} = 5$

- Lập bài toán phụ ta thu được phương án tối ưu cho ở bảng 5

Bảng 5. X_0^1

a_i \ b_j	17	12	15	16
25	0 9	1	1	0 16
15	0 0	1	0 15	1
20	0 8	0 12	1	1

Ta thấy: X_0^1 chưa phải là phương án tối ưu của bài toán ban đầu vì thuộc trường hợp 2.

- Lấy X_0^1 làm phương án xuất phát của bài toán ban đầu ta được bảng 6.

Bảng 6. X^2

a_i \ b_j	17	12	15	16
25	2 9	6	7	4 16
15	3 0	7	3 15	8
20	4 8	2 12	5	7

Ở bảng 6 ta có: $t_{X^2} = \max\{2,3,4,2,4,3\} = 4$

- Lập bài toán phụ và giải nó cho ta phương án tối ưu ở bảng 7.

Bảng 7. X_0^2

a_i \ b_j	17	12	15	16
25	0 9	1	1	1 16
15	0 0	1	0 15	1
20	1 8	0 12	1	1

Ở bảng 7 ta thấy:

- X_0^2 là phương án tối ưu của bài toán phụ và có ô (i j): $x_{ij} > 0$ nằm ở ô có cước phí là 1 (trường hợp 1) nên X_0^2 đồng thời là phương án tối ưu của bài toán theo chỉ tiêu thời gian.

- Vậy $X_{opt} = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 15 & 0 \\ 8 & 12 & 0 & 0 \end{bmatrix}$;

$t_{min} = \min\{t_{X^0}, t_{X^1}, t_{X^2}\} = \min\{7,5,4\} = 4$ (đvtg).

3.3 BÀI TOÁN LẬP HÀNH TRÌNH VẬN CHUYỂN.

3.3.1. Bài toán:

Một xí nghiệp vận tải có kế hoạch vận chuyển hàng hoá từ m nơi giao hàng A_i ($i=\overline{1,m}$) với khả năng giao là a_i ($i = \overline{1,m}$) tương ứng. Đến các nơi nhận B_j ($j = \overline{1,n}$) với yêu cầu nhận b_j ($j = \overline{1,n}$) tương ứng. Hãy bố trí hành trình xe chạy để hoàn thành kế hoạch vận chuyển mà số km xe chạy không là ít nhất.

3.3.2. Phương pháp giải

* Bước 1: Giải bài toán vận tải "giao - nhận" xe không theo phương pháp giải bài toán vận tải cước phí với độ dài quãng đường đóng vai trò là cước phí vận chuyển. B_j ($j = \overline{1,n}$) là điểm giao, A_i ($i = \overline{1,m}$) là điểm nhiệm xe không.

* Bước 2: Lập hành trình xe chạy trên cơ sở kế hoạch vận chuyển hàng và phương án tối ưu của bài toán "giao- nhận" xe không.

3.3.3. Bài tập mẫu

Bài 1: Giải bài toán vận tải điều xe với các số liệu được cho ở bảng 1, với $x_{ij} > 0$ trong khuyên tròn là lượng hàng cần vận chuyển từ $A_i \to B_j$ ($i=\overline{1,3}$; $j = \overline{1,4}$), hàng hóa là cùng loại, đơn vị hàng là tấn, c_{ij} - quãng đường $A_1 \to B_j$, đơn vị là km.

Bảng 1

A_i \ B_j	B1	B2	B3	B4
A_1	3 (30)	7	5 (15)	8
A_2	10 (5)	4	1 (15)	2 (10)
A_3	5	6 (20)	7 (15)	3 (20)

Giải

* Lập bài toán giao nhận xe không. Từ kế hoạch vận chuyển hàng ta xác định được:

A_1: $a_1 = 30+15 = 45$; A_2: $a_2 = 5+10 = 15$;

A_3: $a_3 = 20 + 15 + 20 = 55$

Kế hoạch điều xe không từ $B_j \rightarrow A_i$ ($i=\overline{1,3}$; $j=\overline{1,4}$).

B_1: $b_1 = 30+15 = 45$; B_2: $b_2 = 20$;

B_3: $b_3 = 15 + 15 = 30$; B_4: $b_4 = 10+20 = 30$

* Ta được bài toán giao nhận xe không với điều kiện cân bằng cung cầu.

$\sum_{j=1}^{4} b_j = \sum_{i=1}^{3} a_1 = 115$ (tấn. km xe chạy không), được cho ở bảng 2.

Bảng 2

a_j / b_i	45	15	55	u_i
35	3 35	10 $\boxed{-}$	5 $\boxed{-}$	4
20	7 $\boxed{-}$	4 $\boxed{-}$	6 20	6
30	8 $\boxed{-}$	2 $\boxed{-}$	3 30	3
v_j	-1	-6	0	

Sử dụng thuật toán thế vị giải bài toán cho ở bảng 2 ta được phương án tối ưu là:

$$X_{opt} = X^0 = \begin{bmatrix} 35 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 20 \\ 10 & 15 & 5 \\ 0 & 0 & 30 \end{bmatrix} ; \forall\ \Delta_{ij} < 0 \ (\ (i=\overline{1,4};\ j=\overline{1,3})$$

* Kết hợp phương án tối ưu của bài toán "giao - nhận" xe không với kế hoạch vận chuyển hàng, xác định được hành trình chạy xe.

+ $A_1 \xrightarrow{30'} B_1$ + $A_1 \xrightarrow{15'} B_3$

+ $A_2 \xrightarrow{5'} B_1$ + $A_2 \xrightarrow{10'} B_4$

+ $A_3 \xrightarrow{15'} B_3$ + $A_3 \xrightarrow{20'} B_4$

+ $A_3 \xrightarrow{20'} B_4$

+ $B_1 \xrightarrow{35'} A_1$ + $B_2 \xrightarrow{20km} A_3$

+ $B_3 \xrightarrow{10'} A_1$ + $B_3 \xrightarrow{15'} A_2$

+ $B_3 \xrightarrow{5'} A_3$ + $B_4 \xrightarrow{30'} A_3$

Trong đó: a_i^t (tấn hàng) ; b^t (tấn. km xe chạy không hàng)

Ta có hành trình xe chạy như sau:

* Dạng con thoi

$A_1 \overset{30T}{\longleftrightarrow} B_1$; $A_1 \overset{10T}{\longleftrightarrow} B_3$;

$A_2 \overset{20T}{\longleftrightarrow} B_2$; $A_3 \overset{5T}{\longleftrightarrow} B_3$;

$A_2 \overset{20T}{\longleftrightarrow} B_4$;

* Hành trình khác

1) $A_2 \xrightarrow{5'} B_1 \xrightarrow{5'} A_1 \xrightarrow{5'} B_3 \xrightarrow{5'} A_2$

2) $A_3 \xrightarrow{10'} B_3 \xrightarrow{10'} A_2 \xrightarrow{10'} B_4 \xrightarrow{10'} A_3$

Vậy nếu sử dụng xe 5 tấn thì ở hành trình 1 dùng một xe, hành trình 2 dùng hai xe.

Bài 2: Giải bài toán vận tải điều xe với các số liệu được cho ở bảng 1 với $x_{ij}>0$ trong khuyên tròn là lượng hàng cần vận chuyển từ $A_i \to B_j$ ($i=\overline{1,4}$; $j=\overline{1,3}$), hàng hóa là cùng loại, đơn vị hàng tấn,, c_{ij} - quãng đường từ $A_i \to B_j$, đơn vị là km.

Bảng 1

B_j / A_i	B1	B2	B3
A_1	5 20	7 30	8
A_2	4	9	7 30
A_3	8	5 35	2 5
A_4	1 20	4	3 40

Giải

* Lập bài toán giao nhận xe không

- Từ kế hoạch vận chuyển hàng hóa ta có

A_1: $a_1 = 20 + 30 = 50$ (tấn) A_2: $a_2 = 30$ tấn

A_3: $a_3 = 35 + 5 = 40$ (tấn) A_4: $a_4 = 20 + 40 = 60$ tấn

Kế hoạch điều xe không là:

B_1: $b_1 = 20 + 20 = 40$ (tấn.km xe không);

B_2: $b_2 = 30 + 35 = 65$ (tấn.km xe không);

B_3: $b_3 = 30 + 5 + 40 = 75$ (tấn.km xe không);

Suy ra bài toán giao nhận xe không là: (bảng 2)

Bảng 2. X^0

b_j \ a_j	50	30	40	60	u_i
40	5 $\boxed{-}$	4 $\boxed{-}$	8 $\boxed{-}$	1 40	-2
65	7 50	9 - 15	5 $\boxed{-}$	4 $\boxed{-}$ +	2
75	8 $\boxed{-}$	7 +15	2 40	3 - 20	0
V_j	5	7	2	3	

Ở bảng 2 ta có bài toán cân bằng cung cầu

$$\left(\sum_{i=1}^{3} a_i = \sum_{j=1}^{4} b_j = 180\right) \quad (\text{đv})$$

Bảng 3: X^1

b_j \ a_j	50	30	40	60	u_i
40	5 $\boxed{-}$	4 $\boxed{1}$ +	8 $\boxed{-}$	1 - 40	-2
65	7 50	9 $\boxed{-}$	5 $\boxed{-}$	4 15	1
75	8 $\boxed{-}$	7 - 30	2 40	3 + 5	0
V_j	6	7	2	3	

Sử dụng thuật toán thế vị tìm phương án tối ưu ta được phương án tối ưu $X_{opt} = X^2$ cho ở bảng 4 (là phương án tối ưu duy nhất).

Bảng 4: X^2

b_j \ a_j	50	30	40	60	u_i
40	5 $\boxed{-}$	4 30	8 $\boxed{-}$	1 10	1
65	7 50	9 $\boxed{-}$	5 $\boxed{-}$	4 15	4
75	8 $\boxed{-}$	7 $\boxed{-}$	2 40	3 35	3
V_j	3	3	-1	0	

Từ kế hoạch vận chuyển hàng và từ phương án tối ưu trong bài toán giao nhận xe không ta có.

Kế hoạch vận chuyển hàng

$A_1 \xrightarrow{20T} B_1$

$A_1 \xrightarrow{30T} B_2$

$A_2 \xrightarrow{30T} B_3$

$A_3 \xrightarrow{35'} B_2$

$A_3 \xrightarrow{5T} B3$

$A_4 \xrightarrow{30T} B_1$

$A_4 \xrightarrow{40T} B_3$

Kế hoạch giao nhận xe không

$B_1 \xrightarrow{30T} A_2$

$B_1 \xrightarrow{10T} A_4$

$B_2 \xrightarrow{50T} A_1$

$B_2 \xrightarrow{15T} A_4$

$B_3 \xrightarrow{40T} A3$

$B_3 \xrightarrow{35T} A_4$

Kết hợp giữa kế hoạch vận chuyển hàng và kế hoạch giao nhận xe không ta có các hành trình xe chạy tối ưu như sau:

- Dạng con thoi:

$A_1 \xleftrightarrow{30T} B_2$; $A_3 \xleftrightarrow{5T} B_3$;

$A_4 \xleftrightarrow{10T} B_1$; $A_4 \xleftrightarrow{35T} B_3$;

* Các hành trình khác

1) $A_1 \xrightarrow{20T} B_1 \xrightarrow{20T} A_2 \xrightarrow{20T} B3 \xrightarrow{20T} A_3 \xrightarrow{20T} B_2 \xrightarrow{20T} A_1$

2) $A_2 \xrightarrow{10T} B_3 \xrightarrow{10T} A_3 \xrightarrow{10T} B_2 \xrightarrow{10T} A_4 \xrightarrow{10T} B_1 \xrightarrow{10T} A_2$

3) $A_4 \xrightarrow{5T} B_3 \xrightarrow{5T} A_3 \xrightarrow{5T} B_2 \xrightarrow{5T} A_4$

Muốn tính độ dài của mỗi hành trình ta cộng khoảng cách giữa các kho. Ví dụ ở hành trình 1 độ dài là: d = 5+4+7+2+5+7 = 30 (km)

3.4. BÀI TOÁN LẬP KHO TRẠM HỢP LÝ

Trong đó xe chạy có hàng là: d_1 = 5+7+5 = 17 (km), xe chạy không hàng là: d_2 = 4+2+7 = 13 km

3.4.1. Bài toán

$$f(x)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \rightarrow \min \quad (1)$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \ (i=\overline{1.m}) & (2) \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \le b_j \ (j=\overline{1.n}) & (3) \\ x_{ij} \ge 0 (i=\overline{1.m}, j=\overline{1.n}) & (4) \end{cases}$$

3.4.2. Phương pháp giải

Bước 1: Lập bài toán mở rộng với điều kiện cân bằng cung cầu.

Bước 2: Giải bải toán mở rộng bằng phương pháp thế vị tìm phương án tối ưu.

Bước 3: Dựa vào phương án tối ưu ta xác định nơi đặt kho hợp lý.

* Theo cột lượng hàng trong ma trận X_{opt} ta thu được trữ lượng tương ứng.

$$y_j = \sum_{i=1}^{m} x^*_{ij} \text{ với } X_{opt} = X^* = (X_{ij})_{m.n}$$

* Nếu $y_j = 0$ thì không đạt kho tại B_j

* Nếu $y_j > 0$ thì đạt kho tại B_j với trữ lượng y_j.

3.4.3. Bài tập mẫu

Bài 1: Một công ty quân đội cần vận chuyển một loại hàng hóa từ 4 xí nghiệp A_i $(i=\overline{1,4})$ với khối lượng tương ứng a_i = 70, 85, 35, 110 (tấn) về 4 nơi dự kiến đặt kho bảo quản B_j $(j=\overline{1,4})$. Trong đó biết B_2, B_3 có trữ lượng là b_2 = 80, B_3 = 120 (tấn). Cước phí vận chuyển một đơn vị hàng hóa từ $A_i \rightarrow B_j$ $(i=\overline{1,4};\ j=\overline{1,4})$ là c_{ij} (ngàn đồng) được cho ở bảng sau:

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	7	2	8	6
A_2	8	6	4	8
A_3	5	4	6	9
A_4	9	5	9	1

Hãy xác định nơi đặt kho với trữ lượng tương ứng và phương án vận chuyển sao cho chi phí vận chuyển đạt nhỏ nhất.

Giải: Bài toán có dạng không cân bằng cung cầu. Các kho B_1, B_4 được coi là có trữ lượng:

$$b_1 = b_4 = \sum_{i=1}^{4} a_1 = 70+85+35+110 = 300 \text{ tấn}$$

Lập trạm phát giả A_5 để đưa bài toán về dạng cân bằng cung cầu với:

$$a_5 = \sum_{j=1}^{4} b_j - \sum_{i=1}^{4} a_i = 500 \text{ (tấn)};\ c_{5j} = 0,\ (j=\overline{1,4})$$

Khi đó ta được bài toán mở rộng cân bằng cung cầu được cho ở bảng 1:

Bảng 1

a_j \ b_j	300	80	120	300	u_i
70	7 $\boxed{-}$	2 (70)	8 $\boxed{-}$	6 $\boxed{-}$	3
85	8 $\boxed{-}$	6 $\boxed{-}$	4 (85)	8 $\boxed{-}$	4
35	5 (25)	4 (10)	6 $\boxed{-}$	9 $\boxed{-}$	5
110	9 $\boxed{-}$	5 $\boxed{-}$	9 $\boxed{-}$	1 (110)	1
500	0 (275)	0 $\boxed{-}$	0 (35)	0 (190)	0
V_j	0	-1	0	0	

Giải bài toán vận tải với điều kiện cân bằng cung cầu ta thu được phương án tối ưu cho ở bảng 1. $\overline{x^0} = \overline{x_{opt}} = \begin{vmatrix} 0 & 70 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 85 & 0 \\ 25 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 110 \\ 275 & 0 & 35 & 190 \end{vmatrix}$; $\overline{f_{\min}} = 755$ (ngàn đồng)

Vậy $x_{opt} \begin{vmatrix} 0 & 70 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 85 & 0 \\ 25 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 110 \end{vmatrix}$; $f_{\min} = 755$ (ngàn đồng)

Như vậy 4 nơi đặt kho và trữ lượng tương ứng là:

B_1 với $y_1 = 25$ (tấn); B_2 với $y_2 = 80$ (tấn); B_3 với $y_3 = 85$ (tấn); B_4 với $y_4 = 110$ (tấn).

Bài 2: Giải bài toán vận tải lập kho trạm hợp lý với yêu cầu:

- Xác định nơi đặt kho trạm và lượng hàng tương ứng.
- Tìm phương án vận chuyển tối ưu với cước phí vận chuyển nhỏ nhất.

Với các số liệu ở bảng 1, lượng hàng là (tấn), đvcp (ngàn)

Bảng 1

a_j \ b_j	b_1	b_2	20	30
70	9	4	2	6
30	3	2	1	3
20	8	6	3	2

Giải: từ bài toán đã cho ta có: trữ lượng: b_1 - b_2 = $\sum_{i=1}^{3} b_1 - \sum_{i=1}^{3} a_1 = 170$

Cước phí ở trạm phát giả $c_{4j} = 0$ $(j = \overline{1,4})$. Khi đó ta có bài toán cân bằng cung cầu được cho ở bảng 2.

Bảng 2

a_j \ b_j	120	120	20	30	u_i
70	9 $\boxed{-}$	4 $\boxed{-}$ 70	2 +	6 $\boxed{-}$	4
30	3 $\boxed{-}$	2 + 10	1 - 20	3 $\boxed{-}$	2
20	8 $\boxed{-}$	6 $\boxed{-}$	3 $\boxed{-}$	2 20	2
170	0 120	0 40	0 $\boxed{-}$	0 10	0
v_j	0	0	- 1	0	

Áp dụng thuật toán thế vị giải bài toán cân bằng được cho ở bảng 2 ta có $\overline{x^0}$ là phương án cực biên xuất phát chưa tối ưu. Điều chỉnh $\overline{x^0} \rightarrow \overline{x^1}$ được cho ở bảng 3.

Bảng 3, $\overline{x^1}$

a_j \ b_j	120	120	20	30	u_i
70	`9 -	4 - 50	2 20	6 -	4
30	3 -	2 + 30	1 -	3 -	2
20	8 -	6 -	3 -	2 20	2
170	0 120	0 40	0 -	0 10	0
v_j	0	0	- 2	0	

$$\overline{x^1} = x_{opt} = \begin{vmatrix} 0 & 50 & 20 & 0 \\ 0 & 30 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 20 \\ 120 & 40 & 0 & 10 \end{vmatrix} ; \overline{f}_{min} = 200+60+40+40 = 340 \text{ (đvcp)}$$

$$\text{Vậy: } x_{opt} = \begin{vmatrix} 0 & 50 & 20 & 0 \\ 0 & 30 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 20 \end{vmatrix} ; f_{min} = 340 \text{(đvcp) (ngàn)}$$

Nơi đặt kho và trữ lượng tương ứng là: B_1 với $y_1 = 0$ tấn; B_2 với $y_2 = 80$ tấn; B_3 với $y_3 = 20$ tấn; B_4 với $y_4 = 20$ tấn.

3.5. BÀI TOÁN SẢN XUẤT ĐỒNG BỘ

3.5.1. Bài toán

$$f(x) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min(\max)$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1 (j = \overline{1, n}) \\ \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 (i = \overline{1, m}) \\ x_{ij} = 0 \text{ hoặc } 1 \; (i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}) \end{cases}$$

Bài toán là bài toán dạng đóng với $a_1 = b_1 = 1$

$$x_{ij} = \begin{cases} o \text{ nếu công nhan i không làm việc j} \\ 1 \text{ nếu công nhan i làm việc j} \end{cases}$$

3.5.2. Phương pháp giải

Dùng phương pháp thế vị giải bài toán vận tải để tìm phương án tối ưu. Sau đó dựa vào phương án tối ưu đó để phân công lao động.

3.5.3. Bài tập mẫu

Bài 1. Một phân xưởng có 3 công nhân với 3 máy làm việc khác nhau, năng suất làm việc của từng người với mỗi máy là khác nhau và được cho ở bảng 1. Hãy lập kế hoạch phân công lao động sao cho hợp lý nhất. A_i $(i = \overline{1,3})$ - người; B_j $(j = \overline{1,3})$ - máy.

Bảng 1.x^0

A_j \ B_j	I	II	III	u_i
A	6 - 1	7 0	8 $\boxed{-}$ +	0
B	8 + 0	6 - $\boxed{}$	9 1	2
C	5 $\boxed{-}$	7 1	6 $\boxed{-}$	0
v_j	6	7	7	

Áp dụng phương pháp phân công tốt nhất (max-cước) ta được phương án x^0 cho ở bảng 1.

- X^0 suy biến, bổ sung ô chọn không là ô (1,2) và o (2,1). X^0 chưa tối ưu vì tồn tại $\Delta_{13} = -1 < 0$. Điều chỉnh $X^0 \to X^1$ ở bảng 2. Ô điều chỉnh (1,3), lượng điều chỉnh q = 1.

Bảng 2. X^1

A_j \ B_j	I	II	III	u_i
A	6	7 0	8 1	0
B	8 1	6	9 0	1
C	5	7 1	6	0
v_j	7	7	8	

- X^1 là phương án suy biến (bổ sung ô chọn không (2,3)).

- X^1 là phương án tối ưu vì $\forall \Delta_{ij} \le 0$ $(i = \overline{1,3};\ j = \overline{1,3})$

$$X^1 = X_{opt} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Vậy: công nhân A đứng máy III, công nhân B đứng máy 1. Công nhân C đứng máy II.

Bài 2: một phân xưởng sản xuất có 4 công nhân và 3 máy làm việc khác nhau, năng suất làm việc của từng người với mỗi máy được cho ở bảng sau:

A_i ($i = \overline{1,4}$) - người; I, II, III- máy (B_j ($j = \overline{1,3}$))

Bảng 1. $\overline{X^0}$

A_j \ B_j	I	II	III	IV	u_i
A	2 $\boxed{+}$	3 $\boxed{+}$	5 (0)	0 (1)	0
B	4 $\boxed{+}$	5 $\boxed{+}$	6 - (1)	0 $\boxed{+}$	1
C	6 (0)	3 - (1)	5 + (0)	0 (0)	0
D	7 (1)	4 $\boxed{+}$	3 $\boxed{+}$	0 $\boxed{+}$	1
v_j	6	3	5	0	

Giải:

- Bài toán đã cho với điều kiện không cân bằng thu phát.
- Để giải bài toán này ta lập trạm thu giả (giả sử bổ sung thêm máy IV).
- Máy IV là máy giả nên năng suất công nhân A,B,C,D làm việc vớimáy IV là bằng 0.
- Về thực chất một công nhân sẽ không được phân việc và sẽ chờ bổ sung thêm máy.

Sử dụng phương pháp max-cước tìm phương án xuất phát ta được PA $\overline{X^0}$ được cho ở bảng 1.

- $\overline{X^0}$ là phương án suy biến, ta bổ sung ô chọn không vào ô (3,1), (3,3), (1,3).
- $\overline{X^0}$ là phương án chưa tối ưu vì $\exists\ \Delta_{22} < 0$.
- Điều chỉnh $\overline{X^0} \rightarrow \overline{X^1}$ (bảng 2) ô điều chỉnh (2,2), lượng hàng điều chỉnh q = 1.

Bảng 2. $\overline{X^1}$

B_j \ A_j	I	II	III	IV	u_i
A	2 $\boxed{+}$	3 $\boxed{+}$	5 (0)	0 (1)	5
B	4 $\boxed{+}$	5 (1)	6 (0)	0 $\boxed{+}$	0
C	6 (0)	3 $\boxed{+}$	5 (1)	0 $\boxed{0}$	5
D	7 (1)	4 $\boxed{+}$	3 $\boxed{+}$	0 $\boxed{+}$	6
v_j	- 1	- 1	0	- 5	

Ở bảng 2 ta thấy:

- $\overline{X^1}$ suy biến (ta bổ sung ô chọn không vào ô (2,3)).

- $\overline{X^1}$ là phương án tối ưu vì $\forall\Delta_{ij} \geq 0$ $(i = \overline{1,4};\ j = \overline{1,4})$

$$\text{Suy ra } \overline{X^1} = \overline{X_{opt}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};\Rightarrow X_{opt} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vậy: công nhân A đứng chờ, công nhân B đứng máy II, công nhân C đứng máy III, công nhân D đứng máy I.

BÀI TẬP CHƯƠNG 3

Bài 1. Chứng minh rằng bài toán vận tải dạng đóng luôn giải được

Bài 2:

a. Lấy ví dụ về giải bài toán vận tải dạng đóng trong các trường hợp sau:

- Bài toán có 3 kho phát và 3 kho thu
- Bài toán có 3 kho phát 4 kho thu
- Bài toán có 4 kho phát 4 kho thu
- Bài toán có 4 kho phát 3 kho thu

b. Giải bài toán vận tải được cho ở bảng sau:

b_i \ a_i	**10**	**4**	**4**	**2**
4	2	3	4	5
6	1	4	1	1
10	5	2	2	2

Bài 3: Giải bài toán vận tải cước phí với điều kiện không cân bằng thu phát sau:

a, a_i = 30,18,37,20; b_j = 20,35,30,40

$$c_{ij} = \begin{bmatrix} 15 & 16 & 24 & 22 \\ 7 & 6 & 9 & 10 \\ 10 & 14 & 15 & 20 \\ 12 & 18 & 19 & 18 \end{bmatrix}$$

b, a_i = 25,30,35,40; b_j = 20,18,22,35

$$c_{ij} = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 8 & 5 \\ 6 & 9 & 10 & 5 \\ 10 & 9 & 10 & 9 \\ 9 & 7 & 6 & 5 \end{bmatrix}$$

c, a_i = 100,130,140,200,50; b_j =150,180,300

$$c_{ij} = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 8 \\ 7 & 8 & 6 \\ 6 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 3 \\ 5 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Bài 4: Giải bài toán vận tải cực đại sau:

a, a_i = 150,75,55; b_j = 90,50,70,70 , $c_{ij} = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 9 & 11 \\ 3 & 9 & 8 & 6 \\ 6 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

b, a_i = 30,40,45,60; b_j = 70,50,55, $c_{ij} = \begin{bmatrix} 8 & 3 & 5 \\ 9 & 9 & 7 \\ 5 & 4 & 6 \\ 5 & 7 & 6 \end{bmatrix}$

c, a_i = 50,40,30,80; b_j = 25,45,65,85

$$c_{ij} = \begin{bmatrix} 9 & 7 & 5 & 2 \\ 8 & 9 & 3 & 8 \\ 2 & 7 & 6 & 3 \\ 10 & 5 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

Bài 5: Giải các bài toán vận tải theo chỉ tiêu thời gian sau:

a, $a_i = 50,40,60$; $b_j = 52,20,78$

$$t_{ij} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 4 & 9 & 8 \\ 7 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

b, $a_i = 55,30,45$; $b_j = 35,65,30$

$$t_{ij} = \begin{bmatrix} 7 & 5 & 2 \\ 8 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}$$

Bài 6: Giải bài toán vận tải điều xe được cho ở bảng sau:

B_i / A_i	B_1	B_2	B_3
A_1	12	17 15	14 25
A_2	15 20	16 15	18
A_3	7	9 10	17
A_4	14 30	6	8 15

b.

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	5 (12)	3	7 (14)	9
A_2	4 (13)	6	7	8 (17)
A_3	5	3 (20)	4 (10)	7
A_4	8 (5)	10	6	9 (13)

Trong đó x_{ij} là lượng hàng cần vận chuyển từ $A_i\ (i = \overline{1,4})$ đến $B_j\ (j = \overline{1,4})$. Mặt hàng cùng loại tính bằng tấn, khoảng cách tính bằng km.

Bài 7: Giải các bài toán lập kho trạm hợp lý sau:

a.

a_i \ b_j	**40**	b_2	b_3	**80**
50	2	7	6	4
90	6	10	12	9
80	3	14	16	11
80	11	10	14	11

b.

a_i \ b_j	**60**	**70**	b_3	b_4
70	4	9	8	5
110	5	10	14	9
70	6	14	18	11
100	8	10	16	10

Trong đó: đơn vị hàng (tấn), đơn vị cước phí: 1000 đồng

Bài 8: Giải các bài toán sản xuất đồng bộ được cho ở bảng sau:

a.

A \ B	I	II	III	IV
A	8	12	13	11
B	7	14	14	7
C	9	10	12	12
D	10	12	11	13

b.

A \ B	I	II	III	IV
A	7	10	9	6
B	3	9	7	8
C	12	6	5	6
D	9	8	14	13

Trong đó: A, B, C, D – người; I, II, III, IV- việc; $(c_{ij})_{4,4}$- năng lực sản xuất.

Bài 9: Giải các bài toá vận tải được cho ở bảng sau.

a. Bài toán cực đại không cân bằng cung cầu

a_i \ b_j	35	45	40	50
25	10	4	2	9
42	8	5	10	7
38	8	10	9	10
15	15	2	14	5

b.

a_i \ b_i	**135**	**100**	**120**	**90**
120	1	14	6	7
140	14	2	3	10
135	3	12	8	9
125	12	4	9	10

a. Giải bài toán vận tải theo chỉ tiêu thời gian với điều kiện cung nhỏ hơn cầu.

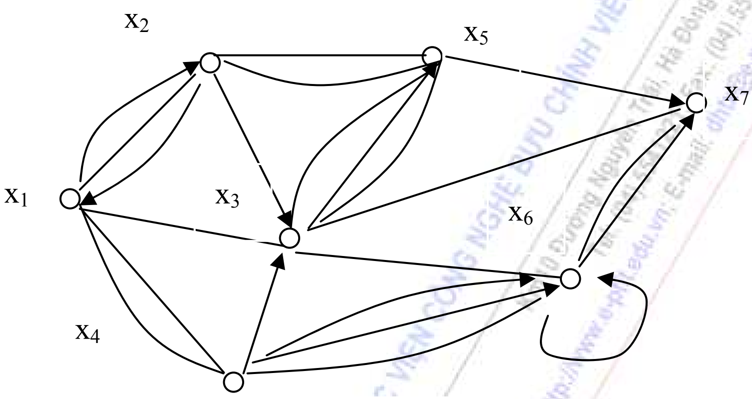
a_i \ b_i	**40**	**44**	**56**
30	2	5	4
35	6	8	1
45	2	3	4

b. Giải bài toán vận tải theo chỉ tiêu thời gian với điều kiện cung lớn hơn cầu.

a_i \ b_i	**100**	**120**	**140**
150	12	9	8
120	20	6	14
130	7	8	5

CHƯƠNG IV. CÁC BÀI TOÁN TỐI ƯU TRÊN MẠNG

4.1. MỘT SỐ KHÁI NIỆM CƠ BẢN



Hình 4.1

4.1.1. Các định nghĩa.

1. Đồ thị hữu hạn (graph) là một cặp tập hợp, ký hiệu là G = (X, A), trong đó X = {x_1, x_2,..., x_n } là tập hữu hạn các điểm (đỉnh, mút), A = { (i, j): i,j =$\overline{1,n}$ } là tập hợp các nhánh (cung, cạnh) nối tất cả hoặc một phần các điểm $x_i \in X$ lại với nhau. Cạnh nối liền đỉnh i với đỉnh j, ký hiệu là (i,j).

Ví dụ: G = (X, A), trong đó X = {x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7} (Hình 4.1) là một đồ thị hữu hạn.

A = {(1,2), (1,4), (1,3), (2,3), (2,5), (3,4), (3,5), (3,6), (3,7), (5,7), (4,6), (6,7) }.

2. Một nhánh của đồ thị gọi là có hướng nếu quy định rõ một đầu mút là đỉnh đầu, đầu kia là đỉnh cuối .

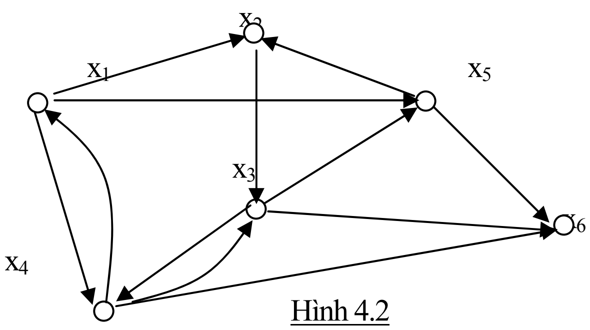
3. Một nhánh trong tập hợp A được định hướng (*ký hiệu mũi tên*), thì gọi là một cung. Nếu A là tập hợp các cung thì đồ thị được gọi là đồ thị có hướng (Hình 4.2).

4. Nếu các nhánh không được định hướng thì đồ thị gọi là đồ thị không có hướng, ký hiệu $\overline{G}$ = (X, $\overline{A}$) (Hình 4.3).

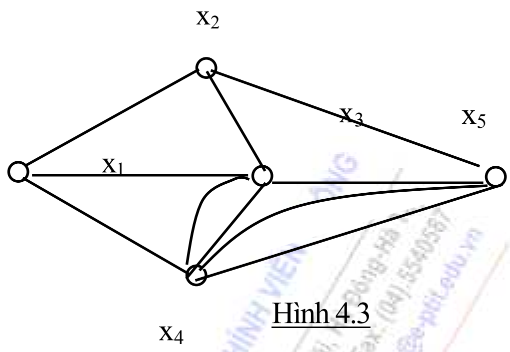
5. Một nhánh có dạng (i, i) gọi là một khuyên.

6. Một đỉnh i gọi là kề với đỉnh j nếu (i, j) ∈ A, nghĩa là có một cạnh của đồ thị nối liền đỉnh i với đỉnh j .

Mỗi đồ thị có thể được biểu thị bởi một hình vẽ trên mặt phẳng. (Hình 4.1; 4.2; 4.3; 4.4). Trong thực tế, trên bản đồ hệ thống đường giao thông nối các cơ quan đơn vị dân chính Đảng v.v… của một thành phố hay một vùng chính là một đồ thị hữu hạn. Vậy bản đồ cũng là một kiểu đồ thị.



Hình 4.2



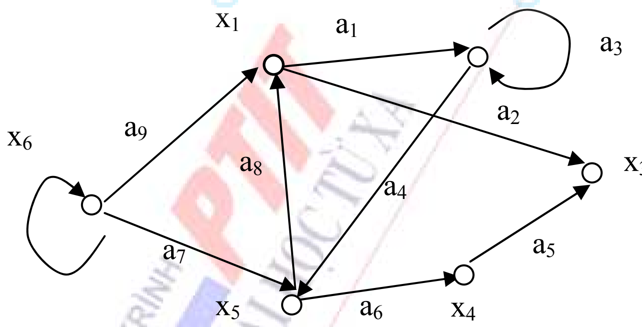
Hình 4.3

4.1.2. Biểu diễn đồ thị (graph) dưới dạng ma trận.

1. ***Ma trận liên hệ trực tiếp.***

Giả sử có đồ thị G = (X, A). Ma trận liên hệ trực tiếp của nó được ký hiệu bằng A = [a_{ij}], được xác định như sau:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ nếu trong } G = (X, A) \text{ có cung } (i, j) \\ 0, \text{ nếu trong } G = (X, A) \text{ không có cung } (i,j) \end{cases}$$



Hình 4.4

Ví dụ. Ta có đồ thị G = (X, A) cho ở Hình 4.4 . Khi đó ma trận liên hệ trực tiếp của đồ thị được cho ở bảng 4.1

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	0	1	1	0	0	0
x_2	0	1	0	0	1	0
x_3	0	0	0	0	0	0
x_4	0	0	1	0	0	0
x_5	1	0	0	1	0	0
x_6	1	0	0	0	1	1

Với một đồ thị G = (X, A) ta có một ma trận liên hệ trực tiếp tương ứng, xác định đầy đủ cấu trúc của đồ thị đó. Chẳng hạn, tổng các phần tử của dòng x_i của ma trận cho ta số cung đi ra khỏi đỉnh x_i, còn tổng các phần tử của cột x_i của ma trận cho ta số cung đi vào đỉnh x_i của đồ thị.

Ta bình phương ma trận liên hệ trực tiếp A, phần tử $a_{ik}^{(2)}$ của ma trận $A^{(2)}$ xác định như sau:

$$a_{ik}^{(2)} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, a_{jk} \qquad (4.1)$$

Nhận xét - Các số hạng bên phải của phương trình chỉ bằng 1 khi cả hai số a_{jk} và a_{ij} đều bằng 1, ngược lại sẽ bằng 0.

Vì $a_{ij} = a_{jk} = 1$ nên tồn tại một đường đi có chiều dài hai phần tử, từ đỉnh x_i đến đỉnh x_k qua đỉnh x_j. Do đó $a_{ik}^{(2)}$ bằng số đường đi có hai phần tử từ đỉnh x_i đến x_k.

Tương tự như vậy nếu $a^{(p)}_{ik}$ là phần tử của ma trận $A^{(p)}$ thì $a^{(p)}_{ik}$ bằng số đường gồm p phần tử đi từ đỉnh x_i đến x_k

2. Ma trận liên kết cung nút.

Giả sử đồ thị G = (X, A) có n đỉnh và m cung. Ma trận liên kết cung nút của đồ thị G = (X, A), ký hiệu B = $[b_{ij}]$, có kích thước m x n với các phần tử được xác định như sau:

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{nếu } x_i \text{ là đỉnh đầu của cung } a_j \\ -1, & \text{nếu } x_i \text{ là đỉnh cuối của cung } a_j \\ 0, & \text{nếu } x_i \text{ không phải là đỉnh đầu hoặc cuối cung } a_j \text{ hoặc nếu cung } a_j \text{ là một khuyên.} \end{cases}$$

Ví dụ. Đối với đồ thị cho ở Hình 4.4, thì ma trận liên kết cung nút của nó có dạng như bảng 4.2

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}
x_1	1	1	0	0	0	0	0	-1	-1	0
x_2	-1	0	0	1	0	0	0	0	0	0
x_3	0	-1	0	0	-1	0	0	0	0	0
x_4	0	0	0	0	1	-1	0	0	0	0
x_5	0	0	0	-1	0	1	-1	1	0	0
x_6	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0

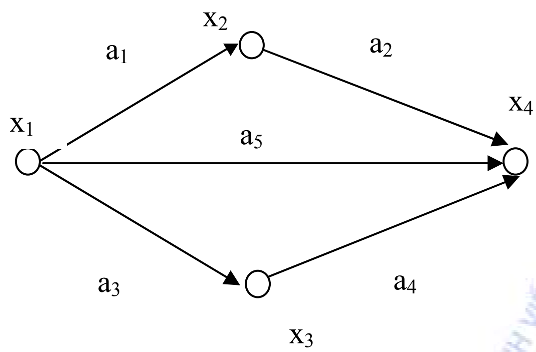
Bảng 4. 2: Ma trận liên kết cung nút của đồ thị cho ở hình 4.4

4.1.3. Một số yếu tố của đồ thị.

1. Đường (đường đi).

Đường đi là dãy liên tiếp các cung và đỉnh của đồ thị, trong đó đỉnh cuối của bất kỳ cung nào, trừ cung cuối cùng, đều là đỉnh đầu của cung tiếp theo, ký hiệu theo cung (1,2), (2,3), (3,4)... (k,l-1), (l, m). Hoặc ký hiệu theo đỉnh: (x_1 x_2 x_3 x_5... x_k); hoặc theo giá trị cung: a_1, a_2,... a_k.

Hình 4.5



Ví dụ. Cho một đồ thị có hướng G = (X, A) ở hình 4.5. Ta có các đường như sau:

- Theo đỉnh có 4 đường: (x_1. x_2) , (x_1. x_2. x_4) , (x_1. x_4) , (x_1. x_3. x_4) , (x_2, x_3) , (x_3, x_4) , (x_2, x_4).
- Theo cung có 2 đường: (1, 2). (2, 4) ; (1,3).(3,4) ; (1,4) ; (1,2) ; (2,4) ; (1,3) ; (3,4).
- Theo giá trị cung: a_1; a_1. a_2; a_5; a_3. a_4; a_3; a_2; a_4.

* **Nhận xét**: Đường đi trong đồ thị có thể là một cung hoặc một số hữu hạn cung nối tiếp nhau.

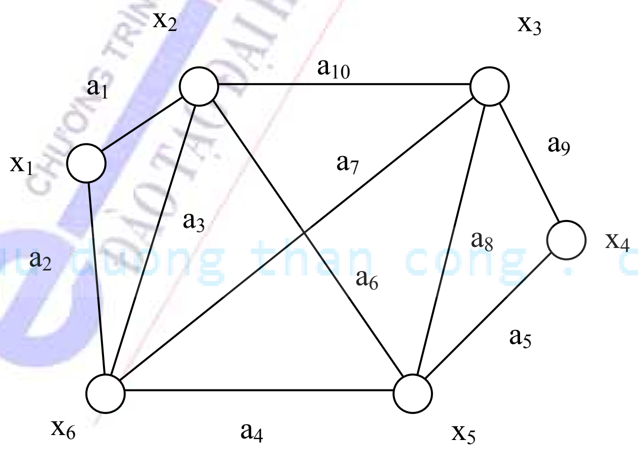
2. *Đường tối giản.* Đường tối giản là đường đi qua mỗi đỉnh của đồ thị chỉ một lần.

Ví dụ. Trong đồ thị cho ở hình 4.4, đường a_9. a_1; a_7. a_6. a_5; a_9. a_2; a_9. a_2.v.v… là những đường tối giản. Còn các đường a_9. a_1. a_4. a_8. a_2; a_9. a_1. a_3. a_4. a_8. a_2. v.v… là những đường không tối giản.

3. *Mạch vòng.* (*Chu trình*). Mạch vòng là đường khép kín trong đó mỗi cạnh chỉ được sử dụng một lần, đỉnh đầu của nhánh a_l trùng với đỉnh cuối của nhánh a_k. Ký hiệu mạch vòng giống như ký hiệu đường đi.

4. *Mạch vòng tối giản.* Mạch vòng tối giản là mạch vòng trong đó mỗi đỉnh của đồ thị chỉ gặp một lần, trừ đỉnh đầu tiên và đỉnh cuối cùng.

Ví dụ. Trong đồ thị cho ở Hình 4.6. Mạch vòng tối giản là đường đi khép kín a_6. a_5. a_9. $a_{10,}$ còn a_6 a_4 a_3 a_6 a_5 a_9 a_{10} là mạch vòng không tối giản vì đỉnh x_2 và x_5 lặp lại hai lần.



Hình 4.6

Một mạch vòng đi qua tất cả các đỉnh của đồ thị gọi là mạch vòng Haminton.

5. *Cung thòng lọng.* (Khuyên): Cung thòng lọng là cung có đỉnh đầu và cuối trùng nhau.

Ví dụ. Trong Hình 4.4, đồ thị có cung a_3 và a_{10} là cung thòng lọng.

6. *Ánh xạ và ánh xạ ngược.*

Một ánh xạ của một đỉnh x_i trong đồ thị G = (X, A), ký hiệu Γ (x_i) là tập hợp các đỉnh cuối của tất cả các cung có đỉnh đầu là x_i. Chẳng hạn trong đồ thị G = (X, A) cho ở Hình 3.4 tại x_1, x_3 có các ánh xạ: $\Gamma(x_1) = \{x_2, x_3\}$; $\Gamma(x_6) = \{x_1, x_5\}$.

Ánh xạ ngược của một đỉnh x_j trong đồ thị G = (X, A), ký hiệu $\Gamma^{-1}\{x_j\}$, là tập hợp các đỉnh đầu của tất cả các cung có đỉnh cuối là x_j: Chẳng hạn trong đồ thị G = (X, A) cho ở Hình 3.4: $\Gamma^{-1}(x_2) = \{x_1, x_2\}$, $\Gamma^{-1}(x_3) = \{x_1, x_4\}$.

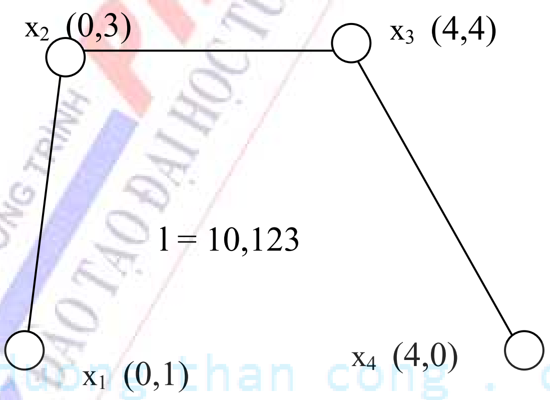
7. *Cây.* Một đồ thị vô hướng $\overline{G} = (X, \overline{A})$ gọi là một cây nếu nó thoả mãn một trong những điều kiện:

- $\overline{G}$ liên thông (*các đỉnh được liên kết với nhau*) và không chứa mạch vòng.
- $\overline{G}$ có (n - 1) cung và không chứa mạch vòng.
- $\overline{G}$ liên thông và nếu bỏ đi bất kỳ một cung nào của nó, thì trở thành không liên thông.

Có thể đưa ra một số loại cây có ý nghĩa thực tiễn sau đây: cây "Đường người chào hàng", cây có chiều dài ngắn nhất (*hoặc dài nhất*), cây Steiner như sau:

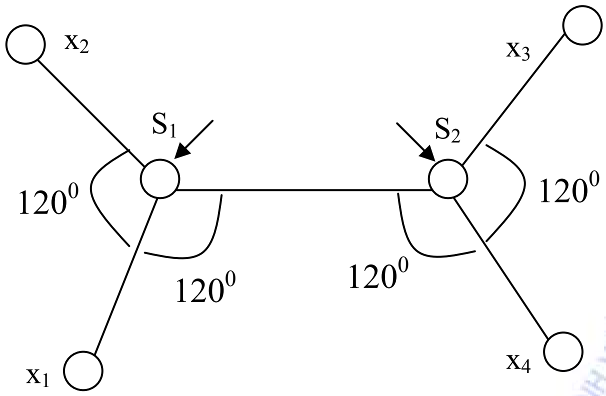
+ *Cây đường người chào hàng* Là đường đi qua tất cả các đỉnh của đồ thị, mỗi đỉnh chỉ qua một lần.

+ *Cây có chiều dài ngắn nhất*. Cây này là một đường đi nhận được từ đồ thị bằng cách loại ra khỏi nó các cung theo trình tự giảm dần chiều dài của cung và kiểm tra tính liên thông của đồ thị, hoặc đưa dần vào nó các cung của đồ thị theo trình tự tăng dần độ dài của chúng và không được tạo nên mạch vòng.



Hình 4.7 a

+ Cây Steiner. Nếu cho phép đưa thêm vào tập hợp đỉnh của đồ thị các đỉnh phụ thì độ dài của cây ngắn nhất có thể giảm xuống. Đỉnh phụ đưa thêm vào đồ thị có ba nhánh cách nhau 120^0 được gọi là đỉnh Steiner. Đồ thị sau khi đưa thêm các đỉnh phụ như trên gọi là cây Steiner.



Hình 4.7b

Hình 4.7a là cây có chiều dài ngắn nhất. Hình 4.7b là cây Steiner. Trên hình 4.7b, các đỉnh mới được đưa vào đồ thị là S_1, S_2 . Đó là những đỉnh Steiner. Chiều dài của cây Steiner là 9,196, chiều dài của cây ngắn nhất là 10, 123 dài hơn cây Steiner là gần 10%.

8. Lát cắt. Lát cắt là tập hợp các nhánh sao cho nếu loại chúng ra khỏi đồ thị thì đồ thị trở nên không liên thông.

Lát cắt gọi là phân chia hai đỉnh x_i và x_j của đồ thị, nếu sau khi loại lát cắt này ra khỏi đồ thị thì hai đỉnh x_i và x_j không còn liên hệ với nhau nữa.

Ví dụ. Trong đồ thị cho ở hình 4.6, tập hợp các nhánh { a_2, a_3, a_6 ; a_{10} } là một lát cắt. Đây là lát cắt phân chia hai đỉnh x_1 và x_6, x_2 và x_3 ; x_2 và x_6 v.v…

Lát cắt tối giản là lát cắt không chứa trong nó những lát cắt khác. Từ nay về sau khi không nói gì thêm, khi nói lát cắt ta hiểu là lát cắt tối giản.

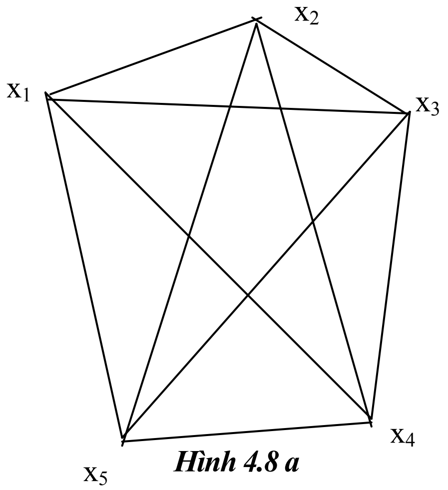
9. Diện của đồ thị. Diện là một phần của đồ thị được giới hạn bởi các cung mà bên trong nó không chứa các cung khác của đồ thị.

10. Đồ thị phẳng và không phẳng.

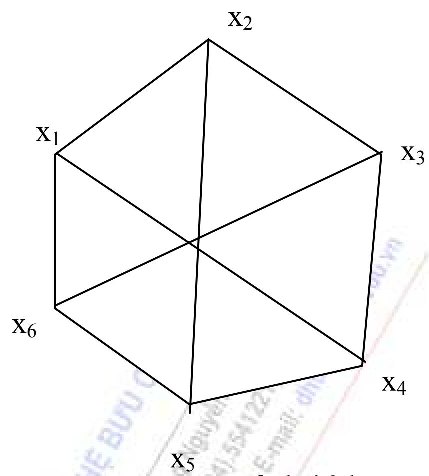
Đồ thị G = (X, A) được gọi là đồ thị phẳng nếu nó có thể biểu diễn được trên mặt phẳng (*hoặc mặt cầu*) sao cho không có bất kỳ hai cạnh nào cắt nhau.

Các đồ thị không thoả mãn điều kiện này gọi đồ thị không phẳng.Trong hình 4.8a và 4.8b, biểu diễn hai đồ thị không phẳng đơn giản nhất *(đồ thị không phẳng cơ bản*), gọi là đồ thị không phẳng Curatovxki .

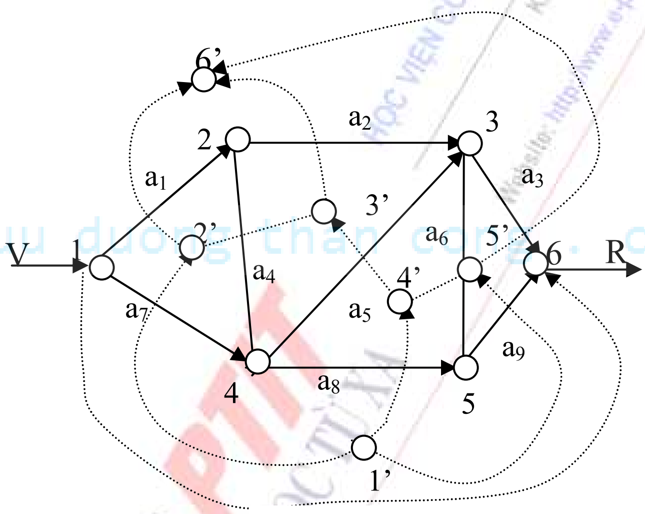
11. Đồ thị đối ngẫu. Đối với một đồ thị G = (X, A), giữa một cặp đỉnh nào đó ta gọi là đỉnh vào (*đỉnh đầu*) và đỉnh ra (*đỉnh cuối*) ta có thể xây dựng được một đồ thị đối ngẫu G' = (X ; A) theo trình tự sau đây:



Hình 4.8 a



Hình 4.8 b



Hình 4.9a

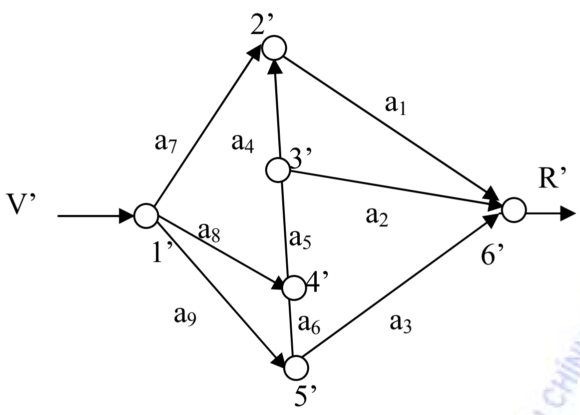
+ Vẽ thêm một cung nối liền hai đỉnh "vào" - "ra" của G = (X, A)

+ Trong mỗi "diện" của đồ thị G = (X, A) ta đặt một đỉnh x' trong tập đỉnh X' của đồ thị đối ngẫu sẽ được xây dựng.

+ Nối các đỉnh trong tập X' lại với nhau bởi các cung, cắt các cung tương ứng của đồ thị phẳng G = (X, A), số cung của đồ thị đối ngẫu G' = (X, A) đúng bằng số cung của đồ thị phẳng ban đầu G = (X,A).

Hướng của các cung của đồ thị đối ngẫu được xác định như sau: Nếu cung của đồ thị đối ngẫu G' = (X, A) đi từ một đỉnh nằm bên trong một diện của đồ thị phẳng ban đầu G = (X, A) cắt cung của G = (X, A) có hướng thuận với chiều kim đồng hồ theo mạch vòng của đa diện, thì hướng của cung đang xét của đồ thị đối ngẫu sẽ đi từ bên trong diện ra bên ngoài diện và ngược lại. Nếu cung của G = (X, A) không có hướng thì cung tương ứng của G' = (X', A) cũng không có hướng.

Hình 4.9.a và 4.9.b. Trình bày ví dụ cách xây dựng đồ thị đối ngẫu (b) từ đồ thị ban đầu (a).



Hình 4.9b

Tính đối ngẫu của đường và lát cắt trong đồ thị phẳng:

Đối với một đồ thị phẳng G' = (X,A), tương ứng với một cặp đỉnh "vào" - "ra", ta có thể xây dựng một đồ thị đối ngẫu G' = (X',A).

Đường đi trong G = (X, A) sẽ tương ứng với lát cắt trong G' = (X, A) và ngược lại, ta có cặp đối ngẫu sau:

Trong G = (X, A) $\qquad\qquad$ Trong G' = (X', A).

Đường đi $\rightleftarrows$ Lát cắt.

Lát cắt $\rightleftarrows$ Đường đi.

Ví dụ. Trong hình 4.9 a và 4.9 b cho đồ thị G = (X, A) và G' = (X', A).

Đối với G = (X, A), tập hợp các cung a_1 a_4 a_5 a_3 là đường đi còn đối với G' = (X', A) là lát cắt. Tập hợp các cung a_8 a_5 a_2 là đường đi trong G' = (X', A), nhưng chúng lại là lát cắt trong G = (X, A).

4.2. BÀI TOÁN ĐƯỜNG ĐI NGẮN NHẤT.

Nhiều bài toán thực tiễn của nhiều hệ thống kinh tế - xã hội khác nhau có thể đưa về bài toán tìm đường đi ngắn nhất giữa hai đỉnh cho trước s và t của đồ thị.

4.2.1. Nội dung bài toán.

Cho đồ thị G = (X, A), trong đó tập hợp A gồm các nhánh vô hướng hoặc các cung. Trên mỗi nhánh hoặc cung (i,j) ta gắn cho một số không âm $C_{ij} \geq 0$ biểu thị độ dài của nhánh hoặc cung đó. (*Đó là khoảng cách, thời gian, chi phí đi từ đỉnh i đến đỉnh j*). Các tập X gồm các đỉnh được đánh số thứ tự 1 đến m:

$X = \{x_i \,|: i = \overline{1, m}\}$. Trên đồ thị G = (X, A), lấy một đỉnh x_s gọi là một đỉnh nguồn và một đỉnh x_t gọi là đỉnh đích.

Vấn đề đặt ra là: Hãy tìm một đường đi, đi từ đỉnh x_s đến x_t sao cho tổng chiều dài của các nhánh và cung thuộc đường đó là nhỏ nhất.

Đường đi tìm được gọi là *đường đi ngắn nhất* từ x_s đến x_t.

Chú ý.

- Nếu cố định đỉnh x_s, thay đổi đỉnh x_t thì ta có bài toán tìm đường đi ngắn nhất từ một nguồn cho trước đến đỉnh đích bất kỳ.

 Nếu cả x_s và x_t thay đổi, ta được bài toán tìm đường đi ngắn nhất giữa hai đỉnh bất kỳ trong đồ thị G = (X, A).

4.2.2. Ý nghĩa bài toán.

Nhiều hoạt động quản lý, điều khiển hệ thống kinh tế - xã hội, dẫn đến bài toán trên. Sau đây là một số trường hợp:

1. Đường đi ngắn nhất thường được đặt ra khi một đơn vị vận tải quân sự cần vận chuyển nhanh chóng một mặt hàng nào đó từ nơi A đến nơi B, chẳng hạn, cần vận chuyển nhanh nhất các lương thực, quân trang, vũ khí ... từ địa điểm A đến địa điểm B.

2. Quá trình truyền tin tức qua mạng thông tin liên lạc gồm nhiều khâu, ở mỗi khâu đều có một phần nguy cơ tin tức bị lộ và nguy cơ đó ở mỗi khâu có thể khác nhau. Cho nên tuỳ theo cách chọn đường truyền tin mà tin tức được bảo đảm an toàn nhiều hay ít. Làm sao chọn được đường truyền tin an toàn nhất ? (*tin tức đến nơi đầy đủ và ít bị lộ nhất*)

3. Máy móc, thiết bị quân sự sử dụng lâu ngày sẽ bị hư hỏng dần . Để thiết bị, máy móc hoạt động liên tục, chúng cần được sữa chữa bảo dưỡng thường xuyên định kỳ, nếu cần thì thay đổi mới. Vấn đề đặt ra là khi nào thay thế thiết bị ? Giả sử một kỳ 5 năm, đầu kỳ chúng ta mua thiết bị mới và sẽ thay thế sau t năm . Cần xác định t là bao nhiêu để tổng chi phí bảo dưỡng và mua mới trong cả kỳ kế hoạch 5 năm là nhỏ nhất ? Biết rằng ta biết được giá mua mới máy và thiết bị, chi phí bảo dưỡng sửa chữa qua các năm .v.v… Nhiều bài toán thực tế về hệ thống thông tin, viễn thông ... dẫn đến bài toán tìm đường đi ngắn nhất.

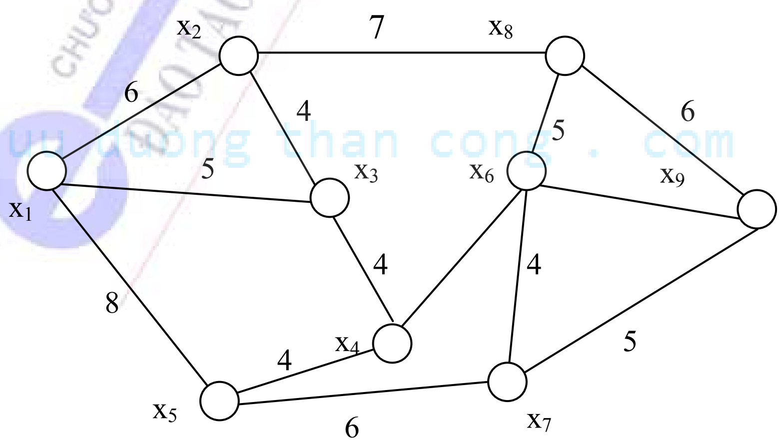
4.2.3. Phương pháp giải.

1. Để dễ theo dõi, ta xét một ví dụ cụ thể

Ví dụ. Cho đồ thị G = (X, $\overline{A}$) ở hình 4.10. Mỗi đỉnh là một vị trí đóng quân trong một khu vực, các cạnh là hệ thống giao thông hoặc mạng thông tin. Trên mỗi cạnh có ghi độ dài của cạnh đó. Hãy tìm đường đi ngắn nhất từ đỉnh nguồn x_1 đến đỉnh x_9 .

Giải bài toán.

Ta dùng phương pháp sau đây, gọi là thuật toán "gán nhãn" do tác giả Difkstra đề xuất. Ý tưởng cơ bản của thuật toán như sau:



Hình 4.10

Ta sẽ lần lượt gán cho các đỉnh của đồ thị một số gọi là nhãn của đỉnh: Cho nhãn của x_1 là 0, sau đó các nhánh đi từ x_1 đến các đỉnh x_j, $j \in \Gamma(x_1)$, ta chọn cạnh có độ dài nhỏ nhất ở ví dụ trên là cạnh (1, 3): $C_{13} = 5$, rồi gán nhãn cho x_3 là nhãn của x_1 cộng với C_{13}, nghĩa là $0 + 5 = 5$. Tiếp theo, trong số các nhánh đi từ một đỉnh đã có nhãn (*đỉnh x_1 hoặc x_3*) đến một đỉnh chưa gán nhãn, ta lại chọn nhánh sao cho độ dài của nó cộng với nhãn của đỉnh đã được gán nhãn là nhỏ nhất giá trị này được gán cho đỉnh cuối của nhánh đó, trong ví dụ trên là nhánh (1, 2), rồi (1, 5). Nhãn của x_2 ứng với min $\{0 + 6 ; 5 + 4\} = 6$; Nhãn của x_5 tương ứng với min $\{0 + 8\} = 8$; nhãn của x_4 tương ứng với min $\{5 + 4 ; 8 + 4\} = 9$ v.v...Ta cứ tiếp tục như vậy cho đến đỉnh x_j được gán nhãn. Như vậy nhãn của x_9 chính là độ dài ngắn nhất đi từ x_1 đến x_9 - và nhãn của một đỉnh x_j đã được gán nhãn chính là độ dài của đường đi ngắn nhất từ đỉnh x_1 đến đỉnh x_j ($j = 2 \div 9$).

Để tìm được lộ trình của đường đi ngắn nhất, mỗi lần gán nhãn cho một đỉnh, ta ghi lại đỉnh kia của cạnh mà ta đã sử dụng để gán nhãn cho đỉnh đó. Chẳng hạn ứng với x_2 hoặc x_3 là x_1; ứng với đỉnh x_4 là x_3 v.v... Nhờ cách ghi này, ta có thể đi ngược từ x_9 về x_1 theo các cạnh tạo nên đường đi ngắn nhất từ x_1 đến x_9.

Theo cách đó, ở ví dụ này đường đi ngắn nhất từ x_1 đến x_9 là 18. Lộ trình đường đi như sau: $x_1 \to x_3 \to x_4 \to x_6 \to x_9$.

2. Thuật toán Đifkstra tổng quát.

Cho đồ thị G = (X, A), tìm đường đi ngắn nhất từ x_s đến s_t, ký hiệu L (x_i) là nhãn của đỉnh x_i ($i = \overline{1, m}$).

Thuật toán gồm 4 bước:

Bước 1.

- Đặt $L(x_s) = 0^+$, xem nhãn này cố định.
- Đặt $L(x_i) = +\infty$ với mọi đỉnh x_i có $i \neq s$, xem các đỉnh này có nhãn tạm thời.
- Gán $x_p := x_s$

Bước 2.

- Với tất cả các đỉnh $x_i \in \Gamma(x_p)$ có nhãn tạm thời sẽ được thay đổi nhãn tạm thời mới, theo điều kiện sau:

$$L(x_i) = \min \{L(x_i), L(x_p) + C_{(p,i)}\} \qquad (4.2)$$

Bước 3.

Trong số các đỉnh có nhãn tạm thời (*cả cũ và mới thay đổi*), ta tìm một đỉnh j có nhãn tạm thời thoả mãn điều kiện:

$$L^+(x_j) = \min \{L(x_i) \mid L(x_i) \text{ có nhãn tạm thời }\} \qquad (4.3)$$

Xem nhãn đỉnh x_j ứng với điều kiện (4.3) là cố định và đặt $x_p = x_j \to$ bước 4.

Bước 4.

1. Nếu chỉ cần tìm đường đi ngắn nhất từ đỉnh x_s đến đỉnh x_t thì có hai khả năng xảy ra:

- Khi $x_p = x_t$ thì $L(x_p)$ là chiều dài đường đi ngắn nhất cần tìm. Dừng lại.
- Khi $x_p \neq x_t \Rightarrow$ Bước 2.

2. Nếu cầu tìm đường đi ngắn nhất từ đỉnh x_s đến các đỉnh còn lại của đồ thị, thì có hai khả năng xẩy ra:

- Khi nhãn của tất cả các đỉnh đã là nhãn cố định thì trị số của nhãn đỉnh x_j ($j \neq s$) là chiều dài của đường đi ngắn nhất từ đỉnh x_s đến đỉnh x_j tương ứng của đồ thị.
- Nếu vẫn còn đỉnh có nhãn tạm thời $\Rightarrow$ Bước 2.

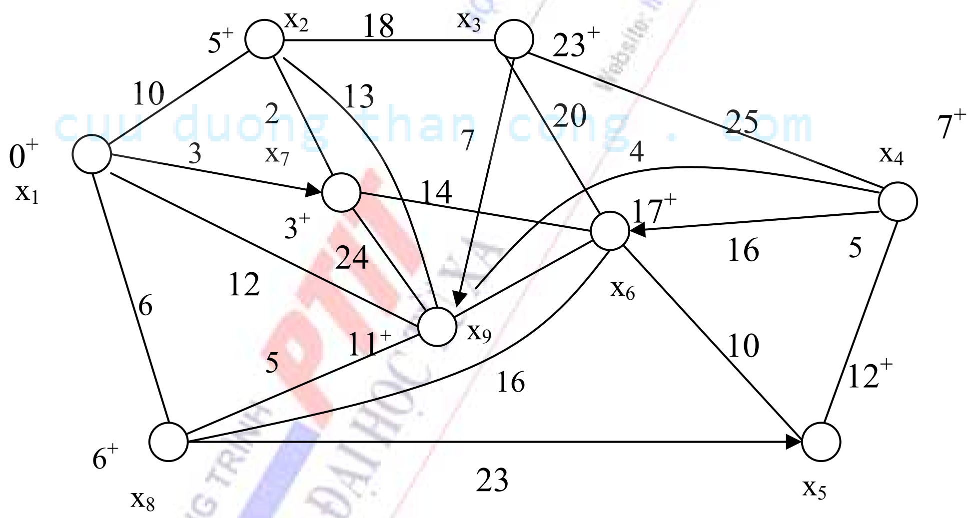
3. Ứng dụng thực tiễn

Cho đồ thị G = (X, A) như Hình 4.11. Mỗi đỉnh của đồ thị là một trung tâm bưu điện của huyện thuộc tỉnh A. Các cạnh là hệ thống đường cáp ngầm trong khu vực đó, trên đó ghi chiều dài của mỗi đoạn cáp ngầm nối hai trung tâm bưu điện. Hãy xác định hệ thống đường cáp ngầm nối các trung tâm bưu điện huyện, sao cho chiều dài từ bưu điện Trung tâm thị xã đặt tại x_1 đến tất cả các trung tâm bưu điện của các huyện thuộc tỉnh A là ngắn nhất.

Ta quy ước cung không hướng được xem là hai cung ngược chiều, có chiều dài bằng nhau. Độ dài C_{ij} của mỗi cung được ghi lại ở bảng 4.3

Đây là bài toán tìm các đường đi ngắn nhất nối đỉnh x_1 đến các đỉnh còn lại của đồ thị.

Giải bài toán trên bằng thuật toán Difkatra.



Hình 4.11

Bảng 4.3

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9
x_1		10					3	6	12
x_2	10		18				2		13
x_3		18		25		20			7
x_4			25		5	16	4		
x_5				5		10			
x_6			20		10		14	15	9
x_7		2		4		14			24
x_8	6								5
x_9	12	13				9	24	5	

Vòng 1.

Bước 1: Đặt $L(x_1) = 0^+$., $L(x_i) = \infty$, $\forall$ i $\neq 1$. Đặt $x_p = x_1 \rightarrow$ Bước 2.

Bước 2: $\Gamma(x_p)$ $\Gamma(x_1) = \{x_2, x_7, x_9, x_8\}$

Các đỉnh x_2, x_7, x_8, x_9 được thay nhãn tạm thời như sau:

$L(x_2) = \min \{ L(x_2), L(x_p) + C_{(p,2)} \} = \min \{+ \infty, 0 + 10\} = 10.$

$L(x_p) = \min \{ L(x_7), L(x_p) + C_{(p,7)} \} = \min \{+ \infty ; 0 + 3\} = 3.$

$L(x_8) = \min \{ L(x_8), L(x_p) + C_{(p,8)} \} = \min \{+ \infty; 0 + 6\} = 6.$

$L(x_9) = \min \{ L(x_9), L(x_p) + C_{(p,9)} \} = \min \{+ \infty, 0 + 12\} = 12.$

Bước 3: Gán nhãn cố định:

Min $\{ L(x_2), L(x_7), L(x_8), L(x_9), L(x_3), L(x_4), L(x_5), L(x_6)\}=$

$= \min \{ 10, 3, 6, 12, \alpha\ (x_3, x_4, x_5, x_6)\}$ = ứng với đỉnh x_7. Đỉnh x_7 nhận nhãn cố định $L(x)=3^+$. Đặt x_p: $= x_7 \rightarrow$ Bước 4.

Bước 4: Đồ thị còn có đỉnh nhận nhãn tạm thời → Vòng 2

Vòng 2.

Bước 2: $\Gamma(x_p) = \Gamma(x_7) = \{x_2, x_4, x_6, x_9\}$. Thay đổi nhãn tạm thời của các đỉnh thuộc tập $\Gamma(x_7)$.

$L(x_2) = \min \{ L(x_2), L(x_p) + C_{(p,2)} \} = \min \{ \infty, 3^+ + 2\} = 5.$

Tương tự: $L(x_4) = 7$; $L(x_6) =$ L17; $L(x_9) = 12 \rightarrow$ Bước 3.

Bước 3: Tìm đỉnh ứng với min $\{ L(x_2), L(x_4), L(x_6), L(x_9), \infty, (x_3, x_5)\}=$

$= \min \{ 5, 7, 12, \infty, (x_3, x_5)\} = 5 \rightarrow x_2$. Gán nhãn cố định cho x_2: $L(x_2) = 5$. Đặt $x_p = x_2 \rightarrow$ Bước 4.

Bước 4: Trong graph còn có đỉnh có nhãn tạm thời $\Rightarrow$ Bước 2 vòng 3.

Vòng3.

Bước 2: $\Gamma(x_p) = \Gamma(x_2) = \{x_1, x_3, x_7, x_9\}$. Thay đổi nhãn nhãn tạm thời cho các đỉnh thuộc $\Gamma(x_2)$.

Ta có $\Gamma(x_3) = \min \{L(x_3), L(x_p) + C_{(p3)}\} = \min \{\infty, 5^+18\} = 23$.

Tương tự ta tính được $L(x_9) = 12 \Rightarrow$ Bước 3.

Bước 3: Tìm đỉnh ứng với Min $\{L(x_3), L(x_4), L(x_6), L(x_8), L(x_9), \infty(x_5)\}$

$= \min \{23,7,17,6,12,\infty(x_5)\} = 6 \rightarrow x_8$. Gán nhãn cố định cho đỉnh x_8: $L(x_8) = 6^+$. Đặt $x_p = x_8 \rightarrow$ Bước 4.

Bước 4: Trong đồ thị còn có đỉnh có nhãn tạm thời → Vòng 4.

Vòng 4.

Tiếp tục các quá trình ở trên ta gán nhãn cố định cho tất cả các đỉnh còn lại, ta ghi lại các nhãn cố định của các đỉnh cạnh các đỉnh của đồ thị (Hình 4.11).

Chú ý.

- Để tìm lộ trình đường đi ngắn nhất từ đỉnh s đến các đỉnh còn lại, ta dùng quá trình lùi liên tiếp, theo quan hệ sau:

$$L^+(x_j) + C(j,i) = L^+(x_i)$$

trong đó x_j là đỉnh nằm liền kề trước đỉnh x_i trên đường đi ngắn nhất từ đỉnh x_s đến đỉnh x_i .

- Nếu như đường đi ngắn nhất từ xs đến xi bất kỳ trong đồ thị là duy nhất thì các cung (i,j) của các đường đi ngắn nhất này tạo nên một cây có gốc là xs. Nếu đường đi này không duy nhất thì có nhiều cây tương ứng.

Với ví dụ xét ở trên, để tìm lộ trình đường đi ngắn nhất từ đỉnh x_1 đến x_2 ta sử dụng hệ thức (4. 4), được:

$L^+(x_j) + C_{(j2)} = L(x_2) = 5 \rightarrow x_j$ là x_7

Với x_7, dùng (4.4) ta được:

$L^+(x_j) + c(_{j7}) = 3 \rightarrow x_j$ là x_1.

Vậy đường đi ngắn nhất từ $x_1 \rightarrow x_2$ là: $x_1 \rightarrow x_7 \rightarrow x_2$

- Thuật toán tìm đường đi ngắn nhất của Difkstra trình bày trên đây chỉ áp dụng khi $c_{ij} \geq 0$. Trong trường hợp tổng quát, c_{ij} có thể ≤ 0, khi đó thuật toán có thể xem [6].

4.3. MẠNG LIÊN THÔNG NGẮN NHẤT.

4.3.1. Nội dung và ý nghĩa của bài toán.

1. Nội dung bài toán.

Cho đồ thị đối xứng (đồ thị vô hướng) G = (X, A), với $X = \{x_1, x_2,... x_n\}$; $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ mỗi cạnh của đồ thị có gắn một số không âm, gọi là độ dài của cạnh. Hãy tìm một cây cuả đồ thị sao cho tổng độ dài các cạnh của cây là nhỏ nhất.

Ta biết rằng cây là một đồ thị liên thông và không có chu trình. Cây của một đồ thị liên thông n đỉnh bao giờ cũng gầm vừa đúng n -1 cạnh.

2. Ý nghĩa của bài toán.

Nhiều vấn đề thực tế trong hoạt động Hậu cần quân sự, thông tin quân sự, xây dựng quân sự ... dẫn đến mô hình bài toán mạng liên thông ngắn nhất. Nếu coi các đỉnh trong đồ thị là các điểm cần đặt máy điện thoại hoặc đặt các kho xăng dầu thì nên đặt đường dây điện thoại hoặc hệ thống đường ống theo những cạnh nào để tiết kiệm dây hoặc tiết kiệm đường ống nhất ? Hoặc cần phải đặt hệ thống cáp truyền thông theo các đường dây như thế nào để cung cấp thông tin đến các đơn vị trong một vùng đóng quân từ một trung tâm chỉ huy sao cho tiết kiệm dây cáp nhất? Nếu xem đỉnh trong đồ thị là những đơn vị cấp trên và các đơn vị cấp dưới. Cần xây dựng mạng lưới đường giao thông nối liền tất cả các đơn vị các cấp của vùng với nhau. Tính toán như thế nào để tổng số chi phí xây dựng là ít nhất.

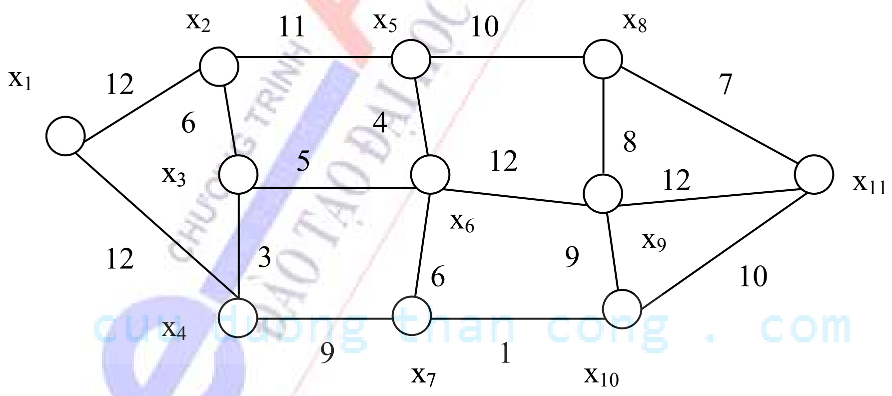
4.3.2. Thuật toán Prim.

1. *Ý tưởng thuật toán*

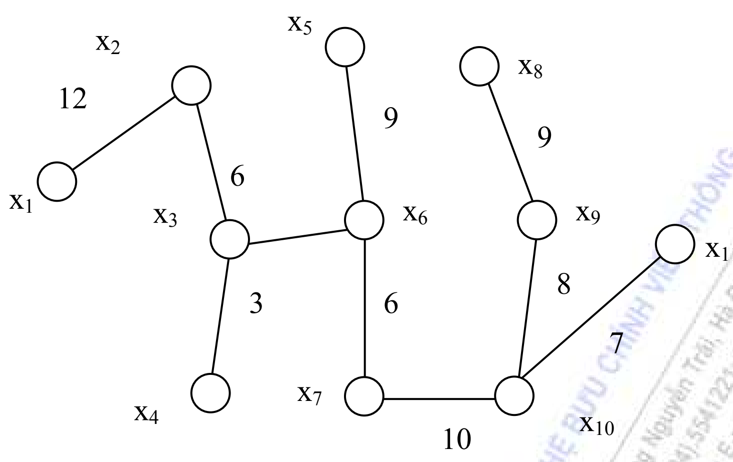
Ta có thể tìm cây của đồ thị sao cho tổng độ dài các cạnh là nhỏ nhất, theo thuật toán đơn giản sau đây do Prim đề xuất. Đầu tiên là chọn một cạnh ngắn nhất làm đoạn gốc của cây. Sau đó, trong tất cả các cạnh có một đầu nút thuộc phần cây đã chọn và một đầu nút ở ngoài ta chọn cạnh có độ dài nhỏ nhất (*nếu có nhiều cạnh như thế, ta chọn cạnh nào cũng được*). Cứ làm như vậy cho đến khi đủ (n -1) cạnh thì ta nhận được cây có tổng chiều dài các cạnh nhỏ nhất. Có thể có nhiều cây như vậy, nhưng tổng độ dài của các cây là bằng nhau, dùng thuật toán Prim cho phép ta tìm được một cây có tổng chiều dài các cạnh là ngắn nhất.

2. *Bài toán thực tiễn và phương pháp giải*

Cần xây dựng hệ thống cáp ngầm nối tất cả các trung tâm bưu điện tại các huyện lị của tỉnh A. Vị trí các trung tâm bưu điện, hệ thống cáp ngầm nối các trung tâm bưu điện huyện của tỉnh A, cùng độ dài của hệ thống cáp ngầm đó được mô tả bởi đồ thị vô hướng $G = (X, \overline{A})$, cho ở hình 4.12a.



Hình 4.12a



Hình 4.12b

Trên mỗi cạnh của đồ thị có ghi độ dài của cạnh đó, chính là độ dài của cáp ngầm nối 2 trung tâm bưu điện của 2 huyện. Bài toán đặt ra là hãy tìm một cây sao cho tổng chiều dài của các cạnh là ngắn nhất?

Cách giải. Theo thuật toán Prim, đầu tiên ta chọn cạnh ngắn nhất là (3,4), có độ dài là 3 làm đoạn gốc của cây. Tiếp đó, chọn cạnh (3,6) có độ dài là 5, rồi lần lượt chọn tiếp các cạnh (3,2), (6,7), (5,6), (5,8), (8,11), (8,9), (9,10) và cuối cùng chọn cạnh (1,2). Đến đây ta có đủ n -1 = 10 cạnh và ta được một cây có tổng độ dài các cạnh là ngắn nhất (Hình 4.12b). Đây là hệ thống cáp ngầm cần lắp đặt và theo đó sẽ xây dựng được hệ thống cáp ngầm ngắn nhất mà vẫn đảm bảo sự lưu thông liên lạc giữa các trung tâm bưu điện nói trên

4.3.3. Thuật toán Kruscal.

Thuật toán Kruscal là biến dạng của thuật toán Prim ở trên. Trước hết, ta sắp xếp tất cả các cạnh của đồ thị theo thứ tự độ dài các cạnh tăng dần (các cạnh có cùng độ dài sắp theo thứ tự tuỳ ý). Sau đó, các cạnh của đồ thị sẽ được sắp xếp lần lượt theo thứ tự đã sắp xếp. Khi một cạnh được xét, nó sẽ được chọn làm một bộ phận của cây có tổng chiều dài ngắn nhất, nếu cạnh này không tạo thành chu trình với các cạnh đã chọn trước đó. Nếu trái lại (tạo thành chu trình), cạnh đó sẽ bị loại ta xét một cạnh tiếp theo. Quá trình sẽ dừng lại khi các cạnh đã chọn tạo nên một cây có tổng chiều dài các cạnh nhỏ nhất (chứa mọi đỉnh của đồ thị, hay có vừa đúng n - 1 cạnh). Cây tìm được theo thuật toán trên là cây có tổng chiều dài các cạnh là ngắn nhất.

Chú ý. Ta có thể tìm cây có tổng chiều dài các cạnh nhỏ nhất như sau:

Lần lượt bỏ đi những cạnh dài nhất mà sau khi bỏ đi đồ thị vẫn còn liên thông (không bị tách rời làm nhiều khối). Sau khi bỏ đi tất cả các cạnh có thể bỏ đi như vậy thì những cạnh còn lài là những cạnh tạo nên cây có tổng chiều dài các cạnh là ngắn nhất. Nói chung, nếu đồ thị ban đầu có n đỉnh và m cạnh thì tổng số cạnh cần bỏ đi là m - n + 1 cạnh.

4.4. BÀI TOÁN LUỒNG LỚN NHẤT.

4.4.1. Nội dung bài toán.

Cho một đồ thị đối xứng và liên thông có n đỉnh, mỗi cạnh của đồ thị có một khả năng thông qua nhất định và như nhau theo hai chiều. Hãy tìm một luồng trên đồ thị, nghĩa là xác định trên mỗi cạnh của đồ thị cần vận chuyển bao nhiêu hàng, theo chiều nào sao cho trên mỗi cạnh lượng hàng vận chuyển không vượt quá khá năng thông qua của cạnh mà vận chuyển được nhiều hàng nhất từ đỉnh nguồn đến đỉnh đích. (Thường đánh số từ đỉnh 1 đến đỉnh n)

Giả sử d_{ij} là khả năng thông qua của cạnh (i, j), khi đó bài toán có thể mô tả bằng biểu thức tóan học như sau:

$$\sum_j x_{ij} - \sum_j x_{ji} = \begin{cases} S, \text{ nếu } i = 1 \\ 0, \text{ nếu } i \neq 1, i \neq n \\ -S, \text{ nếu } i = n \end{cases} \qquad (4.5)$$

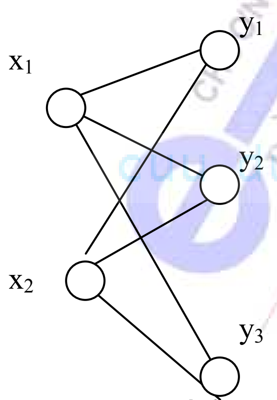
$0 \leq x_{ij} \leq d_{ij}$ với mọi $(i, j) \in \overline{A} = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ là tập các cạnh đồ thị $G = (X, \overline{A})$, và làm cực tiểu đại lượng hàng vận chuyển S.

Chú ý.

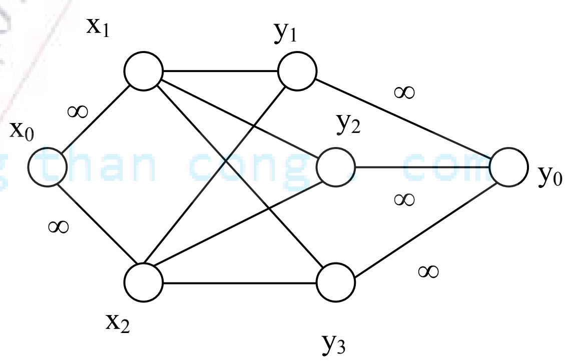
- Đối với đồ thị có hướng ta cũng có bài toán tương tự.
- Bài toán tìm luồng lớn nhất trên một mạng có nhiều nguồn và đích thì có thể dễ dàng quy về bài toán luồng lớn nhất trên mạng có một nguồn và một đích bằng một cách thêm vào các đỉnh giả và cạnh giả thích hợp.

Ví dụ.

Ở đồ thị cho bởi Hình 4.13 a, có hai nguồn là x_1, x_2 và ba đích là y_1; y_2; y_3. Ta thêm vào đồ thị một nguồn giả x_0 với x_1 và x_2 bằng hai cạnh (0,1) và (0,2). Nối y_1, y_2, y_3 với đích giả y_0 bằng 3 cạnh, (y_1, y_0), (y_2, y_0) và (y_3, y_0) khả năng thông qua của các cạnh mới này được đặt bằng ∞. Kết qủa ta được đồ thị tương đương có một nguồn và một đích như ở hình 4.13b.



- Hình 4.13a -



- Hình 4.13b -

Trong thực tiễn hoạt động của ngành bưu chính viễn thông, nhiều khi yêu cầu vận chuyển được nhiều hàng hoá trong một thời gian có hạn là một yêu cầu rất cấp thiết. Những tình huống tương tự như vậy đều có thể mô hình hoá bằng bài toán luồng lớn nhất và giải bằng thuật toán tương ứng (sẽ trình bày dưới đây).

4.4.2. Thuật toán Ford - Fulkerson.

1. *Ý tưởng của thuật toán*

Xuất phát từ luồng không ($x_{ij} = 0\ \forall(i, j)$). Tiếp đó, tìm một đường đi từ đỉnh nguồn x_1 đến đỉnh đích x_n sao cho trên cạnh có vận chuyển hàng theo chiều từ nguồn tới đích (*chiều thuận*) thì lượng hàng vận chuyển chưa đạt tới khả năng thông qua của cạnh đó . Nên không có đường nào như thế thì luồng hiện có là luồng lớn nhất, còn nếu phát hiện có đường đi như trên thì điều chỉnh luồng hiện có như sau: thêm một lượng hàng h vào mỗi cạnh chưa vận chuyển hàng hoặc có vận chuyển hàng theo chiều thuận, giảm lượng vận chuyển h trên mỗi cạnh có vận chuyển hàng theo chiều từ đích tới nguồn (*chiều ngược*), với h là giá trị lớn nhất có thể được sao cho luồng sau khi điều chỉnh vẫn còn phù hợp với khả năng thông qua của mạng, nghĩa là thoả mãn $0 \le x_{ij} \le d_{ij}$. Mỗi lần điều chỉnh như vậy, ta sẽ vận chuyển thêm được h đơn vị hàng từ nguồn đến đích. Sau khi điều chỉnh, ta kiểm tra xem có đường đi nào từ nguồn tới đích có tính chất như trên không, nếu không thì dừng lại, nếu có thì điểm chính luồng như trên v.v.... Quá trình tiếp tục sau một số hữu hạn bước ta sẽ thu được luồng lớn nhất.

2. *Lược đồ thuật toán*

Bước 0. Xuất phát từ luồng 0. Ta lần lượt gán cho các đỉnh của đồ thị một cặp số, gọi là nhãn, như sau: gán cho đỉnh nguồn (đỉnh x_1) nhãn $(\infty, 0)$.

Bước 1. Gọi N_1 là tập các đỉnh i ($i \neq 1$) của mạng nối trực tiếp với đỉnh nguồn bởi một cạnh (*hay cung*) mà lượng hàng vận chuyển từ nguồn trên đó chưa tới khả năng thông qua. Tiếp sau đó ta gán cho mỗi đỉnh i thuộc N_1 một cặp số (e_i, p_i), gọi là nhãn, như sau:

$e_i = d_{1i} - x_{1i}$ = khả năng thông qua còn dư trên cạnh (cung) (1, i),

$p_i = 1$ = số hiệu của đỉnh nguồn đến đỉnh i.

Nếu N_1 chứa đỉnh đích n thì chuyển sang thực hiện bước 5 để tăng giá trị của luồng. Nếu trái lại chuyển sang bước 2.

Bước 2.

Ký hiệu N_2 là tập hợp tất cả các đỉnh j chưa được gán nhãn của đồ thị sao cho đỉnh này được nối với một đỉnh đã được gán nhãn thuộc N_1, chẳng hạn đỉnh i, bởi cạnh (i,j) với $x_{ij} < d_{ij}$ hoặc $x_{ij} > 0$. Tiếp theo, ta gán cho mỗi đỉnh j một cặp số (e_j, p_j), gọi là nhãn, theo công thức sau:

$$e_j = \begin{cases} \min(e_i, d_{ij} - x_{ij}) \text{ nếu } x_{ij} < d_{ij} \\ \min(e_i, x_{ji}) \text{ nếu } x_{ji} > 0 \end{cases}, \quad P_j = i \rightarrow \text{Bước 3.} \qquad (4.6)$$

Bước 3. Lặp lại bước 2 với N_r thay cho N_{r-1}. Sau mỗi số hữu hạn bước lặp ta gặp một trong hai trường hợp sau:

3a. Đỉnh đích chưa được gán nhãn, nhưng không thể gán nhãn tiếp cho bất kỳ một đỉnh nào khác nữa. Dừng lại. Luồng hiện có là lớn nhất.

3b. Đỉnh đích đã được gán nhãn $\rightarrow$ Bước 4.

Bước 4. Tăng luồng hiện có như sau: Giả sử đỉnh đích được gán nhãn (e_n, p_n). Số thứ nhất e_n: chỉ rõ lượng hàng sẽ vận chuyển thêm từ nguồn đến đích. Số thứ hai p_n cho biết đỉnh đã được dùng để gán nhãn cho đỉnh đích.

Dựa vào số thứ hai trong nhãn của đỉnh p_n, ta tìm được đỉnh trước đó v.v… Cứ thế ta lần ngược trở lại đỉnh nguồn. Kết quả là xác định được đường đi từ nguồn tới đích làm tăng giá trị của luồng.

Cách điều chỉnh luồng hàng như sau:

Đặt $x'_{st} = x_{st} + e_n$ nếu trên cạnh (s,t) không vận chuyển hàng hoặc có vận chuyển hàng theo chiều từ nguồn tới đích trên đường đi này (*chiều thuận*).

Đặt $x'_{st} = x_{st} - e_n$ nếu trên cạnh (s,t) có vận chuyển hàng theo chiều ngược → Bước 5.

Bước 5. Xoá nhãn của mọi đỉnh, trừ đỉnh nguồn, rồi quay trở lại bước 1.

Thuật toán sẽ kết thúc sau một số hữu hạn bước lặp, nghĩa là sau mỗi số hữu hạn lần áp dụng các bước từ 1 đến 5 là sẽ gặp trường hợp 3a.

4.4.3. Khả năng thông qua của lát cắt - ý nghĩa của nó.

1. *Khả năng thông qua của lát cắt*

a. Khả năng thông qua của một lát cắt là một trị số, được đo bằng tổng các khả năng thông qua của các cạnh thuộc lát cắt đó.

b. Lát cắt có khả năng thông qua nhỏ nhất gọi là lắt - cắt nhỏ nhất.

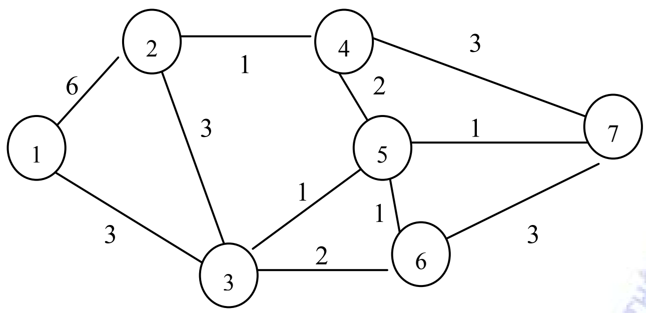
c. **Định lý** (Ford - Fullrson): Trong một đồ thị, giá trị của luồng lớn nhất bằng khả năng thông qua của lát cắt nhỏ nhất.

Ta có thể tìm lát cắt nhỏ nhất bằng chính thuật toán gán nhãn của Ford - Fullrson nói trên. Thật vậy, khi thuật toán gán nhãn kết thúc thì tập các đỉnh của mạng được chia thành hai tập con không giao nhau: Tập hợp A_1 gồm các đỉnh đã được gán nhãn và tập A_2 gồm các đỉnh chưa được gán nhãn (đỉnh nguồn thuộc tập A_1, đỉnh đích thuộc tập A_2). Ký hiệu C là tập các cạnh của đồ thị nối 1 đỉnh thuộc A_1 với 1 đỉnh thuộc A_2. Khi đó, người ta chứng minh được rằng C chính là lát cắt nhỏ nhất.

2. *Ý nghĩa của lát cắt nhỏ nhất*

Lát cắt nhỏ nhất trên đồ thị chính là đoạn đường "then chốt" "yết hầu" trên mạng giao thông, nghĩa là những đoạn đường mà khả năng thông qua của nó cần phải luôn luôn đảm bảo nếu không sẽ làm cho kế hoạch vận chuyển của toàn bộ mạng vận tải sẽ bị ảnh hưởng. Muốn tăng khối lượng vận chuyển của cả luồng vận tải, phải tăng khả năng thông qua của lát cắt nhỏ nhất, nghĩa là phải tăng khả năng thông qua của các đoạn đường "then chốt", "trọng điểm", "yết hầu". Đây là ý nghĩa thực tiễn trong hoạt động vận tải của lát cắt nhỏ nhất.

Nếu ta không chọn đúng các đoạn đường "then chốt" thì dù có mở rộng khả năng thông qua của các đoạn đường này cũng không làm tăng được khả năng vận chuyển của cả mạng đường giao thông. Ngoài ra khi đánh phá ngăn chặn đường vận chuyển của ta, địch thường chọn các đoạn đường then chốt, yết hầu do đó ta phải chủ động tập trung lực lượng nguỵ trang bảo vệ các đoạn đường then chốt này.



Hình 4.14

4.5. BÀI TOÁN LUỒNG NHỎ NHẤT.

4.5.1. Bài toán.

Cho một mạng đối xứng có n đỉnh, mỗi cạnh có khả năng thông qua xác định và có một cước phí vận chuyển nhất định (như nhau theo cả hai chiều). Cho trước lượng quân trang S cần phải vận chuyển từ đỉnh nguồn (số 1) tới đích (số n). Hãy tìm một phương án vận chuyển sao cho phù hợp với khả năng thông qua của mạng và vận chuyển được lượng quân trang S từ nguồn đến đích với tổng chi phí vận chuyển là nhỏ nhất.

Đây là một loại bài toán vận tải trên mạng có hạn chế khả năng thông qua. Tuy bài toán có một đỉnh nguồn và một đỉnh đích, nhưng bất kỳ bài toán vận tải trên mạng có nhiều nguồn và nhiều đích đều có thể quy về bài toán dạng trên bằng cách thêm các đỉnh và cạnh giả thích hợp.

Về mặt toán học, bài toán luồng chi phí nhỏ nhất có thể phát biểu như sau:

Cực tiểu hoá hàm chi phí $\sum_{i,j} c_{ij} x_{ij}$ với các điều kiện:

$$\sum_j x_{ij} - \sum_j x_{ij} = \begin{cases} S, & \text{nếu } i = 1 \\ 0, & \text{nếu } i \neq 1, i \neq n. \\ -S, & \text{nếu } i = n \end{cases}$$

Ở đây đỉnh nguồn được đánh số 1, đỉnh đích đánh số n. c_{ij} là chi phí vận chuyển một đơn vị hàng trên cạnh (i, j), d_{ij} là khả năng thông qua cả cạnh (i,j), còn x_{ij} là khối lượng hàng vận chuyển trên cạnh (i,j) cần xác định.

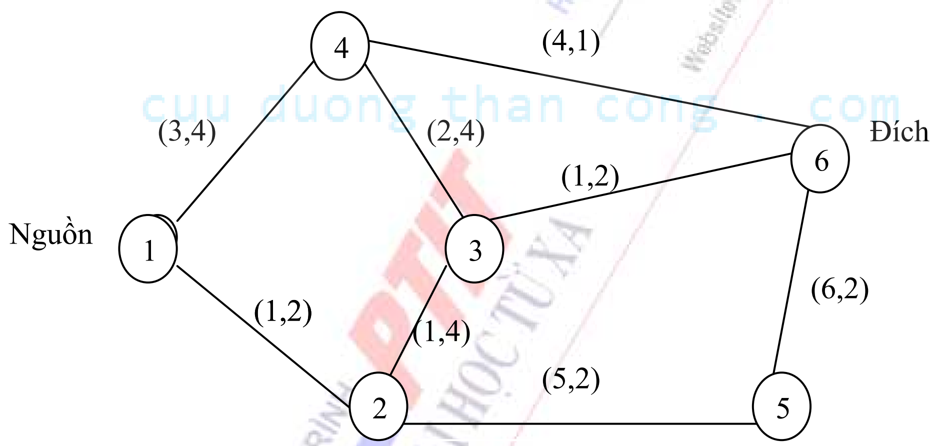
4.5.2. Phương pháp giải.

Luồng chi phí nhỏ nhất có thể tìm theo thuật toán đơn giản sau: Xuất phát từ phương án vận chuyển bằng không ($x_{ij} = 0$ trên mọi cạnh). Ở mỗi bước lặp, ta tìm một đường đi có chi phí nhỏ nhất từ nguồn đến đích. Đường đi này bao gồm một dãy các cạnh kế tiếp nhau sao cho trên các cạnh có vận chuyển hàng theo chiều đi từ nguồn tới đích (chiều thuận) thì lượng hàng vận chuyển chưa vượt quá khả năng thông qua của cạnh đó. Trên đường đi này, cạnh không vận chuyển hàng hoặc có vận chuyển hàng theo chiều thuận thì chi phí vận chuyển là số dương, còn trên cạnh có vận chuyển hàng theo nhiều ngược (*từ đích tới nguồn*) thì chi phí vận chuyển là âm. Tiếp đó, ta xác định khả năng thông qua của đường đi vừa tìm được, đó là số nhỏ nhất trong số các khả năng thông qua còn lại trên các cạnh có chi phí vận chuyển âm. Thêm khả năng thông qua này vào các cạnh không vận chuyển hàng hoặc vận chuyển hàng theo chiều thuận và bớt đi ở các cạnh vận chuyển hàng theo chiều ngược của đường đi này, rồi chuyển qua bước lặp sau. Quá trình trên được lặp lại cho tới khi vận chuyển hết lượng hàng S nguồn đến đích hoặc phát hiện mạng không đủ khả năng vận chuyển hết lượng hàng S từ nguồn đến đích (*do khả năng thông qua của các cạnh quá nhỏ so với nhu cầu vận chuyển lượng hàng S)*.

Thuật toán mô tả ở trên khá đơn giản và thuận tiện cho việc lập trình trên máy tính. Tuy nhiên ở mỗi bước lặp ta phải giải một bài toán phụ: Tìm đường đi ngắn nhất từ nguồn đến đích trêm mạng với cước phí có thể là số âm (xem mục 4.2).

4.5.3. Ví dụ ứng dụng trong thực tiễn.

Một xí nghiệp vận tải cần vận chuyển 5 đơn vị hàng (vật tư thiết bị bưu chính, bưu kiện...) từ tổng kho A đến địa điểm cần hàng G. Quá trình vận chuyển phải qua các trạm trung gian. Hệ thống các kho trạm và đường giao thông của khu vực được diễn tả bởi đồ thị hữu hạn (Hình 4.15). Các vị trí kho trạm được đánh số lần lượt 1, 2, ..., 6. Đơn vị hàng: 10 tấn, đơn vị chi phí: 1 triệu đồng VN. Mỗi cạnh tương ứng với một cặp số thứ tự mà số thứ nhất là chi phí vận chuyển một đơn vị hàng hoá trên cạnh đó, số thứ hai là khả năng thông qua của cạnh này. Nguồn là đỉnh 1, đích là đỉnh 6, tổng số hàng vận chuyển từ nguồn đến đích là 5 đơn vị.



Hình 4.15

Phương pháp giải.

Ở bước lặp đầu tiên, phương án vận chuyển bằng 0 trên tất cả các cạnh. Tiếp đó ta tìm đường đi có chi phí nhỏ nhất từ nguồn đến đích, đó là 1 - 2 - 3 - 6 với tổng chi phí vận chuyển bằng 3, khả năng thông qua của đường này bằng 2 bằng khả năng thông qua của cạnh (1,2) hoặc (3,6). Ta vận chuyển thêm 2 đơn vị hàng từ nguồn đến đích theo đường đi vừa tìm được.

Ở bước lặp tiếp theo, đường đi có chi phí nhỏ nhất từ nguồn tới đích là 1 - 4 - 6, với chi phí vận chuyển bằng 7 và khả năng thông qua là 1 (*bằng khả năng thông qua của cạnh* (4,6)). Ta vận chuyển thêm được một đơn vị hàng từ nguồn tới đích qua đường đi vừa tìm được.

Ở bước lặp thứ ba, đường đi chi phí nhỏ nhất từ nguồn đến đích là 1 - 4 - 3 - 2 - 5 - 6 . Trên đường đi này có ba cạnh chưa vận chuyển, đó là (3, 4), (2,5), (5,6) ; cạnh có vận chuyển hàng theo chiều thuận là (1, 4) và cạnh vận chuyển hàng theo chiều ngược là (2, 3). Vì thế, chi phí vận chuyển trên đường đi này bằng: 3 + 2 - 1 + 5 + 6 = 15. Khả năng thông qua của đường này bằng:

$$\min(4 - 1, 4 - 0, 2, 2 - 0) = 2.$$

Ta vận chuyển thêm 2 đơn vị hàng trên các cạnh (1,4), (4,3), (2,5), (5,6) và bớt 2 đơn vị hàng trên cạnh (2,3), (*cạnh này bây giờ không còn vận chuyển hàng nữa*). Kết quả là ta vận chuyển được toàn bộ 5 đơn vị hàng bằng 5.10 tấn = 50 tấn từ nguồn (đích) đến đích (đỉnh 6), với tổng chi phí vận chuyển bằng:

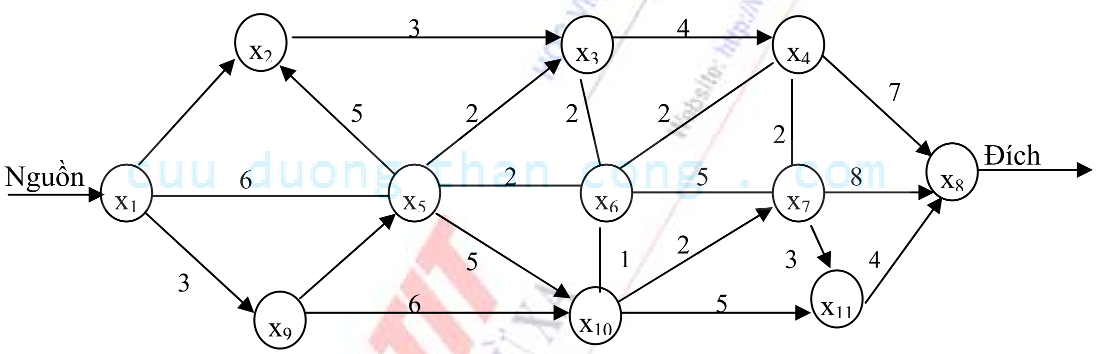
3.2 + 7. 1 + 15.2 = 43 = 43.1triệu đồng VN = 43 triệu đồng Vn

Luồng chi phí nhỏ nhất là:

$x_{12} = 2$; $x_{14} = 3$; $x_{23} = 0$; $x_{25} = 2$, $x_{36} = 2$; $x_{43} = 2$; $x_{46} = 1$; $x_{56} = 2$

BÀI TẬP CHƯƠNG 4

1. Cho đồ thị G = (X, $\overline{A}$) như trên Hình 1 sau đây:



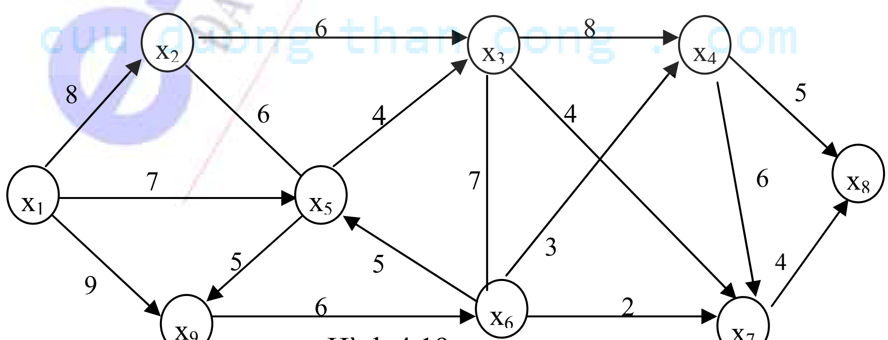
Hình 4.18

a. Tìm đường đi ngắn nhất từ $x_1 \to x_8$.

b. Tìm đường đi ngắn nhất từ $x_2 \to x_{11}$

c. Tìm đường đi ngắn nhất từ $x_5 \to x_8$

2. Cho đồ thị G = (X, A) như trên Hình 6.19 sau đây:



Hình 4.19

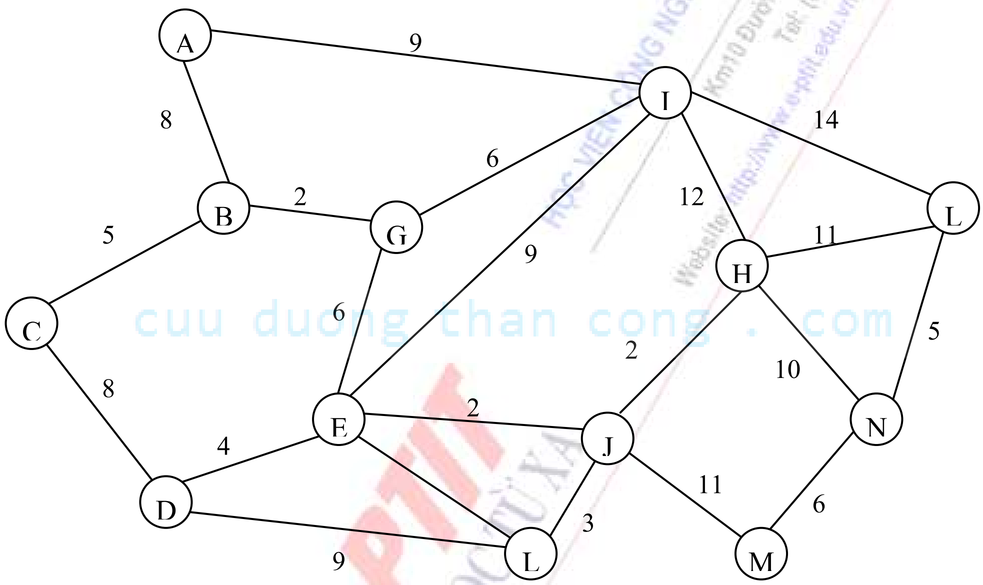
a. Tìm đường đi ngắn nhất từ $x_1 \to x_8$

b. Tìm đường đi ngắn nhất từ $x_2 \rightarrow x_7$

c. Tìm đường đi ngắn nhất từ $x_1 \rightarrow x_4$

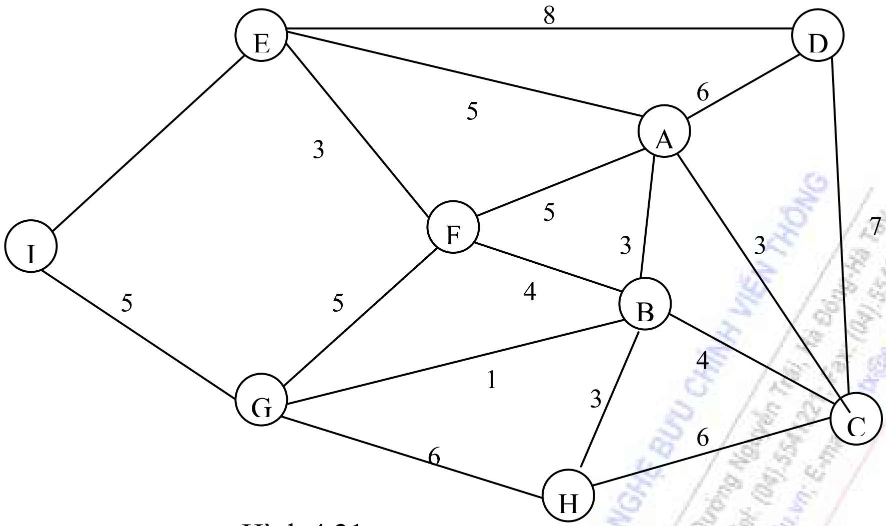
3. Theo anh (chị) bài toán tìm đường đi ngắn nhất có thể áp dụng để giải quyết những vấn đề thực tế nào ? Hãy phát biểu một công việc mà anh (chị) cho là có ý nghĩa. Trình bày giải pháp của mình giải quyết vấn đề đó.

4. Một đơn vị thông tin dự định xây dựng một hệ thống cống ngầm dẫn cáp thông tin. Các điểm A, B..., L, M trong Hình 3 cho dưới đây là những địa điểm đặt các tổng đài mà hệ thống cáp phải kết nối. Các cạnh trong hình vẽ là những đường có thể đào cống ngầm đặt cáp. Các con số ghi bên cạnh các cạnh là khoảng cách thực tế giữa hai địa điểm, đơn vị đo là 100 mét. Hãy lập một phương án đào cống ngầm để đảm bảo kết nối các tổng đài sao cho tổng số cống ngầm và cáp thông tin cần đào, xây dựng và lắp đặt là ngắn nhất.



Hình 4.20

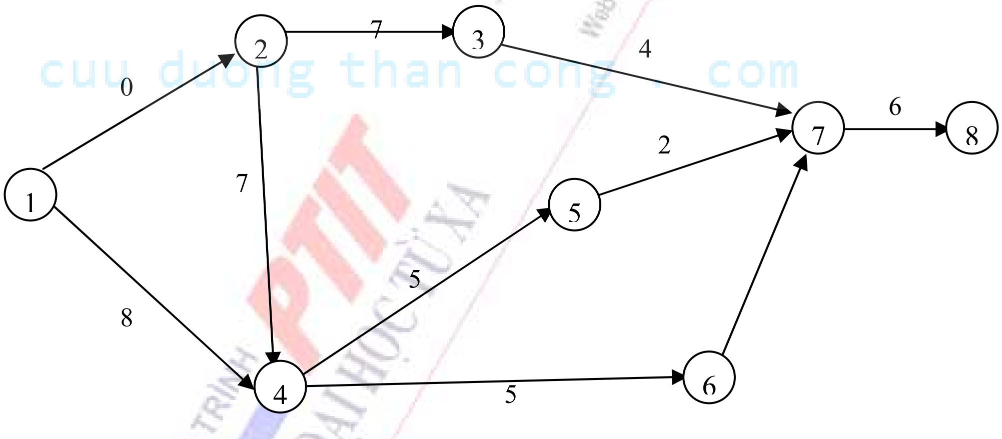
5. Hình 4.21 vẽ một sơ đồ giao thông của một khu vực. Số ghi bên mỗi cạnh là độ dài của đoạn đường tương ứng với cung ấy đơn vị là km. Người ta muốn đặt dây điện thoại theo các đường giao thông để kết nối trung tâm A với tất cả các địa điểm khác (B, C,..., I). Hãy tính toán xem nên đặt dây theo những đường giao thông nào để tiết kiệm cáp nhất ?



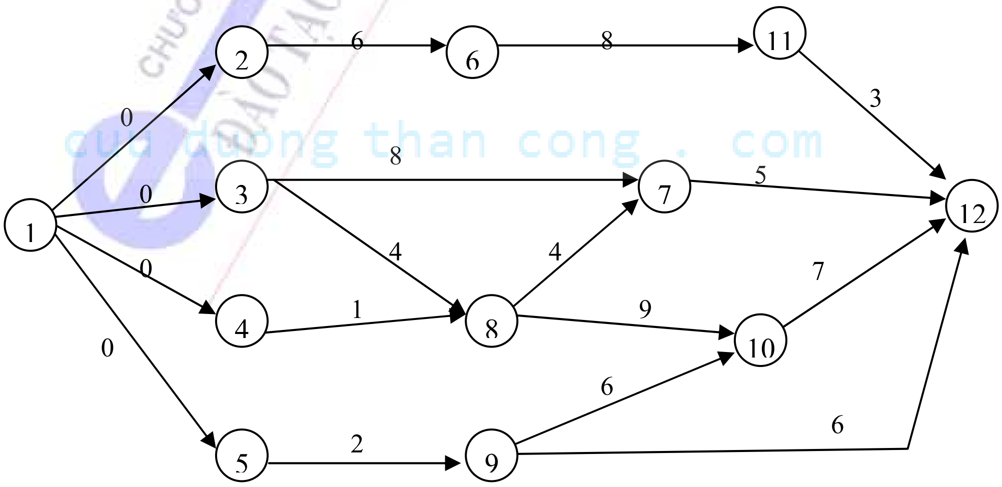
Hình 4.21

6. Tính các chỉ tiêu thời gian và tìm đường găng cho các sơ đồ mạng sau:

a)



b)



7. Một trung tâm viễn thông dự định nối tất cả các máy tính ở các chi nhánh trực thuộc vào máy chủ ở trung tâm, bằng cách dùng các đường cáp thông tin đặc biệt. Các chi nhánh có thể nối với trung tâm trực tiếp hay gián tiếp thông qua các chi nhánh trung gian khác. Chi phí cho việc đặt cáp xem như tỷ lệ thuận với khoảng cách. Cho biết khoảng cách giữa trung tâm và các chi nhánh cho như trong bảng sau:

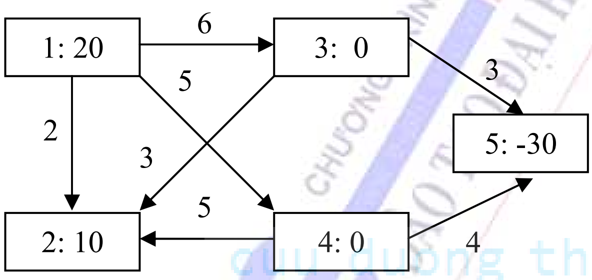
Văn phòng	TT	CN1	CN2	CN3	CN4	CN5
TT	—	190	70	115	270	160
CN1	190	—	100	110	215	50
CN2	70	100	—	140	120	220
Cn3	115	110	140	—	175	80
CN4	270	215	120	175	—	310
CN5	160	50	220	80	310	—

Nên đặt cáp trực tiếp giữa các chi nhánh nào để cho mọi chi nhánh đều liên lạc được với trung tâm (trực tiếp hoặc gián tiếp) và chi phí tổng cộng cho việc đặt cáp là nhỏ nhất.

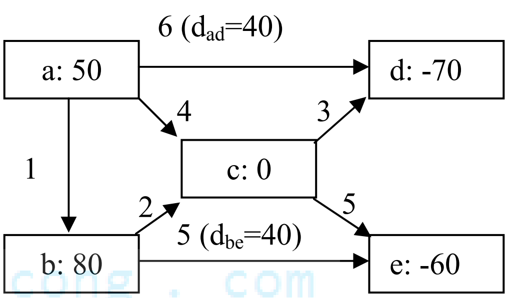
a. Vẽ đồ thị mô tả bài toán trên dưới dạng một cây

b. Tìm mạng liên thông ngắn nhất.

8. Tìm luồng có chi phí nhỏ nhất trong mạng vẽ ở Hình 5 và 6 gồm 5 đỉnh 1, 2, 3, 4, 5. Số ghi bên cạnh mỗi đỉnh là khả năng cung cấp (*số dương*) hay nhu cầu tiêu thụ (*số âm*). Khả năng thông qua của cạnh (1,3) là 10, của cạnh (2,3) là 25, của mọi cạnh còn lại là $+\infty$.



Hình 4.22



Hình 4.23

9. Tìm luồng có chi phí nhỏ nhất trong mạng vẽ ở Hình 4.23, gồm 5 đỉnh 1, 2, 3, 4, 5. Các số ghi trong hình vẽ cùng ý nghĩa như trong bài tập 9. Khả năng thông qua của các cạnh (1,4) và (2,5) bằng 40, của các cạnh còn lại bằng $+\infty$.

CHƯƠNG V: MÔ HÌNH KINH TẾ VÀ MÔ HÌNH TOÁN KINH TẾ

5.1 CÁC KIẾN THỨC MỞ ĐẦU VỀ MÔ HÌNH KINH TẾ.

5.1.1 Các khái niệm.

a. Mô hình:

Mô hình của một đối tượng là sự phản ánh hiện thực khách quan đối tượng đó theo cách hình dung, tưởng tượng, suy nghĩ ở các góc độ, ở các mức độ của người nghiên cứu. Nó được trình bày, thể hiện, diễn đạt bằng lời văn, chữ viết, sơ đồ, hình vẽ, biểu thức toán học...

Việc mô hình đối tượng cần nghiên cứu phụ thuộc vào trình độ nhận thức, hiểu biết của người nghiên cứu và vào phương pháp diễn đạt của họ đối với đối tượng nghiên cứu.

Mô hình thực chất là mô tả đối tượng để nhận biết và tác động vào nó, nhằm làm cho nó vận động theo chiều hướng mà ta mong muốn. Vì vậy mô hình được xây dựng bao giờ cũng nhằm một số mục tiêu nhất định. Cùng một sự vật nhưng mục tiêu nghiên cứu khác nhau thì mô hình cũng khác nhau.

Hiện thực khách quan vận động và tồn tại xung quanh ta vô cùng phức tạp, sinh động mà trình độ nhận thức của con người ở mỗi thời điểm, mỗi thời đại đều có giới hạn nên ta không thể và không cần thiết phải thâu tóm vào mô hình tất cả mọi chi tiết của nó. Do đó phải căn cứ vào mục tiêu nghiên cứu mà tập trung chú ý vào các khía cạnh, các vấn đề, các chi tiết quan trọng nhất có tác dụng quyết định sự vận động phát triển của sự vật cần nghiên cứu, lược bỏ các chi tiết, các sự vật không quan trọng, không ảnh hưởng lớn đến sự vận động phát triển của đối tượng nghiên cứu.

Việc xác định những chi tiết, sự vật nào quan trọng và bỏ qua các chi tiết, sự vật nào không quan trọng, tuỳ thuộc vào trình độ nhận thức của người nghiên cứu về mục tiêu nghiên cứu và về đối tượng nghiên cứu.

Những công việc trên gọi là Mô hình hoá, đó là quá trình xây dựng, mô hình cho đối tượng nghiên cứu, trong đó những chi tiết không cơ bản được lược bỏ nhằm làm nổi bật những đặc trưng quan trọng nhất, quyết định nhất đối với đối tượng mà ta nghiên cứu.

Cùng một đối tượng nghiên cứu, chi tiết này có thể quan trọng đối với vấn đề nghiên cứu này nhưng có thể không quan trọng đối với vấn đề nghiên cứu khác. Do đó cùng một đối tượng nghiên cứu có thể xây dựng nhiều mô hình phản ánh nó để sử dụng với các mục tiêu nghiên cứu khác nhau.

Phương pháp thể hiện mô hình cũng rất phong phú. Việc lựa chọn phương pháp nào cũng phụ thuộc vào mục đích và trình độ của người nghiên cứu. Tuy nhiên, dù lựa chọn phương pháp nào, các mô hình cũng phải đóng vai trò là phương tiện cho người nghiên cứu suy luận từ những điều đã biết để khám pháp ra những điều chưa biết, nghĩa là từ những tiền đề, giả thiết có thể rút ra những hệ quả lô gíc, những qui luật phản ánh sự vận động phát triển của sự vật, hiện tượng cần nghiên cứu.

Khi mô hình đủ chứa đựng những yếu tố cơ bản của hiện thực khách quan có liên quan đến vấn đề cần nghiên cứu thì chúng ta có nhiều hy vọng rằng các kết luận rút ra từ quá trình phân tích mô hình sẽ phù hợp với thực tiễn ở mức độ đáng tin cậy, tức là những kết luận này khá gần với chân lý.

b. Mô hình kinh tế.

Mô hình kinh tế là mô hình phản ánh các đối tượng trong lĩnh vực hoạt động kinh tế.

Các lĩnh vực liên quan đến kinh tế vốn dĩ rất phức tạp, nhất là những vấn đề kinh té hiện đại, dó đó khi phác thảo mô hình kinh tế, chúng ta phải sử dụng những kiến thức khoa học kinh tế đã tích luỹ được. Tuy nhiên các lý thuyết, các học thuyết kinh tế thường mang tính khái quát, trừu tượng vì vậy chúng bỏ qua nhiều chi tiết, nhiều khía cạnh cụ thể nhưng lại có thể rất quan trọng trong việc nghiên cứu đối tượng kinh tế của ta. Để xây dựng mô hình kinh tế, chúng ta còn cần phải thu thập, sử lý các thông tin về những kết quả nghiên cứu liên quan, các dữ liệu đã được công bố và các kiến thức của các ngành khoa học khác.

Người ta thường mô tả và phân tích các hiện tượng, hệ thống kinh tế – xã hội dưới ba nhóm mô hình kinh tế sau:

- Mô hình kinh tế vi mô (Micro).
- Mô hình kinh tế vĩ mô (Macro).
- Mô hình kinh tế phát triển.

Mô hình kinh tế phát triển được nghiên cứu kỹ trong qui hoạch toán học, mà một bộ phận quan trọng của nó là lý thuyết qui hoạch tuyến tính, đã được trình bày đầy đủ ở Phần I của giáo trình này.

Ngày nay, các mô hình kinh tế được diễn đạt và phân tích bằng ngôn ngữ, tư duy và công cụ toán học, một khoa học chặt chẽ, chính xác có khả năng diễn tả và phân tích một cách đầy đủ, bản chất, khái quát nhất sự vận động và phát triển của các hiện tượng, hệ thống kinh tế - xã hội.

c. Mô hình toán kinh tế.

Mô hình toán kinh tế là mô hình kinh tế được diễn đạt bằng ngôn ngữ toán học.

Bản chất của quá trình mô hình hoá một hiện tượng, một hệ thống kinh tế là mô hình hoá quá trình vận động của nó, nghĩa là xây dựng phương trình trạng thái cho nó. Để xây dựng mô hình toán học của một hiện tượng, một hệ thống kinh tế cụ thể, ta phải chọn các biến kinh tế cho nó, đó là các biến điều khiển, các biến ngẫu nhiên (gọi chung là các biến vào) và các biến trạng thái, các biến ra (kết quả sản xuất), sau đó mô tả quan hệ giữa các biến đó bằng những hệ thức toán học.

5.1.2 Cấu trúc của mô hình toán kinh tế.

Cấu trúc của mô hình toán kinh tế thường gồm hai bộ phận chính: các biến và các ràng buộc nhằm diễn tả chặt chẽ, chính xác, đầy đủ hơn các hiện tượng và hệ thống kinh tế đang nghiên cứu, người ta đưa thêm vào mô hình phần giả thiết và chú thích hoặc nhận xét.

a. Các biến kinh tế của mô hình:

Các biến kinh tế là các đại lượng biến thiên đặc trưng cho các yếu tố cơ bản của các hiện tượng kinh tế và hệ thống kinh tế ta cần nghiên cứu. Các biến kinh tế thay đổi giá trị trong phạm vi nhất định. Tuỳ theo mục đích nghiên cứu cũng như khả năng về nguồn dữ liệu liên quan, biến kinh tế trong mô hình toán kinh tế thường được phân ra làm ba loại.

i. <u>Các biến ngoại sinh</u> (Biến giải thích, biến độc lập):

Đó là các biến có mức độ độc lập nhất định đối với mô hình, nó đặc trưng cho các yếu tố kinh tế tồn tại bên ngoài hệ thống hoặc hiện tượng kinh tế đang nghiên cứu. Nói một cách khác đó là các biến tồn tại ngoài mô hình, bao gồm cả các biến biểu thị các yếu tố ngẫu nhiên.

Ví dụ, các chính sách của chính phủ, ngân sách được cấp, các tiền tệ quốc tế... là các biến ngoại sinh của một doanh nghiệp, của một ngành kinh tế của một nước.

ii. Các biến nội sinh (biến được giải thích, biến phụ thuộc).

Đó là các biến tồn tại ngay trong bản thân mô hình, chúng phụ thuộc khăng khít lẫn nhau và chịu tác động của biến ngoại sinh. Đó là các biến đặc trưng cho các yếu tố kinh tế nằm ngay trong các hiện tượng, các hệ thống kinh tế đang nghiên cứu. Việc thêm bớt các biến nội sinh quyết định mức độ phù hợp của mô hình so với thực tiễn.

Ví dụ:

- Tổng sản phẩm của một doanh nghiệp tại thời điểm t.

- Tích luỹ tại thời điểm t của một doanh nghiệp... là các biến nội sinh của một mô hình doanh nghiệp.

iii. Các tham số (thông số).

Đó là các biến thể hiện các đặc trưng kinh tế tương đối ổn định của hiện tượng kinh tế hoặc hệ thống kinh tế ta cần nghiên cứu.

Ví dụ. Tham số biểu thị cơ cấu của một hệ thống kinh tế, biểu thị trạng thái công nghệ của doanh nghiệp, biểu thị thị hiếu của người tiêu dùng...

b. *Các ràng buộc của mô hình.*

Các ràng buộc của mô hình là các hệ thức toán học phản ánh mối quan hệ kinh tế, quan hệ hành vi, quan hệ pháp lý, quan hệ cơ học, quan hệ kỹ thuật, quan hệ đồng nhất, quan hệ thể chế, quan hệ mua bán, vay mượn... giữa các yếu tố kinh tế trong hệ tống kinh tế hoặc hiện tượng kinh tế mà ta đồng nghiên cứu. Các quan hệ này hình thành, vận động tạo thành các qui luật cơ bản của các hiện tượng, các hệ thống kinh tế. Qui luật bao trùm, chi phối sự vận động của tự nhiên, xã hội là "qui luật bảo toàn". Theo qui luật này, sự vận động (hình thành, phát triển, diệt vong) của các quá trình trong tự nhiên và xã hội không ngẫu nhiên sinh ra và mất đi, chúng chỉ chuyển từ dạng này qua dạng khác. Các mối quan hệ kinh tế thông qua quan hệ của các biến kinh tế cũng chịu sự chi phối của qui luật bảo toàn. Bảo toàn suy cho cùng là sự bằng nhau, cân bằng theo một độ đo nào đó. Do đó hình thức biểu hiện mối quan hệ giữa các biến kinh tế là các phương trình, bất phương trình. Ngoài ra các quan hệ kinh tế còn được biểu hiện bởi các hệ thức toán học khác. Các phương trình trong mô hình gọi là phương trình cấu trúc. Phương trình cấu trúc ở dạng đơn giản là những hàm số (hàm sản xuất, hàm kinh tế), ở dạng phức tạp hơn là những phương trình, hệ phương trình đại số, vi phân hoặc sai phân.

Các hệ thức toán học biểu thị quan hệ kinh tế của các biến kinh tế, được thiết lập dựa trên cơ sở những nguyên lý hay qui luật cơ bản của kinh tế học, vật lý học, sinh học, hoá học, xã hội học... Ngoài ra, trong một số trường hợp, do hiểu biết của ta chưa đầy đủ về các qui luật cơ bản chi phối quá trình vận động của sự vật, hiện tượng kinh tế đang xét, cho nên phải dùng một số hệ thức thực nghiệm dựa trên các giả thuyết hoặc các kết quả thu được từ việc sử lý các số liệu thống kê.

Sau khi đưa các hệ thức toán học đã xác lập được về dạng chính tắc hoặc chuẩn tắc, ta nhận được phương trình trạng thái của hiện tượng kinh tế hoặc hệ thống kinh tế đang xem xét. Đối với hệ thống kinh tế, các hệ thức toán học trong mô hình thường bao gồm:

- Các hệ thức hành vi, biểu hiện tính qui luật trong hành vi của các tác nhân kinh tế (Ví dụ: Các hàm cung, hàm cầu, hàm lợi ích...).

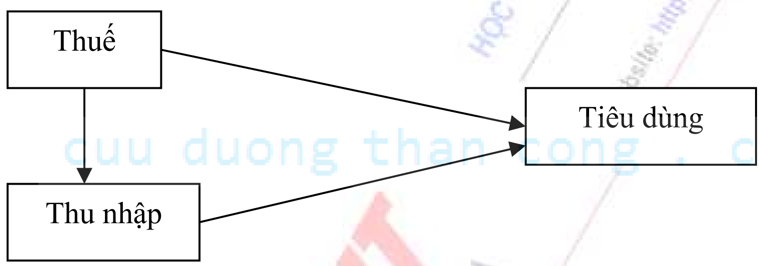
- Các hệ thức kinh tế – kỹ thuật, diễn tả các quá trình vật lý, cơ học của hoạt động kinh tế, trong đó các yếu tố sản xuất được tổng hợp lại chế biến theo công nghệ f nào đó để tạo ra các sản phẩm (kết quả).

- Các hệ thức định chế, biểu hiện các qui định, pháp lý của nhà nước (thuế, tiền lương, bảo hiểm...).

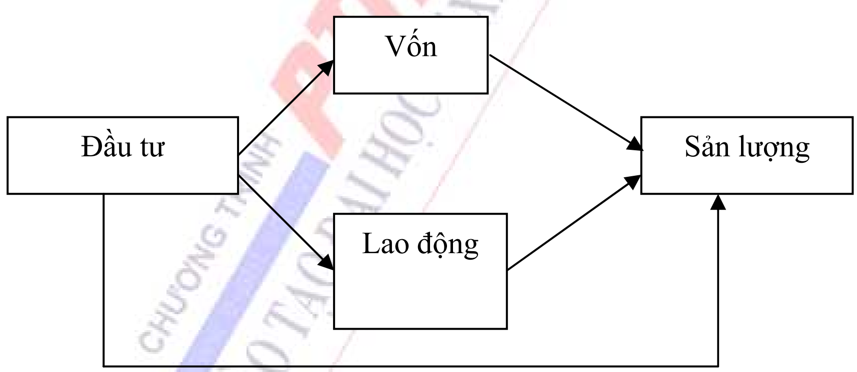
- Các hệ thức đồng nhất (dùng để định nghĩa).

- Các phương trình cân bằng, diễn tả nguyên lý bảo toàn ...

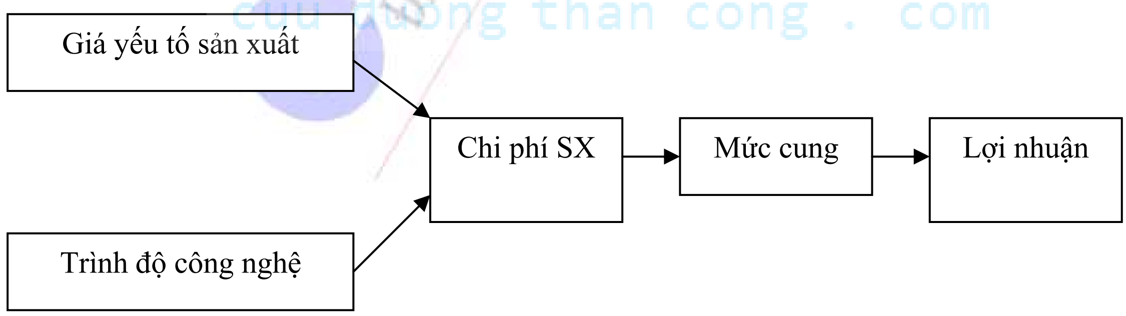
Quan hệ giữa các biến số có thể là các mối quan hệ trực tiếp hoặc gián tiếp thông qua các biến số khác, theo một hoặc nhiều khâu trung gian. Các quan hệ đó có thể biểu diễn dưới dạng sơ đồ sau:



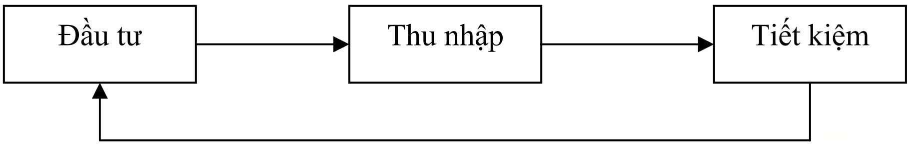
Hình 5.1



Hình 5.2



Hình 5.3



Hình5.4

5.2 XÂY DỰNG VÀ SỬ DỤNG MÔ HÌNH TOÁN KINH TẾ.

5.2.1 Xây dựng mô hình toán kinh tế.

Việc mô hình hoá toán học các hiện tượng hoặc một hệ thống kinh tế thường được tiến hành theo bốn bước sau.

Bước 1: Xây dựng mô hình định tính cho đối tượng kinh tế cần nghiên cứu, nghĩa là xác định các yếu tố có ý nghĩa quan trọng nhất và xác lập các qui luật mà các yếu tố kinh tế phải tuân theo. Nói cách khác là phát biểu mô hình bằng lời, bằng biểu đồ cùng các điều kiện kinh tế, kỹ thuật, xã hội, tự nhiên và các mục tiêu cần đạt được. Để làm được điều đó cần:

- Xác định mục tiêu nghiên cứu đối tượng kinh tế cần mô hình (mục tiêu nhận thức, phân tích, dự đoán... về đối tượng kinh tế đó).
- Nghiên cứu các học thuyết kinh tế, xã hội, khoa học kỹ thuật liên quan đến đối tượng kinh tế cần nghiên cứu.
- Xác định quan điểm của người nghiên cứu thông qua thực tiễn, lý luận và các mô hình liên quan đến đối tượng kinh tế cần nghiên cứu.

Bước 2: Xây dựng mô hình toán học cho đối tượng kinh tế cần nghiên cứu, nghĩa là diễn tả lại dưới dạng ngôn ngữ toán học cho mô hình định tính, bao gồm xác định biến kinh tế và các ràng buộc của các biến kinh tế. Nội dung gồm các việc sau:

- Dựa vào lý luận để quyết định lựa chọn các biến kinh tế và các hệ thức ràng buộc của mô hình.
- Sử dụng các công cụ toán học để phân tích mối quan hệ giữa các biến kinh tế, kể cả các quan hệ tiềm ẩn.
- Xác lập mối liên hệ trực tiếp giữa các biến nội sinh với các biến ngoại sinh và các tham số.
- Chọn các biến số đặc trưng cho trạng thái của hệ thống kinh tế cần nghiên cứu.
- Xây dựng các hệ thức toán học thiết lập quan hệ và ràng buộc giữa các biến số và các tham số điều khiển đối tượng kinh tế cần nghiên cứu.
- Xác định hàm mục tiêu, nghĩa là đặc trưng bằng số biểu thị hiệu quả của hoạt động của các hệ thống kinh tế đang nghiên cứu.

Bước 3; Sử dụng các công cụ toán học để khảo sát và giải quyết mô hình toán học đã xác lập ở bước 2. Căn cứ vào mô hình đã xây dựng, lựa chọn hoặc xây dựng phương pháp giải cho phù hợp. Tiếp đó cụ thể hoá phương pháp bằng các thuật toán tối ưu và thể nghiệm giải bài toán trên máy tính điện tử.

Trên cơ sở quan hệ giữa các biến được biểu thị thông qua các biểu thức toán học, ta có thể mô phỏng trên máy tính điện tử giả định các tình huống của các biến kinh tế khác liên quan.

Bước 4: Dựa vào các số liệu thu thập được, mô phỏng trên máy tính các tình huống trong quá khứ và hiện tại, dự đoán và kiểm định sự phù hợp của mô hình đối với lý luận và thực tiễn. Để nâng cao tính hiện thực của mô hình kinh tế đã có, ta có thể thêm bớt, thay đổi vài trò một số biến số kinh tế đã có, ta có thể thêm bớt, thay đổi vai trò một số biến số kinh tế, các tham số và biến ngẫu nhiên, các hệ thức toán học ràng buộc của các biến kinh tế... Để phân tích sâu sắc hiện tượng hoặc hệ thống kinh tế đang xét, ta phân chia các vấn đề nghiên cứu thành những chuyên đề độc lập và ứng với nó khái quát hoá bằng các mô hình kinh tế con phù hợp. Mỗi mô hình con lại nghiên cứu phân tích như đã làm ở trên, sau đó lắp ghép các mô hình con thành một mô hình hoàn chỉnh mô phỏng đầy đủ đúng đắn, sâu sắc hiện tượng hoặc hệ thống kinh tế cần nghiên cứu.

Có thể xảy ra một trong hai khả năng sau:

Khả năng 1. Mô hình và các kết quả tính toán phù hợp với lý thuyết và thực tế. Khi đó cần lập một bản tổng kết ghi rõ cách đặt vấn đề, mô hình toán học thuật toán tối ưu, chương trình máy tính, cách chuẩn bị số liệu để đưa vào máy tính, nghĩa là toàn bộ các công việc cần thiết cho việc áp dụng mô hình và kết quả để giải quyết vấn đề thực tế đặt ra. Trong trường hợp mô hình cần được sử dụng nhiều lần thì phải xây dựng hệ thống phần mềm bảo đảm giao diện thuận tiện giữa người sử dụng và máy tính điện tử, không đòi hỏi người sử dụng phải có trình độ chuyên môn cao về toán.

Khả năng 2. Mô hình và các kết quả tính toán không phù hợp với thực tế, trong trường hợp này cần phải xem xét các nguyên nhân của nó. Có bốn nguyên nhân sau có thể có:

i. Các kết quả tính toán trong bước 3 chưa đủ độ chính xác cần thiết. Khi đó cần phải xem xét lại các thuật toán cũng như các chương trình tính toán đã viết và sử dụng.

ii. Các số liệu ban đầu (các hệ số, thông số) không phản ánh đúng thực tế giá cả, hoặc chi phí trên thị trường, hoặc các định mức vật tư, hoặc các số liệu khác về công suất, khả năng máy móc, dự trữ tài nguyên... Khi đó điều chỉnh lại một cách nghiêm túc, chính xác.

iii. Mô hình định tính xây dựng chưa phản ánh được đầy đủ hiện tượng thực tế. Nếu vậy cần rà soát lại bước 1 xem có yếu tố hoặc qui luật nào đó còn bị bỏ sót không.

iv. Việc xây dựng mô hình toán học ở bước 2 chưa thật đúng. Cần xây dựng lại cho phù hợp, mức độ tăng dần từ tuyến tính đến phi tuyến, từ tĩnh đến động.

5.2.2 Sử dụng mô hình toán kinh tế trong nghiên cứu và lựa chọn giải pháp kinh tế tối ưu.

Sau khi đã xây dựng và hiệu chỉnh mô hình phù hợp với hiện tượng và quá trình kinh tế, ta có thể sử dụng mô hình để phân tích động thái và hành vi của đối tượng kinh tế từ đó lựa chọn giải pháp tốt nhất cho quá trình quản lý điều khiển kinh tế.

1. ***Sử dụng mô hình kinh tế Vi mô (Micro)***.

Người ta sử dụng mô hình kinh tế Vi mô để phân tích cách ứng sử, hành vi của các chủ thể kinh tế khi họ theo đuổi mục đích của mình, như hành vi sản xuất và hành vi tiêu dùng, phân tích mối quan hệ giữa sản xuất và tiêu dùng, phân tích cân bằng thị trường.

a. *Phân tích hành vi sản xuất.*

Sản xuất được hiểu là một quá trình biến đổi đầu vào (các yếu tố sản xuất, các tài nguyên) thành đầu ra (các sản phẩm vật chất, dịch vụ…). Chủ thể thực hiện quá trính sản xuất là doanh nghiệp. Hành vi của doanh nghiệp là quyết định lựa chọn cách thức sử lý các mối quan hệ giữa các yếu tố sản xuất với các nguồn lực khác của hệ thống kinh tế, giữa đầu vào với đầu ra... Trong kinh tế thị trường doanh nghiệp tham gia hoạt động sản xuất, kinh doanh vì mục tiêu lợi nhuận, hơn nữa là lợi nhuận cực đại. Để đạt được mục tiêu đó, doanh nghiệp phải lựa chọn các loại yếu tố sản xuất, mức độ sử dụng, sản lượng cung ứng cho thị trường, giá bán sản phẩm, căn cứ vào thực lực của doanh nghiệp (trình độ công nghệ, trình độ quản lý, khả năng nguồn vốn tự có…) và các điều kiện liên quan đến thị trường đầu vào và thị trường đầu ra.

Để phân tích được hành vi của doanh nghiệp, từ đó đề ra được giải pháp kinh tế tốt nhất, người tư sử dụng các mô hình mô tả công nghệ sản xuất (Mô hình hàm sản xuất, mô hình tối ưu kỹ thuật sản xuất, mô hình về qui mô và hiệu quả sản xuất).

Khi sử dụng các mô hình mô tả công nghệ sản xuất của doanh nghiệp để phân tích hoạt động của doanh nghiệp, ta mới chỉ đạt được tối ưu về mặt kỹ thuật, chưa đạt tối ưu với các điều kiện bên ngoài, đó là thị trường đầu vào mà điều kiện quan trọng nhất là giá của các yếu tố sản xuất. Đây là nguồn thông tin quan trọng mà doanh nghiệp không thể bỏ qua khi lựa chọn mức độ sử dụng các yếu tố đầu vào. Để làm được điều đó, chúng ta phải sử dụng các mô hình phân tích tình huống tối ưu về mặt kinh tế của sản xuất.

b. Phân tích tình huống tối ưu về mặt kinh tế của sản xuất.

Thông qua phân tích các mô hình mô tả công nghệ sản xuất, các doanh nghiệp trong chừng mực nhất định có thể sử dụng linh hoạt các yếu tố đầu vào, điều này tạo khả năng cho doanh nghiệp có thể lựa chọn nhiều phương pháp sử dụng các yếu tố sản xuất theo mục đích của họ. Doanh nghiệp sẽ gặp hai tình huống: *Một là*, với mức sản lượng dự kiến sản xuất, doanh nghiệp phải tiêu tốn một khoản chi phí để thực hiện mức sản lượng qui định đó. Mọi doanh nghiệp đều mong muốn lựa chọn các phương pháp sử dụng các yếu tố đầu vào sao cho mức chi phí thấp nhất. *Hai là*, với số vốn đầu tư cho trước, doanh nghiệp phải lựa chọn phương pháp sử dụng yếu tố đầu vào sao cho đạt mức sản lượng cao nhất. Các tình huống trên gọi là *các phương án tối ưu về mặt kinh tế*.

Nếu giá bán sản phẩm của doanh nghiệp không đổi, doanh nghiệp tiêu thụ được hết sản phẩm thì cả hai phương án trên đều đem lại lợi nhuận tối đa cho doanh nghiệp.

Nếu giá các yếu tố sản xuất là $W_1, W_2,..., W_n$, hàm sản xuất của doanh nghiệp là $Y = F(X_1,...,X_n, a,b,c...)$. Khi đó để phân tích hai khía cạnh trên của hoạt động doanh nghiệp, người ta sử dụng các mô hình cực tiểu hoá hàm chi phí, mô hình tối đa sản lượng, mô hình tối đa lợi nhuận.

c. Phân tích hành vi tiêu dùng.

Chủ thể của hoạt động tiêu dùng là người tiêu dùng, mà cuối cùng là hộ gia đình. Hành vi của hộ gia đình trên thị trường hàng hoá là cách thức họ mua sắm, tiêu thụ các loại hàng hoá, từ đó hình thành mức cầu các loại hàng hoá của hộ gia đình. Hộ gia đình quyết định chọn loại hàng hoá nào, mua với khối lượng bao nhiêu phụ thuộc vào sở thích, thị hiếu, vào thu nhập, vào giá cả hàng hoá, vào mục đích tiêu dùng. Để phân tích hành vi tiêu dùng của hộ gia đình, từ đó tính được các lời giải tốt nhất cho cách tiêu dùng để đạt được lợi ích lớn nhất, người ta sử dụng các mô hình thị hiếu, sở thích (mô hình hàm thoả dụng), mô hình định mức cầu của các loại hàng của hộ gia đình. Trên cơ sở phân tích trên người ta tìm được lời giải cho mình.

d. Phân tích quan hệ giữa cung và cầu.

Quan hệ giữa cung và cầu là quan hệ cơ bản quan trọng nhất của sản xuất và tiêu dùng. Trên cơ sở phân tích quan hệ cung cầu, người ta xác định được mức sản lượng sản phẩm cần phải sản xuất trong các thời kỳ khác nhau để đáp ứng được cầu của người tiêu dùng mà đạt lợi nhuận cao nhất. Ngược lại thông qua phân tích quan hệ giữa cung và cầu, người tiêu dùng chọn cho mình phương án tiêu dùng trong phạm vi thu nhập của mình mà đạt được lợi ích lớn nhất. Để làm được điều đó, người ta sử dụng các mô hình Hàm cung của thị trường, mô hình Hàm cầu của thị trường, mô hình quan hệ mức cầu và thu nhập, mô hình quan hệ mức cầu - giá cả.

e. Phân tích cân bằng thị trường.

Khi nghiên cứu mô hình hàm cung, hàm cầu hàng hoá của thị trường ta thấy yếu tố giá hàng hoá có liên quan tới hai hàm này và giá được xem là biến ngoại sinh. Nếu chúng ta quan tâm đến sự hình thành giá cả trên thị trường thì phải coi giá cả là biến nội sinh. Với tư cách là biến nội sinh, giá cả trước hết phụ thuộc quan hệ cung - cầu hiện tại trên thị trường, ngoài ra nó phụ thuộc vào cấu trúc của thị trường (cạnh tranh hoàn hảo, cạnh tranh không hoàn hảo, độc quyền) và sự can thiệp của Nhà nước. Quan hệ cung - cầu được đề cập tới là quan hệ cân bằng phù hợp với qui luật bảo toàn. Các yếu tố khác có thể ảnh hưởng tới sự hình thành giá cả được xem là tham số. Để phân tích qui luật cân bằng thị trường ở phạm vi hẹp (Vi mô), người ta phân tích mô hình một thị trường và mô hình hai thị trường, từ đó tìm được lời giải cho việc xác định được các điều kiện đạt được cân bằng thị trường. (Sẽ nhắc lại ở mục sau).

2. Sử dụng mô hình kinh tế Vĩ mô (Macro).

Mô hình kinh tế vĩ mô phân tích mối quan hệ giữa các biến số kinh tế tổng quát (biến gộp) đặc trưng cho hoạt động Vĩ mô của nền kinh tế. Trong kinh tế thị trường người ta quan tâm đến ba khu vực: Thị trường hàng hoá - dịch vụ, thị trường tiền tệ và thị trường lao động. Cả ba khu vực đều xuất hiện mức tổng cung, tổng cầu loại hàng hoá tương ứng. Đối với nền kinh tế mở tham gia vào mức tổng cung, tổng cầu còn có các chủ thể bên ngoài quốc gia. Nghiên cứu và phân tích các nhân tố tác động đến tổng cầu, tổng cung, do đó tác động đến tình huống cân bằng của cả ba loại thị trường là công việc rất quan trọng để phân tích hành vi và động thái kinh tế của một đất nước, từ đó làm cơ sở cho phân tích hoạch định chính sách kinh tế của nhà nước.

a. Phân tích tổng cung và tổng cầu.

Tổng cung là tổng giá trị hàng hoá, dịch vụ (sản phẩm cuối cùng) mà nền kinh tế tạo ra được trong một thời gian nhất định (thường là một quý, một năm). Tổng cung phụ thuộc vào trình độ công nghệ, các nguồn lực của nền kinh tế, mức giá cả. Tổng cung còn gọi là mức sản lượng của nền kinh tế (output). Đối với nền kinh tế mở, tổng cung bao gồm cả các yếu tố nhập khẩu. Xét ở thời gian ngắn, do một số nguồn lực trong nền kinh tế bị giới hạn, nên sản lượng bị chặn trên bởi một mức gọi là sản lượng tiềm năng. Vì sản lượng được đo bằng giá trị và được thể hiện bằng giá trị nên có thể coi về mặt giá trị, sản lượng bằng thu nhập của các chủ thể sở hữu các nguồn lực, các yếu tố sản xuất trong nền kinh tế. Trong thực tế sản lượng được đo bằng chỉ tiêu tổng sản phẩm quốc nội (GDP) hoặc tổng sản phẩm quốc dân (GNP).

Tổng cầu là tổng số chi tiêu hàng hoá, dịch vụ của toàn bộ nền kinh tế trong một thời kỳ (thường là một quí, một năm). Tổng cầu phụ thuộc vào mức đầu tư, mức tiêu dùng của các cá nhân, của nhà nước (Chính phủ) và mức giá cả. Đối với nền kinh tế mở, tổng cầu bao hàm cả yếu tố xuất khẩu. Tổng cầu được thanh toán bằng đúng thu nhập, do đó ta có hệ thức cân bằng:

Tổng cung = Tổng cầu,

hoặc dưới dạng:

Tổng cầu = Tổng thu nhập.

Sử dụng các mô hình cân bằng, cùng với mối quan hệ giữa các nhân tố tác động tới tổng cung, tổng cầu chúng ta có thể phân tích ảnh hưởng của các yếu tố kinh tế đến sự cân bằng trong nền kinh tế đang xét, từ đó đưa ra các điều khiển để điều chỉnh sự cân bằng đó phụ vụ cho mục tiêu quản lý điều khiển của ta.

b. Phân tích sự tác động của đầu tư đối với tổng sản phẩm của nền kinh tế quốc dân.

Để phân tích tự tác động của đầu tư đối với sản lượng của hệ thống kinh tế, người ta dùng mô hình nhân tử Keynes. Nội dung của việc sử dụng mô hình nhân tử Keynes như sau:

Ký hiệu: Q là mức sản lượng,

I là mức đầu tư,

Y là thu nhập quốc dân,

C là mức tiêu dùng (C phụ thuộc vào mức thu nhập hiện tại Y).

Trong thời gian ngắn, các quyết định đầu tư liên quan đến những dự tính cho tương lai ít phụ thuộc vào mức sản lượng hiện tại nên ta có thể giả thiết đầu tư I độc lập với Q.

Sự phụ thuộc giữa C vào Y được thể hiện bởi hệ thức:

$$C = b + cY, \qquad (5.1)$$

Trong đó c,b là tham số, $c \in (0,1)$.

Hệ số C trong (5.1) thể hiện khuynh hướng tiêu dùng biên (MPC).

Trong mô hình nhân tử Keynes, tổng cung là Q, tổng cầu là I + C, bao gồm cầu cho đầu tư (I) và cầu cho tiêu dùng C. Mức thu nhập chính là sản lượng Q, nên ta có hệ thức cân bằng:

$$\begin{cases} Q = I + C & (5.2) \\ C = b + cQ & (5.3) \end{cases}$$

Hệ thức (5.1) → (5.3) với các biến nội sinh là Q, C; biến ngoại sinh là I và tham số b,c cho như trên gọi là Mô hình nhân tử Keynes.

Từ biểu thức (5.1), (5.2), (5.3) suy ra:

$$Q = \frac{1}{1-c} I + \frac{1}{1-c} b \qquad (5.4)$$

Từ (5.4) tính theo số gia được:

$$\Delta Q = \frac{1}{1-c} \Delta I \qquad (5.5)$$

Hệ số $k = \frac{1}{1-c}$, gọi là nhân tử Keynes.

Từ biểu thức trên chúng ta suy ra một số nhận xét:

i. Sự biến thiên của mức đầu tư I sẽ dẫn đến sự biến thiên của sản lượng Q nhiều gấp $\frac{1}{1-c}$ lần.

ii. Khi nền kinh tế hoạt động còn dưới mức tiềm năng thì bằng cách làm tăng đầu tư sẽ đưa đến kết quả làm tăng sản xuất và do vậy làm tăng lao động.

iii. Nếu sản lượng đã ở mức tiềm năng thì việc đầu tư chỉ làm giảm sản xuất, giảm việc làm (lao động).

iv. Tác động của đầu tư trong khuôn khổ ngắn hạn có liên quan đến việc tận dụng khả năng sản xuất hiện có.

c. Phân tích vai trò của nhà nước trong quá trình điều tiết kinh tế thị trường.

Để phân tích vai trò điều tiết vĩ mô của nhà nước đối với thị trường, người ta thông qua phân tích mô hình thu nhập quốc dân để tìm ra các giải pháp điều tiết tối ưu.

Trong mô hình, người ta sử dụng các biến kinh tế:

Y là thu nhập quốc dân.

C là tiêu dùng của dân cư.

I_0 là tích luỹ cho đầu tư sản xuất

T là thuế

G_0 là tiêu dùng của chính phủ.

Giữa các biến kinh tế, quan hệ với nhau qua hệ thức toán học sau:

$$Y = C + I_0 + G_0 \tag{5.6}$$

$$C = \alpha+\beta(Y\text{-}I) \tag{5.7}$$

$$(\alpha>0,\ 0<\beta<1)$$

$$T = \gamma + \delta Y \tag{5.8}$$

$$(\gamma>0,\ 0<\delta<1)$$

Phương trình (5.6) biểu thị tình huống cân bằng tổng cung và tổng cầu.

Tổng cung = thu nhập = Tổng cầu = Tiêu dùng dân cư + cầu cho tích luỹ cho đầu tư sản xuất + Tiêu dùng của chính phủ.

Phương trình (5.7) biểu thị quan hệ giữa tiêu dùng của dân cư với thu nhập quốc dân và thuế. Tiêu dùng dân cư tỷ lệ với hiệu số giữa thu nhập quốc dân với thuế (thu nhập khả dụng). Trong phương trình này α là tham số thể hiện phần tiêu dùng không phụ thuộc vào thu nhập (tiêu dùng tự định), β là khuynh hướng tiêu dùng biên.

Phương trình (5.8) thể hiện khoản thuế nhà nước, bao gồm thuế thu nhập (δY) và các loại thuế khác (γ). Chúng ta có thể coi δ là thuế suất của thuế thu nhập (thuế suất gộp).

Để phân tích tác động của chính sách thu – chi ngân sách nhà nước (chính sách tài khoá) đối với kết quả sản xuất (Y), trong mô hình trên Y là biến nội sinh, I_0, C,G_0 là biến ngoại sinh và tham số, ta có:

$$\overline{Y} = \frac{\alpha - \beta\gamma + I_0 + G_0}{1 - \beta + \beta\delta} \tag{5.9}$$

Sự dịch chuyển cân bằng theo các yếu tố phụ thuộc vào dấu và độ lớn của các đạo hàm riêng như sau:

$$\frac{\partial \overline{Y}}{\partial G_0} = \frac{1}{1-\beta+\beta\delta} > 0 \qquad (5.10)$$

$$\frac{\partial \overline{Y}}{\partial \gamma} = \frac{-\beta}{1-\beta+\beta\delta} < 0 \qquad (5.11)$$

$$\frac{\partial \overline{Y}}{\partial \delta} = \frac{-\beta\overline{Y}}{1-\beta+\beta\delta} < 0 \qquad (5.12)$$

Từ các bất đẳng thức trên suy ra:

i. Khi chính phủ tăng tiêu dùng G_0 (Ví dụ: tăng chi tiêu thường xuyên) thì theo (5.10), $\overline{Y}$ tăng (với điều kiện Y còn dưới mức tiềm năng).

ii. Khi chính phủ tăng thuế (tăng γ,δ) thì theo (5.11) và (5.12) thì $\overline{Y}$ giảm.

d. Nghiên cứu sự tăng trưởng của các chỉ tiêu kinh tế quan trọng.

Để hoạch định được chính sách phát triển kinh tế - xã hội, người quản lý, lãnh đạo cấp vĩ mô phải biết được sự tăng trưởng của các chỉ tiêu kinh tế quan trọng như thu nhập quốc dân Y, vốn đầu tư K, tích luỹ I, lao động L. Nhờ các mô hình tăng trưởng quan trọng sau đây, người ta sử dụng để phân tích sự tăng trưởng của các chỉ tiêu kinh tế lớn, đó là Mô hình Harrod - Dogmar, mô hình Nikaiđô, mô hình tối ưu hoá tiêu dùng, Mô hình hai khu vực... (sẽ nhắc lại ở mục sau).

5.3. CÔNG NGHỆ SẢN XUẤT VÀ HÀM SẢN XUẤT

5.3.1. Hàm sản xuất

1. Định nghĩa:

Hàm sản xuất cho một đầu ra Q, dạng: $Q = f(X_1, Y_2, \ldots X_m)$ là một mô hình chỉ ra số lượng cực đại của đầu ra có thể sản xuất được bằng việc sử dụng kết hợp các yếu tố đầu vào một cách có lựa chọn.

Ví dụ 1: Hàm sản xuất Cobb - Doaglas, mô phỏng sản xuất Nông nghiệp nước Áo từ 1951 - 1955, $Q = 2{,}439X^{0{,}0635}K^{0{,}6172}L^{0{,}3193}$

Trongđó - Q: Sản lượng sản phẩm.

- K: Vốn.
- L: Lao động
- X: là tài nguyên được khai thác.

Ví dụ 2: Hàm sản xuất mô hình tổng sản phẩm Việt Nam từ 1986 - 1995 (Theo niên giám thống kê).

$$Y = 75114\, K^{0{,}175}\, L^{0{,}904}\, e^{0{,}0124t}$$

Ví dụ 3: Hàm sản xuất dạng tuyến tính:

$$Q = \sum_{i=1}^{m} k_i X_i$$

Trong đó: - Q: Sản lượng sản phẩm.

- X_i: ($i=\overline{1,m}$) khối lượng yếu tố sản xuất thứ i.

- k_i: ($i=\overline{1,m}$) là các hằng số.

Ví dụ 4: Hàm sản xuất CES:

$$Q = \lambda[\delta K^{-\rho} + (1-\delta)L^{-\rho}]^{-\frac{1}{\rho}}$$

($\lambda>0$, $0<\delta<1$, $K^{-\rho} \neq 0$)

Trong đó: - Q: Sản lượng sản phẩm.

- K: Vốn.

- L: Lao động

- λ, ρ, δ,…: là các hằng số.

2. Tập nhu cầu các yếu tố sản xuất.

Ta gọi: $V(Q) = \{X \in R_t^n : Q = f(X)\}$ (5.13)

Trong đó X là véctơ yếu tố đầu vào, f là công nghệ sản xuất, Q là sản lượng sản phẩm, là tập nhu cầu các yếu tố sản xuất hay tập nhu cầu các đầu vào tương ứng với khối lượng sản phẩm Q.

3. Đường đồng sản lượng và tỉ lệ thay thế kỹ thuật.

a. Đường đồng sản lượng.

Cho hàm sản xuất:

$$Q = f(X_1, X_2, \ldots X_n).$$

Ta gọi tập hợp:

$V(Q_0) = \{X \in R_t^n : f(X)=Q_0\}$ là đường đồng sản lượng Q_0. (5.14)

b. Tỉ lệ thay thế kỹ thuật biên

Tỉ lệ thay thế kỹ thuật biên là tỉ lệ mà ở đó một yếu tố sản xuất X_i có thể thay thế được cho yếu tố sản xuất X_j mà vẫn giữ nguyên mức sản lượng không đổi, ký hiệu là RTS.

$$RTS = -\frac{dX_i}{dX_j} \Big| Q = Q_0 \qquad (5.15)$$

4. Năng suất biên của một yếu tố sản xuất

Xét hàm sản xuất: $Q = f(X_1, X_2, \ldots X_n)$.

Giả sử hàm Q có đạo hàm riêng theo các yếu tố sản xuất khi đó ta gọi: $\frac{\partial Q}{\partial X_i} (i = \overline{1,n})$ là năng suất biên hiện vật của đầu vào X_i, ký hiệu là MP_i hay f_i.

Ý nghĩa: Với công nghệ biểu thị bởi hàm sản xuất đã cho thì năng suất kỹ thuật biên hiện vật của yếu tố đầu vào X_i là sản lượng tăng thêm có thể được nhờ việc tăng thêm một đơn vị đầu vào X_i , trong khi các yếu tố khác vẫn cố định.

5. Quan hệ giữa RTS và f_i.

Xét hàm sản xuất: $Q= f(X_1, X_2,\dots X_n)$.

Gọi: $V(Q_0) = \{X\in R_t^n : f(X)=Q_0\}$

Khi đó ta lấy vi phân hàm f trên tập $V(Q_0)$ theo các biến X_i ta được:

$$\frac{\partial f}{\partial X_1}dX_1 + \frac{\partial f}{\partial X_2}dX_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial X_n}dX_n = 0$$

Giả sử: $\dfrac{\partial f}{\partial X_j} \neq 0$

Suy ra: $$S_{ij}(X) = \frac{\frac{\partial f}{\partial X_i}}{\frac{\partial f}{\partial X_j}} = -\frac{dX_i}{dX_i}\ , \quad (i,j=\overline{1,n}) \qquad (5.16)$$

Đại lượng S_{ij} gọi là hệ số thay thế biên của nhân tố i cho nhân tố j. Nó cho biết ở lân cận của điểm X khi tăng nhân tố i một lượng ΔX_i ta có thể giảm bớt nhân tố j một lượng là $S_{ij}.\ \Delta X_i$ mà vẫn giữ sản lượng như cũ.

5.3.2. Hàm sản xuất và bài toán cực tiểu chi phí.

Xét một doanh nghiệp có công nghệ biểu thị bằng một hàm sản xuất của n biến:

$$Q = f(X_1, X_2,\dots X_n)$$

Giả sử giá của các nhân tố sản xuất biểu thị bởi véc tơ $W= (W_1, W_2,\dots W_n)$.

Để đạt được lợi nhuận cao nhất, với mức sản lượng Q, doanh nghiệp phải đạt được cực tiểu chi phí sản xuất, nghĩa là hàm $C= \langle W,X\rangle \to \min$.

Vậy trong quá trình hoạt động, để đạt được lợi nhuận cao, doanh nghiệp phải giải bài toán cực trị sau:

$$\begin{cases} C = \langle W,X\rangle \to \min \\ f(X_1, X_2,\dots, X_n) = Q \\ X \geq 0 \end{cases} \qquad (5.17)$$

Lời giải của bài toán (6.19) suy từ cực trị của hàm Lagrange:

$L = \langle W,X\rangle + \lambda[f(X) - Q]$. Với điều kiện:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial X_i} = W_i - \lambda\dfrac{\partial f}{\partial X_i} = 0, (i = \overline{1,n}) & (a) \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = f(X) - Q = 0 & (b) \end{cases}$$

Gọi X* là nghiệm của hệ (a) và (b), ta có:

$W = \lambda \text{gra}\partial\ f(X^*)$

Từ (a) suy ra:

$$\frac{Wi}{Wj} = \frac{\dfrac{\partial f(X^*)}{\partial X_i}}{\dfrac{\partial f(X^*)}{\partial X_j}}, (i, j = \overline{1, n}) \qquad (5.18)$$

Số hạng $\dfrac{\dfrac{\partial f(X^*)}{\partial X_i}}{\dfrac{\partial f(X^*)}{\partial X_j}}$, biểu thị tỷ lệ thay thế kỹ thuật, tại đó nhân tố j có thể thay thế được cho nhân tố i mà vẫn duy trì được mức sản lượng Q không đổi.

Số hạng: $\dfrac{W_i}{W_j}$ biểu thị tỉ lệ thay thế kinh tế.

Như vậy, với một véc tơ giá W và sản lượng đã cho Q, chúng ta có thể chọn được X* nào đó làm cực tiểu chi phí sản xuất để sản xuất được sản lượng Q cho trước. Như vậy giữa X* và (W,Q) có một quan hệ hàm số, ta gọi hàm số đó là hàm cầu có điều kiện của các nhân tố sản xuất, ký hiệu là X = Φ(W,Q), hàm này phụ thuộc vào giá đầu vào W và mức sản lượng Q.

5.3.3. Hệ số co dãn thay thế:

Hệ số co dãn thay thế giữa hai yếu tố sản xuất X_i và X_j, ký hiệu δ, được cho như sau:

$$\delta = \frac{\dfrac{d\left(\dfrac{X_i^*}{X_j^*}\right)}{\dfrac{X_i^*}{X_j^*}}}{\dfrac{d\left(\dfrac{W_j}{W_i}\right)}{\dfrac{W_j}{W_i}}} = \frac{\dfrac{d\left(\dfrac{X_i^*}{X_j^*}\right)}{d\left(\dfrac{W_j}{W_i}\right)}}{\dfrac{\dfrac{X_i^*}{X_j^*}}{\dfrac{W_j}{W_i}}} \qquad (5.19)$$

Trong đó: $\delta \in [0,+\infty)$.

Nhận xét:

1. Hệ số co dãn thay thế δ càng lớn thì khả năng thay thế giá hai đầu vào càng lớn. Do đó δ đặc trưng cho khả năng thay thế giữa hai yếu tố sản xuất phụ thuộc vào sự thay đổi của tỷ giá $\dfrac{Wi}{Wj}$ đối với các yếu tố sản xuất có chi phí nhỏ nhất: $\dfrac{X_i^*}{X_j^*}$.

2. δ → 0 là trường hợp hai yếu tố sản xuất khó thay thế cho nhau, nó phải được sử dụng theo một tỷ lệ cố định như là các đầu vào bổ sung cho nhau.

3. $\delta \to \infty$ Khả năng thay thế giữa hai nhân tố sản xuất rất lớn khi đó hai đầu vào thay thế hoàn toàn cho nhau.

Chú ý: $\dfrac{X_i^*}{X_j^*}$ có thể coi là hàm của $\dfrac{W_j}{W_i}$.

<u>Ví dụ</u>: Cho hàm sản xuất Cobb – Douglas.

$$Q = f(K,L) = A\,K^{\alpha} L^{\beta}$$

Hãy tính hệ số co dãn thay thế của hàm trên.

<u>*Giải*</u>. Theo công thức:

$$\delta = \frac{\dfrac{d(\frac{\overline{K}}{\overline{L}})}{\frac{\overline{K}}{\overline{L}}}}{\dfrac{d(\frac{W_L}{W_K})}{\frac{W_L}{W_K}}} = \frac{\dfrac{d(\frac{\overline{K}}{\overline{L}})}{d(\frac{W_L}{W_K})}}{\dfrac{\frac{\overline{K}}{\overline{L}}}{\frac{W_L}{W_K}}}$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Ta có ngay:} & \dfrac{d(\frac{\overline{K}}{\overline{L}})}{d(\frac{W_L}{W_K})} = \dfrac{\alpha}{\beta} \\ \text{Còn:} & \dfrac{\frac{\overline{K}}{\overline{L}}}{\frac{W_L}{W_K}} = \dfrac{\alpha}{\rho} \end{array}\right\} \Rightarrow \delta = 1$$

Vậy: Đối với hàm sản xuất Cobb – Douglas, hệ số co dãn thay thế giá hai yếu tố đầu vào là $\delta = 1$ (Hệ số co dãn thay thế không đổi).

5.3.4. Quan hệ giữa năng suất trung bình và năng suất biên của một yếu tố sản xuất.

Cho hàm sản xuất $Q = f(X_1, X_2,\ldots X_n)$. Ta gọi năng xuất trung bình theo một yếu tố sản xuất i là tỷ số $\dfrac{Q}{X_i}$, $(i = \overline{1,n})$. Giả sử hàm $\dfrac{Q}{X_i}$, $(i = \overline{1,n})$ có cực đại tại X_i^*.

Giả sử hàm $Q = f(X_1,\ldots X_n)$ khả vi theo các biến X_i $(i = \overline{1,n})$. Tại điểm cực đại X_i^* ta có:

$$\left[\frac{Q}{X_i}\right]'_{X_i = X_i^*} = \left[\frac{f(X)}{X_i}\right]'_{X_i = X_i^*} = \frac{X_i f'_{X_i}(X) - f(X)}{X_i^2} = 0$$

Vì $X_i^2 \neq 0 \rightarrow f'_{X_i}(X) = \dfrac{f(X)}{X_i} = \dfrac{Q}{X_i}, (i = \overline{1,n}) \Rightarrow \left.\dfrac{\partial f}{\partial X_i}\right|_{X_i^*} = \dfrac{Q}{X_i^*}$

Vậy: Tại giá trị X_i* mà năng suất trung bình của yếu tố sản xuất đạt cực đại thì năng suất trung bình bằng năng suất biên.

5.3.5. Hiệu quả theo qui mô.

Cho hàm sản xuất của m yếu tố:

$$Q = f(X_1, X_2, \ldots X_m)$$

Nếu ta nhân tất cả các yếu tố đầu vào với cùng một số hạng t (t>1) thì ta nói quá trình sản xuất được tăng qui mô.

Khi đó:

a. Nếu $f(tX_1, tX_2, \ldots tX_m) = t.f(X_1, X_2, \ldots, X_m)$ thì ta nói tăng qui mô sản xuất không tăng hiệu quả.

b. Nếu $f(tX_1, tX_2, \ldots tX_m) < t.f(X_1, X_2, \ldots X_m)$ thì ta nói tăng qui mô sản xuất nhưng hiệu quả giảm.

c. Nếu $f(tX_1, tX_2, \ldots tX_m) > t.f(X_1, X_2, \ldots X_m)$ thì ta nói tăng qui mô sản xuất làm tăng hiệu quả.

<u>Ví dụ:</u> Xét hàm sản xuất $Q = 2X_1 + 3X_2 = f(X_1, X_2)$

Thế thì: $f(tX_1, tX_2) = 2(tX_1) + 3(tX_2) = t[2X_1 + 3X_2] = tf(X_1, X_2)$.

Vậy quá trình sản xuất trên thuộc dạng tăng qui mô nhưng không làm tăng hiệu quả.

5.3.6. Hệ số co dãn theo qui mô:

Xét hàm sản xuất Q = f(X).

Ta gọi giá trị:

$E(X) = \left.\dfrac{df(X)}{dt} \times \dfrac{t}{f(X)}\right|_{t=1}$ là hệ số co dãn theo qui mô ở X, với t=1.

Hệ số co dãn theo qui mô E(X) là số đo phần trăm tăng lên của sản lượng Q nhờ một phần trăm của qui mô sản xuất.

Khi đó nếu:

a. E(X) > 1 thì ta nói công nghệ đã cho là tăng qui mô.

b. E(X) = 1 thì ta nói công nghệ đã cho có qui mô không đổi.

E(X) < 1 thì công nghệ đã cho có qui mô giảm.

Chú ý: Việc xây dựng hệ số co dãn theo qui mô như trên chỉ có tính chất "địa phương" theo nghĩa là đo việc tăng qui mô tại X (với t=1).

5.3.7. Tiến bộ kỹ thuật.

1. Khái niệm về tiến bộ kỹ thuật:

Giả sử hệ thống doanh nghiệp có công nghệ sản xuất biểu thị bởi hàm sản xuất y = f(x) trong đó $y \in R^n$, $x \in R^n$. Khi đó ta định nghĩa:

Hệ số $a_{ij} = \frac{X_i}{Y_i}$ là hệ số kỹ thuật của quá trình sản xuất, trong đó yếu tố xản xuất i cần có để sản xuất ra một đơn vị sản phẩm loại j.

Giả sử ta có công nghệ sản xuất biểu thị dưới dạng hàm sản xuất:

$$Q = A(t).f(K,L) \qquad (5.20)$$

Trong (5.20) hàm A(t) biểu thị tất cả các ảnh hưởng đối với Q ngoài hai yếu tố vốn và sức lao động. A(t) là hàm của thời gian t, nó biểu thị tiến bộ kỹ thuật. Do đó người ta giả thiết $\frac{dA(t)}{dt} > 0$.

Vi phân (5.20) theo t ta có:

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{dA(t)}{dt}.f(K,L) + A(t)\frac{df(K,L)}{dt} = \frac{dA(t)}{dt}.\frac{Q}{A(t)} + \frac{Q}{f(K,L)}\left[\frac{\partial f}{\partial f}.\frac{dK}{dt} + \frac{\partial f}{\partial L}.\frac{dL}{dt}\right]$$

Chia cả hai vế cho Q ta được:

$$\frac{dQ}{Qdt} = \frac{dA}{Adt} + \frac{\partial f}{f(K,L)\partial K}.\frac{dK}{dt} + \frac{\partial f}{f(K,L)\partial L}.\frac{dL}{dt}$$

$$= \frac{dA}{Adt} + \frac{\partial f}{\partial K}.\frac{K}{f(K,L)}.\frac{dK}{Kdt} + \frac{\partial f}{\partial L}.\frac{L}{f(K,L)}.\frac{dL}{Ldt} \qquad (5.21)$$

Đặt $\frac{dQ}{Qdt} = G_Q$: tốc độ tăng trưởng của Q theo theo thời gian, hay còn gọi nhịp tăng của Q theo thời gian.

$\frac{dA}{Adt} = G_A$: Tốc độ tăng trưởng của A theo thời gian hay là nhịp tăng của A theo thời gian.

$\frac{dK}{Kdt} = G_K$: Nhịp tăng của vốn theo thời gian hay là tốc độ tăng trưởng của vốn theo thời gian.

$\frac{dL}{Ldt} = G_L$: Tốc độ tăng trưởng của lao động theo thời gian hay còn gọi là nhịp tăng của lao động theo thời gian.

Với các ký hiệu trên, phương trình (2.2) còn có thể viết:

$$G_Q = G_A + \frac{\partial f}{\partial K} \times \frac{K}{f(K,L)} \times G_K + \frac{\partial f}{\partial L} \times \frac{L}{f(K.L)} \times G_L \qquad (2.22)$$

Mặt khác ta có:

$\frac{\partial f}{\partial K} \times \frac{K}{f(K,L)} = \frac{\partial Q}{\partial K} \times \frac{K}{Q}$ là hệ số co dãn của sản lượng Q theo vốn - E(Q,K).

$\frac{\partial f}{\partial L} \times \frac{L}{f(K,L)} = \frac{\partial Q}{\partial L} \times \frac{L}{Q}$ là hệ số co dãn của sản lượng Q theo lào động - E(QL).

Vậy (5.22) có thể viết gọn lại:

$$G_Q = G_A + E(QK).G_K + E(QL).G_L$$

(5.23)

Vậy nhịp tăng của sản lượng được biễn diễn qua ba thành phần G_A, G_K, G_L. Từ đó suy ra: Nhịp tăng của sản lượng Q do:

- Phần đóng góp của vốn.
- Phần của lao động.
- Phần của tiến bộ kỹ thuật.

Solow đã tính được các G_Q, G_A, G_K, G_L cho nền kinh tế Mỹ theo số liệu 1909 – 1949 như sau:

- $G_Q = 2,75$ %/1năm.
- $G_L = 1,00$ %/1năm.
- $G_K = 1,75$ %/1năm
- $E_{QL} = 0,65$
- $E_{QK} = 0,35$

Và $G_A = E_Q – E(QL)G_L – E(QK).G_K$

$= 2,75 – 0,65(1,00) – 0,35(1,75)$

$= 2,75 – 0,65 – 0,6 = 1,50.$

Vậy nhịp tăng của tiến bộ kỹ thuật theo thời gian là 1,5. Tiến bộ kỹ thuật đã đạt tốc độ 1,5%/năm từ 1909 – 1949. Từ đó thấy rằng quá một nửa số tăng của sản lượng là do đóng góp của tiến bộ kỹ thuật.

2. Phân loại tiến bộ kỹ thuật:

Có thể phân loại tiến bộ kỹ thuật thành ba loại:

a. Tiến bộ kỹ thuật trung tính:

Nền sản xuất đạt tiến bộ kỹ thuật trung tính là công nghệ sản xuất có hàm sản xuất:

$$Q = A(t)\, f(K,L)$$

Trong đó tiến bộ kỹ thuật ảnh hưởng đến tất cả các đầu vào là như nhau.

b. Tiến bộ kỹ thuật ảnh hưởng đến vốn:

Là công nghệ sản xuất có hàm sản xuất:

$$Q = f[A(t)\, K,L]$$

Trường hợp này, tiến bộ kỹ thuật chỉ ảnh hưởng đế vốn. Giờ làm việc của máy trở nên có năng suất hơn theo thời gian.

c. Tiến bộ kỹ thuật ảnh hưởng đến lao động:

Là công nghệ sản xuất có hàm sản xuất:

$$Q = f[K, A(t)\, L]$$

Trường hợp này tiến bộ kỹ thuật chỉ ảnh hưởng đến chất lượng của những giờ lao động trong hàm sản xuất. Năng suất lao động được tăng lên theo thời gian là do người công nhân học được cách làm việc tốt hơn.

5.3.8. Một số hàm sản xuất đặc biệt:

1. Hàm thuần nhất bậc 1.

Định nghĩa 1: Hàm sản xuất Q = f(X) = f(X_1, X_2,…, X_n) được gọi là hàm sản xuất thuần nhất bậc r nếu khi nhân mỗi biến X_i ($i=\overline{1,n}$) với cùng một hằng số t (t>0) thì hàm sản xuất cũng được nhân thêm một lượng t^r, nghĩa là:

$$f(tX_1, tX_2,\dots tX_m) = t^r (f(X_1, X_2,\dots, X_m) \qquad (5.24)$$

Định nghĩa 2: Hàm sản xuất Q = f(X) = f(X_1, X_2,…, X_n) được gọi là hàm sản xuất thuần nhất bậc λ nếu khi nhân mỗi một biến X_i cùng một hằng số t (t > 0) thì ta có:

$$f(tX_1, tX_2,\dots tX_n) = t^{\lambda} f(X_1,\dots, X_n)$$

Ví dụ:

1. Hàm sản xuất Q= f(K,L) = $a_1K + a_2L$ là hàm sản xuất thuần nhất bậc 1 vì:

$$F(tK, tL) = t[a_1K+ a_2L) = tf(K,L).$$

2. Hàm sản xuất Q= f(K,L) = $A.K^{\alpha}.L^{\beta}$ là hàm sản xuất thuần nhất bậc α+β vì:

$$f(tK, tL) = A(tK)^{\alpha}. (tL)^{\beta} = t^{\alpha+\beta}. \underbrace{AK^{\alpha}L^{\beta}}_{f(K,L)} = t^{\alpha+\beta}.f(K,L)$$

Nếu α+β = 1 thì hàm f(K,L) trên là hàm sản xuất thuần nhất bậc 1.

a. Định lý Eule (về sự phân chia sản phẩm giữa các yếu tố sản xuất).

Nếu Q = f(X) = f(X_1,X_2,…, X_n) là hàm sản xuất khả vi, thuần nhất bậc 1 thì ta luôn luôn có:

$$f(X) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f(X)}{\partial X_i}.X_i \qquad (5.25)$$

Chứng minh:

Vì f(X) là thuần nhất bậc 1 nên ∀t > 0 ta đều có f(tX) = t.f(X) (5.26)

Vì f(X) khả vi nên ta vi phân đồng nhất thức (5.26) theo t ta được:

$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(tX)}{\partial (t_iX_i)} X_i = f(X)$ đúng ∀t > 0 nên khi cho t =1 ta có:

$$f(X) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(X)}{\partial X_i} X_i = f(X)$$

Nhận xét: Ta đã biết $\frac{\partial f(X)}{\partial X_i}$ là năng suất biên của yếu tố sản xuất i, nên nếu tăng một đơn vị của yếu tố i một lượng là $\frac{\partial f(X)}{\partial X_i}$ thì sản lượng f(X) có phần của yếu tố i là:

$$\frac{\partial f(X)}{\partial X_i}.X_i \qquad (i=\overline{1,n})$$

b. Định lý 2: (Về tính thuần nhất bậc không của năng suất biên)

Nếu Q = f(X) = f($X_1, X_2 \ldots, X_n$) là hàm sản xuất khả vi, thuần nhất bậc 1 thì $\dfrac{\partial f(X)}{\partial X_i}$, ($i=\overline{1,n}$) là hàm thuần nhất bậc 0.

<u>Chứng minh</u>:

Theo giả thiết ta có: f(tX) = t.f(X), (a)

Vi phân đồng nhất thức (a) theo X_i ta có:

$$\frac{\partial f(tX)}{\partial(tX_i)}t = t\frac{\partial f(X)}{\partial X_i} \qquad (i=\overline{1,n}) \text{ hay:}$$

$$\frac{\partial f(tX)}{\partial(tX_i)} = \frac{\partial f(X)}{\partial X_i} \qquad (i=\overline{1,n}) \qquad (t^0 = 1) \rightarrow \text{(đfcm).}$$

<u>Ví dụ:</u> 1. Xét công nghệ sản xuất biểu thị bằng hàm sản xuất tuyến tính: f(K,L) = 2K + 3L

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial K} = 2; \ \frac{\partial f}{\partial L} = 3; \ \text{Vậy: } \frac{\partial f}{\partial K}K + \frac{\partial f}{\partial L}L = 2K + 3L$$

Vậy hàm thuần nhất bậc 1 và rõ ràng: $\dfrac{\partial f}{\partial K}$ và $\dfrac{\partial f}{\partial L}$ là thuần nhất bậc 0.

2. Xét công nghệ biểu thị bởi hàm sản xuất.

F(K,L) = 4 $K^{1/4}.L^{3/4}$. Ta có: f(tK,tL) = $4t^{1/4}K^{1/4}t^{3/4}L^{3/4} = t.4K^{1/4}L^{3/4}$.

Vậy f(K,L) là hàm thuần nhất bậc 1.

Hàm f(K,L) = $4K^{1/4}.L^{3/4}$ khả vi theo các biến K,L nên $\dfrac{\partial f}{\partial K}$ và $\dfrac{\partial f}{\partial L}$ là hàm thuần nhất bậc 0.

Thật vậy: $\dfrac{\partial f}{\partial K} = K^{-3/4}.L^{3/4} = \left(\dfrac{L}{K}\right)^{3/4}$

$\dfrac{\partial f}{\partial L} = 3\,K^{1/4}.L^{-1/4} = 3\left(\dfrac{K}{L}\right)^{1/4}$

Vậy: $\dfrac{\partial f}{\partial K}.K + \dfrac{\partial f}{\partial L}.L = K^{-3/4}.L^{3/4}.K + 3.\,K^{1/4}.L^{-1/4}.L$

$= K^{1/4}.L^{3/4} + 3\,K^{1/4}.L^{3/4} = 4\,K^{1/4}.L^{3/4}$

Mặt khác: $\dfrac{\partial f}{\partial K} = K^{-3/4}.L^{3/4} = \left(\dfrac{L}{K}\right)^{3/4}$

$\dfrac{\partial f}{\partial L} = 3\,K^{1/4}.L^{-1/4} = 3\left(\dfrac{K}{L}\right)^{1/4}$

$\Rightarrow$ Hàm $\dfrac{\partial f}{\partial K}$ và $\dfrac{\partial f}{\partial L}$ là hàm thuần nhất bậc 0.

2. Hàm sản xuất dạng tuyến tính.

a. Định nghĩa:

Hàm sản xuất dạng tuyến tính là hàm sản xuất có dạng:

$$Q = f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \qquad (5.27)$$

Ví dụ hàm sản xuất của hai yếu tố K,L: Q = 2K + 3L là sản xuất tuyến tính.

b. Các tính chất:

b_1. Hàm sản xuất dạng (5.27) là hàm sản xuất thuần nhất bậc 1.

Vì: $f(tX) = \sum_{i=1}^{n} a_i (tX_i) = t\sum_{i=1}^{n} a_i X_i = tf(X); (\forall t)$

Vậy hàm sản xuất tuyến tính có tất cả các tính chất của hàm sản xuất tổng quát mà ta đã nghiên cứu ở trên.

b_2. Tỉ lệ thay thế kỹ thuật giữa hai yếu tố X_i và X_j

$$Q = a_1X_1 + \ldots + a_iX_i + \ldots a_iX_j + \ldots a_nX_n$$

Theo (5.15) thì RTS (X_i cho X_j) $= -\left.\dfrac{dX_i}{dX_j}\right|_{Q=Q_0} = -\dfrac{a_i}{a_j}$

Ta thấy để cho sản lượng $Q = Q_0$ không đổi, thì thêm một đơn vị vào yếu tố sản xuất i ta sẽ bớt đi được $\dfrac{a_i}{a_j}$ đơn vị yếu tố sản xuất j vì:

$$Q = Q_0 = a_1X_1 + a_2X_2 + \ldots + a_i(X_i + 1) + \ldots + a_j\left(x_j - \frac{a_i}{a_j}\right) + \ldots + a_nx_n$$

Ví dụ: Cho hàm sản xuất: $Q = 3X_1 + 2X_2 + 3X_3 + X_4$

Xét sự thay thế giữa hai giữa tố X_2 và X_3

Tăng yếu tố X_2 lên một đơn vị thì có thể giảm được ở yếu tố X_3 đi $\frac{2}{3}$ đơn vị.

Vậy tỉ lệ thay thế kỹ thuật giữa hai yếu tố X_2 và X_3 là $-\dfrac{2}{3}$

b_3 . Hệ số co dãn theo các yếu tố sản xuất của hàm tuyến tính.

Hệ số co dãn theo yếu tố sản xuất i là:

$$EX_i = \frac{\partial f}{\partial X_i}.\frac{X_i}{f} \text{ vì } f(X) = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i \rightarrow \frac{\partial f}{\partial X_i} = a_i$$

Vậy $$E(X_i) = a_i.\frac{X_i}{f(x)} = \frac{a_i X_i}{\sum_{i=1}^{n} a_i X_i} \quad (\forall i = \overline{1, n})$$

Ví dụ: Tính hệ số co dãn của hàm sản xuất.

$f(x) = 2X_1 + 3X_2 + X_3$

theo biến X_2 tại $X_1 = X_2 = X_3 = 1$?

Giải: ta có $\dfrac{\partial f}{\partial X_2} = 3$. Do đó:

$$E(X_2) = \frac{3X_2}{2X_1 + 3X_2 + X_2}\Bigg|_{X_1=1, X_2=1, X_3=1} = \frac{1}{2}$$

3. Hàm sản xuất dạng Cobb-Douglas:

a. *Định nghĩa:* Hàm sản xuất dạng Cobb-Douglass là hàm sản xuất có dạng:

$$f(X) = A\prod_{i=1}^{m} X_i^{\alpha_i} \quad (\alpha_i > 0, \forall i = \overline{1, m}) \qquad (5.28)$$

Ví dụ: Hàm sản xuất f(K,L) = 0,3. $K^{1/3}.L^{2/3}$

b. *Các tính chất của hàm Cobb-Douglas:*

b₁. Hàm sản xuất dạng Cobb-Douglas là hàm thuần nhất bậc $\sum_{i=1}^{m}\alpha_i$.

Thật vậy vì: $f(tX) = \prod_{i=1}^{m}(tX_i)^{\alpha_i} = t^{\sum_{i=1}^{m}\alpha_i}.\underbrace{A.\prod_{i=1}^{m}X_i}_{f(X)}$. Suy ra f(X) là thuần nhất bậc $\sum_{i=1}^{m}\alpha_i$.

Nếu $\sum_{i=1}^{m}\alpha_i$ =1 thì f(X) là hàm thuần nhất bậc 1.

b_2. Hàm (5.28) là hàm hiệu quả theo qui mô, theo nghĩa:

- Nếu $\sum_{i=1}^{m}\alpha_1$ > 1 thì tăng qui mô sẽ tăng hiệu quả.
- Nếu $\sum_{i=1}^{m}\alpha_i$ =1 thì tăng qui mô không tăng hiệu quả.
- Nếu $\sum_{i=1}^{m}\alpha_i$ < 1 tăng qui mô làm giảm hiệu quả.

b_3. Tỉ lệ thay thế kỹ thuật giữa hai yếu tố sản xuất i và j

Theo (5.16) ta có $S_{ij}(X) = \dfrac{\partial f/\partial X_i}{\partial f/\partial X_j} = -\dfrac{dX_j}{dX_i}$

Mặt khác: $\dfrac{\partial f}{\partial X_i} = \alpha_1.X_i^{\alpha_{i-1}}A.\prod_{K\neq i}X_K^{\alpha_K}$; $\qquad \dfrac{\partial f}{\partial X_j} = \alpha_j.X_j^{\alpha_{j-1}}A.\prod_{K\neq j}X_K^{\alpha_K}$

Vậy: $\dfrac{\partial f/\partial X_i}{\partial f/\partial X_j} = \dfrac{\alpha_i}{\alpha_j}\dfrac{X_i^{\alpha_{j-1}}.X_j^{\alpha_j}}{X_j^{\alpha_{j-1}}.X_j^{\alpha_i}} = \dfrac{\alpha_i}{\alpha_j}(\dfrac{X_j}{X_i})$

b_4. Hệ số co dãn theo các yếu tố sản xuất i.

$$E_{X_i} = \frac{\partial f}{\partial X_i}.\frac{X_i}{f} = \frac{\alpha_i.X_i^{\alpha_{i-1}}.A\prod_{K\neq i} X_K^{\alpha_K}}{A\prod_{k=1}^{m} X_K^{\alpha_K}} = \frac{\alpha X_i^{\alpha_i - 1}}{X_i^{\varepsilon_i}} = \frac{\alpha_i}{X_i}.X_i = X_i$$

4. Hàm sản xuất CES:

a. ***Định nghĩa:*** Hàm sản xuất CES của hai biến vốn (K) và sức lao động (L) là hàm sản xuất dạng:

$Q = A[\delta k^{-\rho} + (1-\delta)L^{-\rho}]^{-1/\rho}$ (5.29)

Trong đó các hằng số A > 0, 0 < δ < 1, 0 ≠ ρ > -1

b. Các tính chất của hàm CES:

<u>b$_1$. Hàm sản xuất CES là hàm sản xuất thuần nhất bậc 1.</u>

Thật vậy:

$Q(tK,tL) = A[\delta(tK)^{-\rho} + (1-\delta)(tL)^{-\rho}]^{-1/\delta}$

$=A[\delta K^{-\rho}+ (1-\delta)L^{-\rho}]^{-1/\rho} (t^{-\rho})^{-1/\rho} = t.A[\delta K^{-\rho}+ (1-\delta)L^{-\rho}]^{-1/\rho}= tQ(K,L).$

<u>b$_2$. Hàm sản xuất CES có hệ số co dãn thay thế không đổi:</u>

Thật vậy, từ: $\frac{W_K}{W_L} = \frac{\partial Q/\partial K}{\partial Q/\partial L}$ nên ta có: $\frac{1-\delta}{\delta}(\frac{K}{L})^{1-\rho} = \frac{W_K}{W_L}$ → tỉ lệ đầu vào tối ưu là: $(\frac{\overline{K}}{L}) = (\frac{\delta}{1-\delta})^{1/1-\rho}(\frac{W_K}{W_L})^{1/1-\rho} = C(\frac{W_K}{W_L})^{1/1+\rho}$ (*)

Xem $\frac{\overline{K}}{\overline{L}}$ là hàm của: $\frac{W_L}{W_K}$ vi phân hai vế ta có:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\frac{\overline{K}}{\overline{L}}}{d\frac{W_L}{W_K}} = \frac{C}{1+\rho}\left(\frac{W_L}{W_K}\right)^{\left[\frac{1}{1+\rho}\right]-1} \\ &\text{Từ (*)} \rightarrow \frac{\frac{\overline{K}}{\overline{L}}}{\frac{W_L}{W_K}} = C\left(\frac{W_L}{W_K}\right)^{\left[\frac{-1}{1+\rho}\right]-1} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \sigma = \frac{\dfrac{d(\frac{\overline{K}}{\overline{L}})}{d(\frac{W_L}{W_K})}}{\dfrac{\frac{\overline{K}}{\overline{L}}}{\frac{W_L}{W_K}}} = \frac{1}{1+\rho}$$

Vậy: $\sigma = \frac{1}{1+\rho}$

Từ đó suy ra rằng: δ là hằng số và phụ thuộc vào ρ:

Ta xét:

$$\begin{cases} -1 < \rho < 0 \\ \rho = 0 \\ 0 < \rho < \infty \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \sigma > 1 \\ \sigma = 1 \\ \sigma < 1 \end{cases}$$

5. Quan hệ giữa hàm sản xuất Cobb – Douglass và hàm sản xuất CES

Theo kết quả ở trên thì khi $\rho = 0$ thì hệ số co giãn thay thế của hàm CES là $\sigma = 1$. Nhưng $\sigma = 1$ lại là đặc trưng của hàm Cobb- Douglas.

Vậy hàm Cobb-Douglas là trường hợp riêng của hàm CES khi $\sigma = 1$. Hàm CES theo định nghĩa không xác định khi $\rho = 0$.

Nhưng khi $\rho \to 0$ thì hàm CES tiến đến hàm Cobb-Douglas.

Thật vậy vì: $Q = A\,[\delta K^{-\rho} + (1 - \delta)\,L^{-\rho}]^{-1/\rho}$

Chia 2 vế cho A, ($A \neq 0$) được:

$$\frac{Q}{A} = [\delta K^{-\rho} + (1 - \delta)\,L^{-\rho}]^{-1/\rho}$$

Lấy ln cả hai vế ta có: $$\ln\frac{Q}{A} = -\frac{\ln\left[\delta K^{-\rho} + (1-\delta)L^{-\rho}\right]}{\rho} \quad (*)$$

Ta thấy khi $\rho \to 0$ thì $\ln\left[\delta K^{-\rho} + (1-\delta)L^{-\rho}\right] \to 0$

Vậy $\ln\frac{Q}{A} = \frac{0}{0}$. Áp dụng quy tắc Lopital để tính giới hạn: $\lim\limits_{\rho\to 0}\ln\frac{Q}{A}$.

Đặt $M(\rho)$ tử của vế phải (*), $N(\rho)$ mẫu số ở vế phải (*) ta được:

$$M'(\rho) = \frac{-1}{\left[\delta K^{-\rho} + (1-\delta)L^{-\rho}\right]}\cdot\frac{d}{d\rho}\left[\delta K^{-\rho} + (1-\delta)L^{-\rho}\right]$$

$$= \frac{-\left[-\delta K^{-\delta}\ln K - (1-\delta)L^{-\rho}\ln L\right]}{\left[\delta K^{-\rho} + (1-\delta)L^{-\rho}\right]}$$

còn $N'(\rho)=1$

Vậy: $$\lim_{\rho\to 0}\ln\frac{Q}{A} = \lim_{\to 0}\frac{M'(\rho)}{N'(\rho)} = \lim_{\rho\to 0}\frac{\left[\delta K^{-\rho}\ln + (1-\delta)L^{-\rho}\ln L\right]}{[\delta K^{-\rho} + (1-\delta)L^{-\rho}]}$$

$$= \delta\ln K + (1-\delta)\ln L = \ln(K^{\delta}L^{1-\delta})$$

Mặt khác vì $$\frac{Q}{A} = e^{\ln\frac{Q}{A}} \Rightarrow Q = A.e^{\ln\frac{Q}{A}}$$

Vậy $$\lim_{\rho\to 0} Q = \lim_{\rho\to 0} A.e^{\ln\frac{Q}{A}} = A.e^{\lim\limits_{\rho\to 0}\ln\frac{Q}{A}} = A.e^{\ln k^{\delta}L^{1-\delta}} = A.K^{\delta}L^{1-\delta}$$

Hay: $\lim\limits_{\rho\to 0} Q = A.K^{\delta}.\,L^{1-\delta}$, suy ra điều phải chứng minh.

5.4 HÀM CHI PHÍ:

5.4.1 Khái niệm.

Giả sử một doanh nghiệp có công nghệ sản xuất được biểu thị qua hàm sản xuất:

$$Q = f(X),\ X \in R^m \qquad (5.30)$$

Khi cho một véc tơ giá đầu vào $W = (W_1 W_2 \ldots W_m)$ ứng với một phương án sản xuất X thì chi phí sẽ là:

$$\langle W,X\rangle = \sum_{i=1}^{m} W_i X_i \qquad (5.31)$$

Vì mục tiêu của doanh nghiệp là cực đại lợi nhuận nên khi với mức yêu cầu sản lượng Q cho trước, thì phải tìm một véc tơ đầu vào X sao cho sản xuất được một lượng sản phẩm là Q mà chi phí bé nhất. Nghĩa là ta phải tìm lời giải của bài toán qui hoạch sau:

$$\begin{cases} \langle W, X\rangle \to \min \\ f(X) = Q \\ X \geq 0 \end{cases} \qquad (5.32)$$

Trong (6.32) hàm f(X) là hàm sản xuất khả vi theo các biến X_i ($i=\overline{1,m}$).

Lời giải của bài toán (6.33) phụ thuộc vào khối lượng sản phẩm cầu Q và giá các yếu tố sản xuất $W = (W_1 \ldots W_m)$

Do đó hàm chi phí của công nghệ sản xuất cho ở trên sẽ là hàm của Q và W:

$$C = C(W,Q) \qquad (5.33)$$

Ta phải tìm dạng hàm cụ thể ứng với từng công nghệ sản xuất đã biết.

5.4.2 Phương pháp xây dựng hàm chi phí từ hàm sản xuất:

Để tiện theo dõi, ta xây dựng hàm chi phí từ hàm sản xuất CES dạng đặc biệt.

Giả sử công nghệ sản xuất biểu hiện bởi hàm sản xuất CES dạng đặc biệt:

$$Q^p = X_1^p + X_2^p$$

Với giá của đầu vào là W_1 và W_2. Ta tìm dạng hàm chi phí của công nghệ sản xuất này.

Bước 1. Xây dựng bài toán cực tiểu chi phí với các điều kiện cho ở trên:

$$\begin{cases} \langle W, X\rangle = W_1X_1 + W_2X_2 \to \min \\ X_1^p + X_2^p = Q^p \\ X_1 \geq 0, X_2 \geq 0 \end{cases} \qquad (5.34)$$

Bước 2. Lập hàm Lagrange tương ứng với bài toán (5.34):

$$L = W_1X_1 + W_2X_2 + \lambda(X_1^p + X_2^p) - Q^p)$$

Lập hệ điều kiện điều kiện:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial X_1} = W_1 + \lambda P.X_1^{p-1} = 0 & (a) \\ \dfrac{\partial L}{\partial X_2} = W_2 + \lambda P.X_2^{p-1} = 0 & (b) \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = X_1^p + X_1^p - Q^p = 0 & (c) \end{cases}$$

Từ hai điều kiện đầu suy ra:

$$\frac{W_1}{W_2} = \frac{X_1^{p-1}}{X_2^{p-1}} \Rightarrow \frac{W_1X_1}{W_2X_2} = \frac{X_1^p}{X_2^p} \Rightarrow \frac{\overbrace{W_1X_1 + W_2X_2}^{<W,X>}}{W_2X_2} = \frac{X_1^p + X_2^p}{X_2^p} = \frac{Q^p}{X_2^p}$$

Giải theo x_2 ta có:

$$\Rightarrow \frac{C(W,Q)}{W_2X_2} = \frac{Q^p}{X_2^p} \Rightarrow X_2^{p-1} = \frac{Q^pW_2}{C(W,Q)}$$

$$\Rightarrow X_2 = Q^{\frac{P}{P-1}}.W_2^{\frac{1}{p-1}}.[C(W,Q)]^{\frac{-1}{p-1}}$$

Do tính chất đối xứng của X_1 và X_2 ta suy ra:

$$X_1 = Q^{\frac{1}{p-1}}W_1^{\frac{1}{p-1}}.[C(W,Q)]^{\frac{-1}{p-1}}$$

$$\Rightarrow W_1X_1 = Q^{\frac{p}{p-1}}.W_1^{\frac{1}{p-1}+1}.[C(C,Q)]^{\frac{-1}{p-1}}$$

$$\Rightarrow W_2X_2 = Q^{\frac{p}{p-1}}.W_2^{\frac{1}{p-1}+1}[C(W,Q)]^{-\frac{1}{p-1}}$$

Vậy $C(W,Q) = W_1X_1 + W_2X_2 = Q^{\frac{1}{p-1}}.[C(W,Q)]^{\frac{-1}{p-1}}[W_1^{\frac{p}{p-1}} + W_2^{\frac{p}{p-1}}]$

$$\Rightarrow C(W,Q)^{1+\frac{1}{p-1}} = Q^{\frac{p}{p-1}}[W_1^{\frac{p}{p-1}} + W_2^{\frac{p}{p-2}}]$$

$$\Rightarrow C(W,Q)^{\frac{p}{p-1}} = Q^{\frac{p}{p-1}}[W_1^{\frac{p}{p-1}} + W_2^{\frac{p}{p-2}}]$$

$$\Rightarrow C(W,Q) = Q.[W_1^{\frac{p}{p-1}} + W_2^{\frac{p}{p-2}}]^{\frac{p-1}{p}}$$

Nhận xét: Từ cách xây dựng C(W,Q) suy ra:

$X_i = F_i(Q,W), \forall i = \overline{1,m}$. X_i gọi là hàm cầu.

5.4.3. Tính chất của hàm chi phí C(W,Q).

1. Hàm chi phí C(W,Q) là hàm không giảm theo W nghĩa là nếu W'>W thì:

   C(W', Q) ≥ C(W,Q)

2. Hàm chi phí C (W,Q) là hàm thuần nhất bậc 1 theo W tức là:

$$C(tW,Q) = t\,C(W,Q) \qquad (\forall t > 0).$$

3. Hàm chi phí C(W,Q) là hàm lõm theo W, nghĩa là:

$$C(kW + (1-k)W,Q) \geq K\,C(W,Q) + (1-k)\,C(W',Q)$$

với $0 \leq k \leq 1$

4. Hàm chi phí C(W,Q) là hàm liên tục theo W, với W>0.

5.5. HÀM LỢI NHUẬN:

5.5.1. Khái niệm:

Lợi nhuận của một doanh nghiệp là hiệu số giữa doanh thu và chi phí.

Trong mục này ta nghiên cứu hàm lợi nhuận, quan hệ của nó đối với các hàm sản xuất, hàm chi phí cùng các tính chất của hàm lợi nhuận, làm cơ sở cho việc xác định hành vi của doanh nghiệp.

Giả sử doanh thu của doanh nghiệp là hàm của khối lượng Q_i R(Q), còn chi phí sản xuất là hàm C(W,Q). Khi đó lợi nhuận của doanh nghiệp được biểu thị dưới dạng:

$$\Pi(W,Q) = R(Q) - C(W,Q). \qquad (5.35)$$

Mục tiêu của doanh nghiệp là phải đạt lợi nhuận cao nhất; nghĩa là giải bài toán:

$$\begin{cases} \prod(Q,W) = R(Q) - C(W,Q) \to \max \\ f(X) = Q \end{cases} \qquad (5.36)$$

Trong trường hợp cạnh tranh hoàn hảo, mọi doanh nghiệp đều là người chấp nhận giá P thì R(Q) có dạng cụ thể:

$$R(Q) = P.Q \qquad (P>0)$$

Khi đó bài toán (5.36) có dạng:

$$\begin{cases} \prod(Q) = P.Q - C(W,Q) \to \max \\ f(X) = Q \end{cases} \qquad (5.37)$$

5.5.2 Thí dụ về xây dựng hàm lợi nhuận từ hàm sản xuất đã biết:

1. Xây dựng hàm lợi nhuận cho doanh nghiệp trong cạnh tranh hoàn hảo, biết rằng công nghệ của doanh nghiệp biểu thị dưới dạng hàm Cobb-Douglass.

$$Q = L^{\alpha}.K_0^{1-\alpha}\ .(K \text{ mức} = K_0)$$

Giá của các nhân tố L là W_1 và K_0 là W_2. Sản lượng sản phẩm là Q, giá của sản phẩm là P.

Ta tiến hành xây dựng hàm lợi nhuận như sau:

Xét bài toán cực đại lợi nhuận:

$$\begin{cases} \prod(P.Q) = P.Q - (W_1 L + W_2 K_0) \to \max \\ L^{\alpha}.K_0^{1-\alpha} = Q \end{cases} \qquad (5.38)$$

Bài toán này tương đương với bài toán sau:

$$\begin{cases} \prod(P.Q) = \mathrm{P.L}^{\alpha}.\mathrm{K}_0^{1\text{-}\alpha} - (W_1L + W_2K_0) \to \max \\ L^{\alpha}.K_0^{1-\alpha} = Q \end{cases} \qquad (5.39)$$

Từ điều kiện cần tối ưu (đạo hàm bậc nhất theo L bằng 0) ta suy ra:

$\alpha PL^{\alpha-1}.K_0^{1-\alpha} - W_1 = 0$

$$\Rightarrow L^{\alpha-1} = \frac{W_1}{\alpha P.K_0^{1-\alpha}} = \frac{W_1K_0^{\alpha-1}}{\alpha P}$$

$$\to L = \left[\frac{W_1}{\alpha P}\right]^{\frac{1}{\alpha-1}}.K_0$$

Thay giá trị L vào hàm mục tiêu, ta tìm được hàm lợi nhuận Π(W,Q).

2. Xây dựng hàm lợi nhuận Π(Q) từ hàm sản xuất dạng Cobb-Douglas tổng quát.

Giả sử quá trình sản xuất biểu thị bởi hàm sản xuất dạng Cobb-Douglas tổng quát và hàm chi phí suy ra từ hàm sản xuất này có dạng:

$$C(W,Q) = K.C(W).Q^{\frac{1}{\alpha+\beta}}$$

$(Q= A.K^{\alpha}.L^{\beta})$.

Khi đó bài toán cực đại lợi nhuận có dạng:

$$\begin{cases} [\prod(Q,W) = PQ - K.C(W).Q^{\frac{1}{\alpha+\beta}}] \to \max \\ AK^{\alpha}.L^{\beta} = Q \end{cases} \qquad (5.40)$$

Cho đạo hàm cung (Sản lượng) có dạng cụ thể như sau:

$$P - \frac{K}{\alpha+\beta}C(W).Q^{\frac{1-\alpha-\beta}{\alpha+\beta}} = 0$$

Vậy hàm cung (Sản lượng) có dạng cụ thể như sau:

$$Q^{\frac{1-\alpha-\beta}{\alpha+\beta}} = \frac{P(\alpha+\beta)}{KC(W)}$$

Hay: $Q = \left[P\frac{(\alpha+\beta)}{KC(W)}\right]^{\frac{\alpha+\beta}{1-\alpha-\beta}}$ =Q(P,W)

Hàm lợi nhuận Π(W,Q) chỉ phụ thuộc vào P và W nên có thể viết tắt dưới dạng:

$$\Pi(Q,W) = P\left[\frac{P(\alpha+\beta)}{KC(W)}\right]^{\frac{\alpha+\beta}{1-\alpha-\beta}} - KC(W)\left[\frac{P(\alpha+\beta)}{KC(W)}\right]^{\frac{\alpha+\beta}{1-\alpha-\beta}}$$

5.5.3. Tính chất của hàm lợi nhuận:

1. Hàm lợi nhuận Π(P,W) là hàm không giảm theo P và không tăng theo W. Nghĩa là:

Nếu $P' \geq P$ và $W' \leq W$

thì ta có: $\Pi(P',W') \geq (P,W)$

2. Hàm lợi nhuận là hàm thuần nhất bậc 1, theo (P,W) nghĩa là:

$\Pi(tW,tP) = t\,\Pi(W,P) \quad (\forall t > 0)$

3. Hàm lợi nhuận là hàm lồi theo P và W nghĩa là:

Nếu $(P'',W'') = (tp + (1-t)P', tW + (1-t)W')$

Thì: $\Pi(P'',W'') \leq t\,\Pi(P,W) + (1-t)\,\Pi(P',W') \quad (\forall t \in [0,1])$

5.6. MỘT SỐ MÔ HÌNH TĂNG TRƯỞNG.

5.6.1 Mô hình Macro không có trễ, không tính khấu hao.

1. Cấu trúc mô hình:

a. Các biến của mô hình.

-K(t): vốn ở thời điểm t.

-Y(t): thu nhập quốc dân ở thời điểm t.

-I(t): đầu tư ở thời điểm t.

b. Các ràng buộc của mô hình.

$$- \dot{K}(t) = \frac{dK(t)}{dt} = I(t) \qquad (5.41)$$

$$- K(t) = v.Y(t) \qquad (5.42)$$

$$- I(t) = s.Y(t) \qquad (5.43)$$

c. ý nghĩa:

- (5.41): Nếu bỏ qua thời gian trễ của đầu tư và khấu hao thì tốc độ tăng của vốn tại thời điểm t bằng đầu tư ở thời điểm t.
- (5.42): Vốn ở thời điểm t tỷ lệ với thu nhập quốc dân ở thời điểm t, theo hệ số tỷ lệ v, v gọi là hệ số định mức vốn hay (Định mức suất vốn).
- (5.43): Đầu tư ở thời điểm t tỷ lệ với thu nhập quốc dân tại thời điểm t, theo hệ số tỷ lệ s, s gọi là suất tích luỹ (Hệ số tích luỹ vốn).

2. Giải mô hình

Từ (5.41), đạo hàm hai vế theo t, ta được:

$$\dot{K}(t) = \frac{dK(t)}{dt} v\dot{Y}(t) \qquad (5.44)$$

Từ (5.42), (5.43) và (5.44), ta suy ra:

$$\dot{K}(t) = I(t) = v\,\dot{Y}(t) = sY(t) \qquad (5.45)$$

Từ (5.42) suy ra:

$$\frac{\dot{Y}(t)}{Y(t)} = \frac{s}{v} \qquad (5.46)$$

$\dfrac{\dot{Y}(t)}{Y(t)} = \dfrac{dY(t)}{Y(t)dt} = \dfrac{s}{v} = n$; gọi là nhịp tăng trưởng của thu nhập quốc dân là s.

Vậy $\qquad n = \dfrac{s}{v}$

Từ (5.43) $\qquad \Rightarrow \dfrac{1}{Y}\dfrac{dY}{dT} = n \Rightarrow \dfrac{dY}{Y} = ndt \qquad (5.47)$

Tích phân hai vế (5.47) ta được:

$\displaystyle\int \frac{dY}{Y} = \int ndt \qquad$ hay $\ln Y(t) = nt + c_1$

$$\Rightarrow \qquad Y(t) = e^{nt+c1} = e^{c1}e^{nt}$$

Đặt $\qquad e^{c1} = A$ ta được: $\qquad Y(t) = Ae^{nt}$.

Cho $\qquad t = 0, Y(o) = A := Y_O$

Vậy $\qquad Y(t) = Y_0e^{nt}$.

Tương tự ta xác định được:

$K(t) = K_0e^{nt}$.

$I(t) = I_0e^{nt}$

Trong đó:

Y_0 là thu nhập quốc dân ở năm gốc t = 0.

I_0 là đầu tư năm gốc, (t = 0).

K_0 là vốn năm gốc, (t= 0).

3. *Nhận xét:*

a. Biến vốn, suất tích luỹ, suất vốn ở năm gốc t thì ta có thể xác định được thu nhập quốc dân Y(t), vốn K(t) và đầu tư I(t) ở năm t nào đó, đồng thời ta có thể xác định được nhịp độ tăng trưởng n của thu nhập quốc dân.

Ví dụ: Cho s = 0,12, v = 3 thì nhịp tăng của thu nhập quốc dân là:

$n = \dfrac{dY}{Ydt} = \dfrac{s}{v} = 0{,}04$ (trên một năm)

b. Ngược lại nếu định trước nhịp tăng trưởng của thu nhập quốc dân là n thì để có suất tích luỹ vốn s, ta phải xác định được hệ số định mức vốn v là:

$v = \dfrac{s}{v} \rightarrow s = nv$.

4. *Mở rộng mô hình:*

Ta có thể đưa vào mô hình thêm nhiều biến và nhiều ràng buộc mà không làm thay đổi mối liên kết đã có.

Chẳng hạn có thể đưa biến tiêu dùng C(t) và ràng buộc mới C(t) = Y(t) – I(t) vào mô hình đã xét, được mô hình mới.

Hoặc ta có thể xét mô hình kinh tế mở và thêm các biến đặc trưng cho đại lượng xuất nhập khẩu.

5.6.2 Mô hình Harrod – Domar cải biên (có xét hao mòn vốn)

1. ***Cấu trúc mô hình:***

a. Các biến của mô hình:

- Y(t): Thu nhập quốc dân năm t.
- K(t): Vốn cơ bản năm t.
- L(t): Lao động năm t.
- I(t): tích luỹ cơ bản năm t.

b. Các ràng buộc của mô hình:

$$- Y(t)=\frac{K(t)}{v}=\frac{L(t)}{n}=\frac{I(s)}{s} \quad (5.48)$$

$$- \dot{K}(t)=\frac{dK(t)}{dt}=I(t) - \mu K(t) \quad (5.49)$$

$$- \dot{L}(t)=\frac{dL(t)}{d(t)}=nL(t) \quad (5.50)$$

c. Chú ý:

Trong mô hình này có đề cấp đến sự hao mòn vốn cơ bản, đặc trưng bởi hệ số hao mòn vốn cơ bản μ. (0 < μ < 1).

2. ***Giải mô hình:***

Từ (5.50) $\Rightarrow l(t) = L_0e^{nt} \Rightarrow L(0) = L_0$ (a)

Từ (5.48) và (5.49) $\Rightarrow \frac{dK(t)}{dt}=\frac{s}{v}K(t) - \mu K(t) = (\frac{s}{v}-\mu)K(t)$

$$\Rightarrow \frac{dK(t)}{dt}=(\frac{s}{v}-\mu)K(t) \Rightarrow LnK(t) = LnK_0e^{(\frac{s}{v}-\mu)t}$$

$$\Rightarrow K(t) = K_0e^{(\frac{s}{v}-\mu)t}$$

$$Y(t) = \frac{1}{v}K(t) = \frac{K_0}{v}e^{(\frac{s}{v}-\mu)t}$$

$$\Rightarrow Y(t) = Y_0\, e^{(\frac{s}{v}-\mu)t}$$

$$I(t) = sY(t) = sY_0\, e^{(\frac{s}{v}-\mu)t} \qquad \Rightarrow \qquad I(0) = sY_0 = I_0$$

Vậy: $I(t) = I_0\, e^{(\frac{s}{v}-\mu)t}$

Từ (5.42) $\Rightarrow$ $L(t) = nY(t) = nY_0\, e^{(\frac{s}{v}-\mu)t} \Rightarrow L(0) = nY_0 := L_0$

Vởy: $L(t) = L_0\, e^{(\frac{s}{v}-\mu)t}$ (b)

So sánh (a) và (b) suy ra: $n=\frac{s}{v}-\mu$

3. *Nhận xét:*

a. Mô hình xét trên đây là mô hình đóng, vì khi t=0 ta xác định được K(o), L(o), Y(o), I(o).

b. Các biến của mô hình có cùng nhịp tăng là $n = \frac{s}{v}-\mu$ nên đây là mô hình tăng trưởng cân đối.

c. Trong thời gian ngắn v=const nên muốn tăng n phải tăng tỷ trọng tích luỹ s và giảm hệ số hao mòn vốn μ.

d. Trong mô hình đã đề cập đến hao mòn vốn cơ bản.

e. Mô hình vẫn không thừa nhận sự thay thế giữa vốn và sức lao động.

4. *Giải mô hình với thời gian rời rạc:*

Ta có: $$\frac{dK}{dt} = \frac{\Delta k}{\Delta t} = \frac{K(t+1)-K(t)}{\Delta t} = [I(t) - \mu K(t)] \qquad (\text{vì } \Delta t=1)$$

$$= sY(t) - \mu K(t) = \frac{s}{v} K(t) - \mu K(t)$$

$$\Rightarrow K(t+1) = (1+\frac{s}{v}-\mu)K(t)$$

Khi t=0, ta có: $K(1) = (1+\frac{s}{v}-\mu)K_0$

Khi t=1, ta có:

$$K(2) = (1+\frac{s}{v}-\mu)K(1) = (1+\frac{s}{v}-\mu)^2 K_0$$

……….

$$K(t) = (1+\frac{s}{v}-\mu)^t K_0$$

$$Y(t)= \frac{1}{v}K(t)= \frac{K_0}{v}(1+\frac{s}{v}-\mu)^t = Y_0\,(1+\frac{s}{v}-\mu)^t$$

$$L(t) = nY(t) = nY_0\,(1+\frac{s}{v}-\mu)^t = L_0\,(1+\frac{s}{v}-\mu)^t$$

$$I(t) = sY(t) = sY_0\,(1+\frac{s}{v}-\mu)^t = I_0(1+\frac{s}{v}-\mu)^t$$

BÀI TẬP CHƯƠNG 5.

1. Hãy phân tích sự tác động của giá P($) đến cung S và cầu D, biết mô hình cung cầu có hệ ràng buộc sau:

$$S = -12 + 1{,}4P \quad (a)$$
$$D = 4 - 0{,}1\,P \quad (b)$$

HD:

- *Xét* $\frac{dS}{dp} = 1 > 0$ *: giá tăng cung tăng, giá giảm cung giảm.*

- *Xét* $\frac{dS}{dp} = -0.1 < 0$ *: Cầu và giá biến đổi ngược nhau.*

2. Một doanh nghiệp có công nghệ sản xuất được biểu hiện bởi hàm sản xuất Cobb - Douglas. $Y = A(t)K^{0,4}L^{0,6}$, trong đó $K = K_0.1,2^t$

$L= L_0.1,25^t$,

$A(t) = 0,1t$

Hãy xác định sự thay đổi của sản lượng Y theo K và L

HD: Xét $\left.\frac{\partial Y}{\partial K}\right|$ *và* $\left.\frac{\partial Y}{\partial L}\right|$*. Khi t thay đổi thì Y giảm hay tăng.*

3. Một doanh nghiệp có công nghệ sản xuất biểu hiện bởi hàm sản xuất:

$Y = 0,4K + 0,7L$, trong đó Y là sản lượng, K là vốn, L là lao động, với K,L > 0.

a. Hãy phân tích sự thay đổi của sản lượng Y theo K và L.

b. Xác định hệ số thay thế của lao động cho vốn.

c. Xác định hệ số co giãn của Y theo K và của Y theo L.

HD :

a. Xét $\frac{\partial Y}{\partial K}$ *và* $\frac{\partial Y}{\partial L}$ *: xét dấu của đạo hàm từ đó suy ra xu hướng thay đổi của Y theo K và L.*

b. Hệ số thay thế của L cho K được xác định bởi $\dfrac{\frac{\partial Y}{\partial K}}{\frac{\partial Y}{\partial L}}$

c. Hệ số co dãn của Y theo K và của Y theo L .

$$E_{(Y,K)} = \frac{\partial Y}{\partial K} * \frac{K}{Y}$$

$$E_{(Y,L)} = \frac{\partial Y}{\partial L} * \frac{L}{Y}$$

4. Một doanh nghiệp có công nghệ sản xuất biểu hiện ở hàm sản xuất $Y = A(t).K^{0,4}L^{0,6}$, trong đó $K= K_0+ ,0,1t$; $L= L_0 + 0,2t$; $A(t) = 0,1t$; trong đó Y là thu nhập, K là vốn, L là lao động, A(t) là tác động khác.

a. Hãy xác định xu hướng thay đổi của hệ số tăng trưởng của thu nhập Y khi A(t), K(t), L(t) thay đổi.

b. Hãy xác định xu hướng thay đổi của hệ số tăng trưởng của thu nhập khi chỉ K(t) thay đổi? Khi chỉ A(t) thay đổi? Khi chỉ L(t) thay đổi?

HD :

a. Tính đạo hàm của Y khi xem A(t) , K(t), L(t) đều là biến rồi cho t $\rightarrow \infty$ *và xét.*

b. Tính $\frac{\partial Y}{\partial A}, \frac{\partial Y}{\partial K}, \frac{\partial Y}{\partial L}$ *và cho t* $\rightarrow \infty$ *rồi xét.*

5. Một doanh nghiệp có công nghệ sản xuất cho bởi hàm sản xuất Y= aK + bL.

Hãy phân tích hiệu quả sản xuất khi tăng qui mô sản xuất.

HD: $\forall t > 1$ *xét Y = a*t*K + b*t*L= t* (a*K+ b*L)=tY: Tăng quy mô hiệu quả không đổi.*

6. Cho hàm doanh thu trung bình AR = 15 - Q.

a. Xác định mức doanh thu cận biên MR tại $Q_1=5$; $Q_2=8$. Phân tích hiệu quả.

b. Xác định mức chênh lệch của doanh thu cận biên và doanh thu trung bình như một hàm của Q.

7. Cho hàm tổng chi phí.

$$TC = C(Q) = Q^3 - 5Q^2 + 14Q + 144, \qquad (Q>0)$$

a. Khảo sát sự thay đổi tuyệt đối của TC theo Q, từ đó cho nhận xét về mở rộng sản xuất.

b. Tính hệ số co dãn của TC theo Q tại Q=2.

c. Cho giá sản phẩm là P=70, mức thuế doanh thu là 20%, tính lợi nhuận khi Q=3. Tìm các điểm hoà vốn và phân tích sự thay đổi của hàm tổng lợi nhuận.

HD:

a. $\frac{dTC}{dQ} = 3Q^2 - 10Q + 14$. *Xét dấu* $f(Q) = 3Q^2 - 10Q + 14$*, từ đó đánh giá mức chi phí sản xuất tại các khoảng giá trị khác nhau của Q.*

b. Tính $\left.\frac{dTC}{dQ} * \frac{Q}{TC}\right|_{Q=2}$

c. Lợi nhuận $\Pi(Q)=p*Q-[Q^3-5Q^2+14Q+144+p*Q*20\%]$.

Tính $\Pi(3)$ xét giá trị Q^* để $\Pi(Q^*)=0$, đó là điểm hòa vốn. Xét giá trị Q để $\Pi(Q)>0$: có lãi, $\Pi(Q)<0$ lỗ vốn, $\Pi(Q)=0$ hòa vốn.

8. Cho hàm tổng chi phí TC = 500+ $\frac{5Q^2}{Q+3}$, (Q là sản lượng).

Hệ số co dãn của TC theo Q tại Q=17.

Ghi chú: Chi phí cận biên MC (Marginal Cost) là đại lượng cho biết phần chi phí tăng thêm khi sản xuất thêm một đơn vị sản phẩm, được xác định như sau:

$$MC = \frac{dTC}{dQ}.$$

HD: $E_{(TC,Q)} = \frac{dTC}{dQ} * \frac{Q}{TC}\Big|_{Q=17}$. *Tính* $E_{(TC,Q)}$ *tại Q=17.*

9. Cho hàm tổng chi phí TC = 4000 + 10Q + 0,1Q^2, (Q là sản lượng), giá cả P được xác định bởi phương trình Q = 800 - 2,5P

a. Tìm hàm chi phí cận biên MC.

b. Tìm hàm chi phí trung bình AC, khảo sát sự thay đổi của nó.

c. Tính hệ số co dãn của TC tại Q=80.

HD:

a. Tính $\frac{dTC}{dQ}$

b. Tính $\frac{TC}{Q}$

c. $E_{(TC,Q)} = \frac{dTC}{dQ} * \frac{Q}{TC}\Big|_{Q=80}$

10. Chi phí trung bình của khai thác một loại khoáng sản:

$$AC = 12 + \frac{0,1}{0,2+Q}, \text{ (Q là sản lượng).}$$

a. Tìm hàm chi phí cận biên MC tại Q=10.

b. Tìm biểu thức tính chênh lệch của chi phí trung bình AC và chi phí cận biên MC, nhận xét sự thay đổi của nó.

c. Tính hệ số co giãn của tổng chi phí TC.

HD :

a.

$$\frac{TC}{Q} = AC \Rightarrow TC = AC * Q$$

$$MC\Big|_{Q=10} = \frac{dTC}{dQ}\Big|_{Q=10}$$

b. $\Delta = AC - MC = f(Q)$ *xét* Δ *theo Q*

c. $E_{(TC,Q)} = \frac{dTC}{dQ} * \frac{Q}{TC}$

11. Cho hàm chi phí trung bình để sản xuất một loại sản phẩm là $AC = Q^2 - 12Q + 60$, (Q là sản lượng).

a. Xác định hàm tổng chi phí TC, phần chi phí biến đổi VC và chi phí cố định FC.

b. Xác định các biểu thức tính sự thay đổi tuyệt đối và tương đối của AC theo Q và ghi các nhận xét.

c. Xác định hàm chi phí cận biên MC và mô tả trên cùng một mặt phẳng toạ độ đồ thị của hai hàm MC, AC từ đó nêu các nhận xét về quan hệ giữa MC và AC.

HD :

a.

$$\frac{Q}{TC} = AC \Rightarrow TC = AC * Q$$

$$VC = TC = Q^3 - 12Q^2 + 60Q$$

$$FC = 0$$

b.

$$\frac{dAC}{dQ} = 2Q - 12$$

$$\varepsilon(AC,Q) = \frac{(2Q^2 - 12Q)}{Q^2 - 12Q + 60}$$

$* \ \varepsilon(AC,Q) \geq 0$ *khi* $Q \geq 2$

$* \ \varepsilon(AC,Q) < 0$ *khi* $0 < Q < 2$

c. $MC = \frac{dTC}{dQ} = 3Q^2 - 24Q + 60$

12. Cho mô hình thị trường:

$$Q_d = Q_S$$

$$Q_d = D(P,Y_0) \text{, với } \frac{\partial D}{\partial P} < 0, \qquad \frac{\partial D}{\partial Y_0} > 0$$

$$Q_S = S(P) \text{, với } \frac{\partial S}{\partial P} > 0$$

Trong đó Q_d, Q_S là mức cầu và mức cung một loại hàng, P là giá; Y_0 là thu nhập.

a. Giải thích mô hình và các điều kiện.

b. Giả định tồn tại giá cân bằng P*, khi Y_0 tăng thì giá cân bằng sẽ biến động như thế nào? Giải thích ý nghĩa kinh tế của biến đổi này.

c. Gọi $\overline{Q}$* là lượng cung cầu ở trạng thái cân bằng khi Y_0 tăng thì lượng cân bằng thay đổi như thế nào. Viết biểu thức mô tả sự thay đổi đó.

HD:

a. Đây là mô hình cân bằng một hàng hóa trong đó cầu phụ thuộc vào giá p và thu nhập Y_0, cung chỉ phụ thuộc giá p. Điều kiện $\frac{\partial D}{\partial p} < 0$ *chứng tỏ cầu giảm khi giá tăng và ngược lại, điều kiện* $\frac{\partial D}{\partial p} > 0$ *chứng tỏ cung tăng giảm cùng chiều với giá.*

b. $\frac{\partial \overline{P}}{\partial Y_0} = \frac{\partial D / \partial Y_0}{\frac{\partial D}{\partial \overline{P}} - \frac{\partial S}{\partial \overline{P}}} < 0$ *(theo điều kiện đầu bài) nên khi Y_0 tăng thì giá $\overline{P}$ giảm. Khi thu nhập Y_0 tăng thì sẽ kéo theo giá cân bằng xuống.*

c. $\frac{\partial \overline{P}}{\partial Y_0} = \frac{dS}{d\overline{P}} * \frac{d\overline{P}}{dY_0} < 0$ *nên khi Y_0 tăng thì $\overline{Q}$ giảm: khi thu nhập tăng thì lượng cân bằng giảm xuống.*

13. Cho mô hình cân bằng thu nhập quốc dân.

$S(Y) + T(Y) = I(Y) + G_0$, với S'>0, T'>0, I'>0; S'+T' > I' trong đó S là tiết kiệm, T là thuế, I là đầu tư, G_0 là tiêu dùng của chính phủ.

a. Giải thích ý nghĩa kinh tế của mô hình và ý nghĩa kinh tế của các mối quan hệ của các đạo hàm bậc nhất S', T', I'.

b. Xác định biểu thức mô tả sự thay đổi của thu nhập cân bằng $\overline{Y}$ theo G_0. Giải thích ý nghĩa kinh tế.

HD:

a. Tiết kiệm thuế, tích lũy phụ thuộc vào thu nhập. Tổng tiết kiệm và thuế bằng tích lũy + tiêu dùng. Tiết kiệm thuế, tích lũy tăng giảm theo thu nhập. Lượng tăng của thuế và tiết kiệm phải lớn hơn lượng tăng tích lũy.

b. $\frac{d\overline{Y}}{\partial G_0} = 1 : [\frac{dS}{d\overline{Y}} + \frac{dT}{d\overline{Y}} - \frac{dI}{d\overline{Y}}]$

14. Một doanh nghiệp có công nghệ sản xuất cho bởi hàm sản xuất $Y(t) = 0{,}2K^{0,4}L^{0,8}$, trong đó $K = 120 + 0{,}1t$, $L = 200 + 0{,}3t$.

a. Tính hệ số co giãn của Y theo K và theo L.

b. Tính hệ số tăng trưởng của vốn K, lao động L và Y.

c. Hãy cho biết hiệu quả của việc tăng qui mô sản xuất trong trường hợp này.

HD:

a. $E_{(Y,K)} = \frac{\partial Y}{\partial K} * \frac{K}{Y}; E_{(Y,L)} = \frac{\partial Y}{\partial L} * \frac{L}{Y}$

b. $G_Y = \frac{dY}{Ydt}; G_K = \frac{dK}{Kdt}; G_L = \frac{dL}{Ldt}$

c. $\forall \lambda > 1: Y = 0.2 * (\lambda K)^{0.4} * (\lambda L)^{0.8} = 0.2 * \lambda^{1.2} K^{0.4} L^{0.8} > 0.2 \lambda K^{0.4} L^{0.8}$

Vậy tăng tuy mô, tăng hiệu quả..

15. Xét mô hình lợi nhuận:

$\Pi(Q)$ = TR(Q) - TC(Q) - aTR(Q), trong đó: TR là tổng doanh thu, TC là tổng chi phí, a là thuế suất theo doanh thu.

a. Xác định biểu thức điều kiện của Q để thu được lợi nhuận cực đại.

b. Khi thuế suất tăng, mức Q tối ưu biến động như thế nào.

c. Hãy làm một phân tích tương tự nếu thuế đánh vào vốn sản xuất thực hiện (Tổng chi phí).

HD:

a. $\left.\frac{\partial \Pi(Q)}{\partial Q}\right|_{Q=Q*} = 0$

b. Khi a tăng thì Q tối ưu giảm.

16. Nhu cầu hai mặt hàng phụ thuộc giá như sau:

$Q_1 = 40 - 2P_1 - XP_2; Q_2 = 35 - P_1 - P_2$

Tổng chi phí là hàm của các sản lượng:

TC = $Q_1^2 + 2Q_2^2$+12, trong đó P_i, Q_i ($i=\overline{1,2}$) là giá và sản lượng loại hàng tương ứng.

a. Xác định mức Q_1, Q_2 sao cho tổng lợi nhuận lớn nhất.

b. Tính chi phí cận biên cho từng loại hàng tại mức tối ưu tìm được ở câu a.

c. Hai mặt hàng này có thay thế lẫn cho nhau trong tiêu dùng không?

HD:

a. $\frac{\partial \Pi}{\partial Q_i} = 0; i = \overline{1,2}$

$\Rightarrow Q_1 = 3.575; P_1 = 6.07$ *hoặc* $Q_2 = 4.645; P_2 = 24.285$

b. $\left.\frac{\partial TC}{\partial Q_i}\right|_{Q=Q*}; i = \overline{1,2}$

17. Một doanh nghiệp sản xuất có hàm lợi nhuận phụ thuộc hai yếu tố sản xuất là vốn và sức lao động, như sau:

$U = -12 + 0,3K + 0,8L - 0,1K^2L^2$, L,K>0

a. Với lượng vốn K = K_0, hãy xác định qui mô lao động có lợi ích cao nhất của doanh nghiệp. Vẽ đồ thị hàm U tại K_0.

b. Trong điều kiện của câu a, hãy xác định qui mô sản xuất tối ưu (lợi ích lớn nhất).

c. Hãy phân tích U theo vốn K, khi $L = L_0$

d. Giả sử doanh nghiệp đang ở tình trạng tối đa lợi ích buộc phải tăng một trong hai yếu tố đôi chút thì nên chọn yếu tố nào?

HD:

a. $L_{max} = \frac{4}{K_0^2}$

18. Chi phí tiêu dùng cho loại hàng A được ước lượng bởi hàm sau:

C = -12 + 0,1M - 0,05 P, trong đó C là chi phí cho tiêu dùng hàng A của mỗi cá nhân; M là thu nhập cá nhân; P là giá hàng A.

a. Giải thích ý nghĩa kinh tế của các hệ số; có thể xem hàng A là hàng thiết yếu không?

b. Hãy tính hệ số tăng trưởng của nhu cầu theo thời gian t nếu số tăng của thu nhập theo thời gian là 12% và hệ số này của giá hàng A là 8%.

HD:

b. Tính hệ số tăng trưởng của C(t) qua hệ số tăng trưởng của M và P_j với trọng số là hệ số co dãn.

19. Thu nhập quốc dân của một quốc gia (Y) phụ thuộc vào vốn K, lao động L và ngân sách đào tạo trong năm năm trước đó G, được biểu thị bởi hệ thức:

$Y = 0,24.K^{0,3}.L^{0,8}.G^{0,05}$

Trong đó các yếu tố biến đổi theo thời gian như sau: hàng năm vốn tăng 15%, công ăn việc làm tăng 9%, chi phí cho đào tạo tăng 20%.

a. Tính hệ số tăng trưởng của thu nhập quốc dân.

b. Trong điều kiện Y, K không đổi còn công ăn việc làm phụ thuộc vào ngân sách đào tạo trước đó 5 năm, hãy viết biểu thức chỉ ra sự thay đổi của công ăn việc làm ngân sách đào tạo 5 năm trước đó.

HD:

a. $G_Y = \frac{dY}{Ydt}$

b. $\frac{\partial Y}{\partial G} = 0.24 * K^{0.3} * L^{0.8} * G^{-0.95}$

CHƯƠNG VI: MÔ HÌNH PHỤC VỤ ĐÁM ĐÔNG

6.1. CÁC KHÁI NIỆM VỀ HỆ THỐNG PHỤC VỤ ĐÁM ĐÔNG

6.1.1 Mô tả hệ thống phục vụ.

Chúng ta có thể mô tả hệ thống phục vụ đám đông bằng phương pháp "hộp đen" hoặc phương pháp "hộp trắng". Sau đây ta mô tả hệ thống phục vụ đám đông bằng phương pháp "hộp đen" như sau:

Dòng vào — Hàng chờ — Các kênh phục vụ và nguyên tắc phục vụ — Dòng ra: các yêu cầu đã được phục vụ

* * * * *   [* * * * *] →   * * * * * →

Các yêu cầu phục vụ — Các yêu cầu không thỏa mãn

6.1.2. Các yếu tố của hệ thống phục vụ

Một hệ thống phục vụ, dù ở qui mô nào, tính chất hoạt động ra sao, đều được đặc trưng bởi các yếu tố chủ yếu sau:

1. Dòng vào.

Dòng vào là dòng các yêu cầu đến hệ thống phục vụ, đòi hỏi được thoả mãn một yêu cầu nào đó:

Ví dụ: Khách hàng đến một cửa hàng siêu thị để mua hàng, các đơn vị quân đội chờ qua phà để vượt sông, các khí tài chờ để được sửa chữa, bảo dưỡng v.v.

- Tại các thời điểm khác nhau, các yêu cầu đến hệ thống phục vụ là ngẫu nhiên nên các dòng yêu cầu là những đại lượng ngẫu nhiên, tuân theo luật phân bố xác suất nào đó, do vậy nó có nhiều loại dòng vào. ở giáo trình này chúng ta chỉ xét hai loại dòng yêu cầu quan trọng, thường gặp nhất ở mọi hệ thống phục vụ, đó là: Dòng vào tiền định và Dòng vào Poát xông. *a. Dòng vào tiền định:* Dòng vào tiền định là dòng vào mùa các yêu cầu đến hệ thống phục vụ tại các thời điểm cách đều nhau một khoảng a, là một đại lượng ngẫu nhiên có hàm phân bố xác suất là:

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{ nếu } x < a \\ 1, \text{ nếu } x \geq a \end{cases} \qquad (6.1)$$

b. Dòng vào Poát-xông: Dòng vào Poat-xông là dòng yêu cầu đến hệ thống tuân theo luật phân phối Poát-xông.

Có hai loại dòng vào Poát-xông.

+ Dòng Poát-xông không dừng: Dòng Poát-xông không dừng. Là dòng vào mà xác suất xuất hiện x yêu cầu trong khoảng thời gian Dt, kể từ thời điểm t, phụ thuộc vào t, nghĩa là:

$$P_x(Dt) = \frac{e^{-a(t,\Delta t)}}{x!}\left[a(t,\Delta t)\right]^x \qquad (6.2)$$

Trong đó a(t, Dt) là số trung bình yêu cầu xuất hiện từ t đến Dt.

+ *Dòng vào Poát-xông dừng*: Dòng vào Poát-xông dừng là dòng vào mà xác xuất trong khoảng thời gian Dt, kể từ thời điểm t, có x yêu cầu xuất hiện, không phụ thuộc vào t, nghĩa là:

$$Px\ (Dt) = \frac{e^{-\lambda \Delta t}}{x!}(\lambda.\Delta t)^x \qquad (6.3)$$

Trong đó λ là số yêu cầu trung bình xuất hiện trong một đơn vị thời gian (cường độ dòng yêu cầu). Nói cách khác là mật độ dòng yêu cầu không đổi.

Nếu t là khoảng thời gian giữa lần xuất hiện các yêu cầu liên tiếp, thì t là một đại lượng ngẫu nhiên tuân theo luật chỉ số, nghĩa là t có hàm phân bố xác suất dạng:

$$F\ (t) = 1 - e^{-\lambda t} \qquad (6.4a)$$

Và hàm mật độ xác xuất là:

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t} \qquad (6.4b)$$

2. Hàng chờ

Hàng chờ là tập hợp các yêu cầu sắp xếp theo nguyên tắc nào đó để chờ được vào phục vụ trong hệ thống.

3. Kênh phục vụ

Kênh phục vụ là toàn bộ thiết bị kỹ thuật, con người hoặc một tổ hợp gồm các thiết bị kỹ thuật cùng công nghệ tương ứng mà hệ thống sử dụng để phục vụ yêu cầu khách hàng.

Đặc trưng quan trọng nhất là của kênh phục vụ là thời gian phục vụ. Đó là thời gian mỗi kênh phải tiêu phí để phục vụ một yêu cầu. Thời gian phục vụ là một đại lượng ngẫu nhiên tuân theo một quy luật xác suất nào đó.

Các dòng yêu cầu được phục vụ trong kênh phục vụ gọi là "dòng phục vụ".

Khi dòng yêu cầu được phục vụ trên các kênh phục vụ (dòng phục vụ) là tối giản thì khoảng thời gian giữa các lần xuất hiện liên tiếp các yêu cầu là một đại lượng ngẫu nhiên tuân theo luật chỉ số, nghĩa là đại lượng ngẫu nhiên có phân bố xác suất dạng:

$$F\ (t) = 1 - e^{-\mu t} \qquad (6.5a)$$

Và hàm mật độ xác suất có dạng:

$$f(t) = \mu e^{-\mu t} \qquad (6.5b)$$

Trong đó μ: là số yêu cầu được phục vụ trên mỗi kênh trong một đơn vị thời gian (cường độ dòng phục vụ).

Khoảng thời gian giữa các lần xuất hiện liên tiếp các yêu cầu trong dòng phục vụ của mỗi kênh chính là khoảng thời gian kênh đó phục vụ xong từng yêu cầu, nghĩa là thời gian phục vụ của kênh.

Nếu dòng phục vụ trên mỗi kênh là dòng tối giản thì thời gian phục vụ của kênh đó là đại lượng ngẫu nhiên tuân theo luật chỉ số, nghĩa là có hàm phân phối xác suất và mật độ xác suất dạng (6.5a), (6.5b).

4. Dòng ra

Dòng ra là dòng yêu cầu đi ra khỏi hệ thống, bao gồm các yêu cầu đã được phục vụ và các yêu cầu chưa được phục vụ.

+ Dòng yêu cầu ra đã được phục vụ: Đó là những yêu cầu đã được phục vụ ở mỗi kênh, nếu dòng đó là tối giản thì nó có một vai trò rất lớn trong hệ thống dịch vụ (ta sẽ xét sau).

Người ta đã chứng minh được rằng: Nếu dòng vào là dòng tối giản thì dòng ra được phục vụ tại mỗi kênh sẽ là dòng xấp xỉ tối giản.

+ Dòng yêu cầu ra không được phục vụ: Đây là bộ phận yêu cầu đến hệ thống nhưng không được phục vụ vì một lý do nào đó.

5. Nguyên tắc phục vụ của hệ thống dịch vụ

Nguyên tắc phục vụ của hệ thống dịch vụ là cách thức nhận các yêu cầu vào phục vụ của hệ thống đó và các quy định khác đối với yêu cầu. Nó chỉ ra:

- Trong trường hợp nào thì yêu cầu được nhận vào phục vụ
- Cách thức bố trí các yêu cầu vào các kênh phục vụ.
- Khi nào và trong trường hợp nào thì yêu cầu bị từ chối hoặc phải chờ.
- Cách thức hình thành hàng chờ của các yêu cầu.

6.2 TRẠNG THÁI CỦA HỆ THỐNG PHỤC VỤ

6.2.1. Định nghĩa:

Trạng thái của hệ thống phục vụ, ký hiệu là $x_k(t)$, là khả năng kết hợp dòng vào và dòng ra của hệ thống ở một thời điểm nhất định.

Theo nghĩa đó thì trạng thái của hệ thống phục vụ tại thời điểm t chính là tình huống mà trong hệ thống có k yêu cầu được phục vụ, hay nói cách khác hệ thống đang có k kênh phục vụ đang bận (đang làm việc) và do đó có (n-k) kênh được rỗi (không làm việc).

Hệ thống phục vụ đang ở trạng thái nào đó là một quá trình ngẫu nhiên, quá trình này tuân theo một luật phân phối xác suất nào đó. Nên khả năng xuất hiện một trong các trạng thái $x_k(t)$ (k = 0,1,2,...) nào đó tại thời điểm t, có xác suất là một giá trị xác định $P_k(t)$.

6.2.2. Quá trình thay đổi trạng thái của hệ thống phục vụ

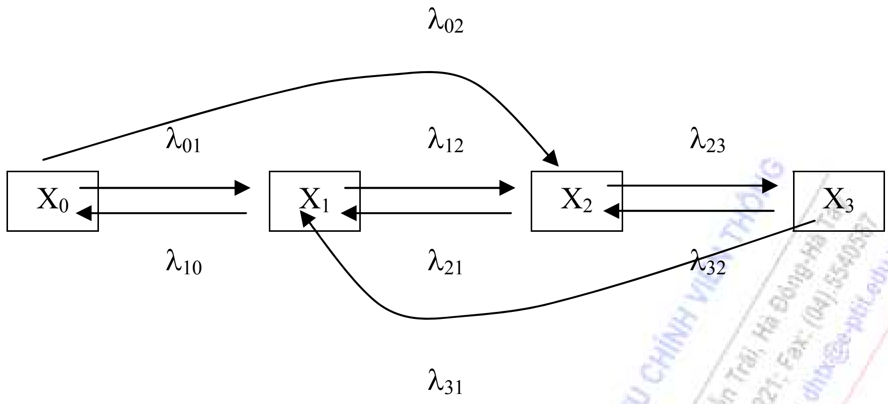
Quá trình hoạt động, dưới tác động của dòng vào và dòng phục vụ, hệ thống phục vụ chuyển từ trạng thái này sang trạng thái khác. Ta gọi xác suất của quá trình đó là xác suất chuyển trạng thái. Nguyên nhân gây ra sự chuyển trạng thái là do tác động của dòng vào và dòng phục vụ, số yêu cầu và số kênh bận trong hệ thống thay đổi, nghĩa là dưới tác động của dòng vào $\lambda_i(t)$ và dòng phục vụ $\mu(t)$ tại thời điểm t, hệ thống sẽ biến đổi từ trạng thái này sang trạng thái khác.

6.2.3 Sơ đồ trạng thái:

Để diễn tả quá trình thay đổi trạng thái của hệ thống phục vụ, ta dùng sơ đồ trạng thái của hệ thống.

Sơ đồ trạng thái là tập hợp các hình vẽ, mũi tên diễn tả quá trình biến đổi trạng thái của hệ thống phục vụ, trong đó các hình chữ nhật để biểu thị trạng thái của hệ thống, các mũi tên nối liền các trạng thái diễn tả bước chuyển từ trạng thái này sang trạng thái khác. Trên các mũi tên ghi các tham số biểu thị cường độ của dòng biến cố tác động kéo trạng thái dịch chuyển theo hướng mũi tên.

Ví dụ:



6.2.4. Qui tắc thiết lập hệ phương trình trạng thái

Căn cứ vào sơ đồ trạng thái, ta thiết lập quan hệ giữa xác suất xuất hiện trạng thái $x_k(t)$: $P_k(t)$, với các tác nhân gây ra sự biến đổi trạng thái đó. Mối quan hệ này được hiển thị bởi các phương trình toán học chứa các xác suất $P_k(t)$ và cường độ dòng chuyển trạng thái của hệ thống.

a. Nội dung quy tắc:

Đạo hàm bậc nhất theo thời gian của xác suất xuất hiện trạng thái $x_k(t)$, $P'_k(t)$, bằng tổng đại số của một số hữu hạn số hạng, số các số hạng này bằng số mũi tên nối liền trạng thái $x_k(t)$, với trạng thái $x_j(t)$ khác, trong đó số số hạng mang dấu (+) tương ứng với số mũi tên hướng từ $x_j(t)$ về $x_k(t)$; số số hạng mang dấu (-) tương ứng với số mũi tên hướng từ $x_k(t)$ sang $x_j(t)$. Mỗi số hạng có giá trị bằng tích giữa cường độ của dòng biến cố hướng theo mũi tên và xác suất xuất hiện trạng thái mà mũi tên xuất phát.

b. Hệ phương trình trạng thái

$$P'_k(t) = \frac{dP_k(t)}{dt} = -\sum_{j=k} \lambda_{jk}(t).P(t) \qquad (6.10a)$$

(k = 0,1,2,....,n)

Với điều kiện:

$$\sum_{j=k} P_j(t) + \sum_{j=k} P_k(t) = 1$$

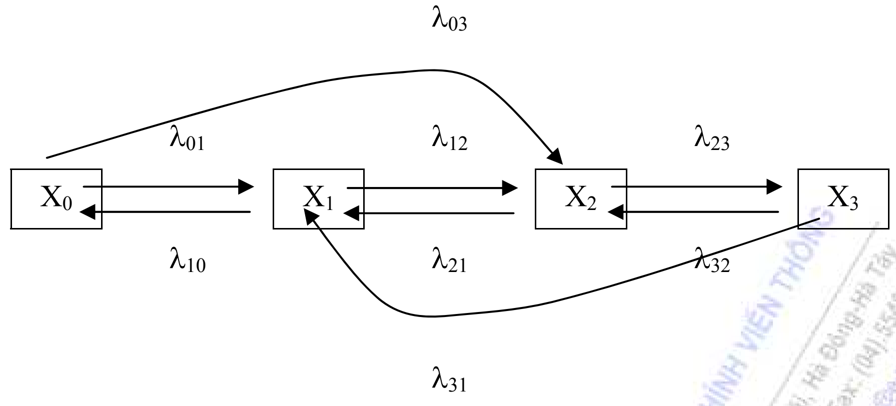
Trong (6.10a): $\lambda_{jk}(t)$ là cường độ dòng biến cố (dòng yêu cầu hoặc dòng phục vụ) chuyển trạng thái $x_j(t)$ về trạng thái $x_k(t)$.

$\lambda_{jk}(t)$: ý nghĩa ngược lại

$P_j(t)$ là xác suất xuất hiện trạng thái $x_j(t)$ ở thời điểm t (trạng thái trong hệ thống có j kênh đang làm việc).

$P_k(t)$ ý nghĩa tương tự.

Ví dụ: Một hệ thống phục vụ có sơ đồ trạng thái như sau:



Dựa vào quy tắc thiết lập hệ phương trình trạng thái, ta có:

$$\begin{cases} P'_0(t) = -\lambda_{01}(t).\ P_0(t) - \lambda_{03}(t).\ P_0(t) + \lambda_{10}(t).P_1(t) + \lambda_{30}(t).P_3(t) \\ P'_1(t) = -\lambda_{10}(t).\ P_1(t) - \lambda_{12}(t).\ P_1(t) + \lambda_{21}(t).P_2(t) + \lambda_{01}(t).\ P_0(t) \\ P_2(t) = -\lambda_{23}(t).\ P_2(t) - \lambda_{21}(t).\ P_2(t) + \lambda_{32}(t).P_3(t) + \lambda_{12}(t).\ P_1(t) \\ P'_3(t) = -\lambda_{32}(t).\ P_3(t) - \lambda_{30}(t).\ P_3(t) + \lambda_{03}(t).P_0(t) + \lambda_{23}(t).\ P_2(t) \\ \text{Với điều kiện: } \sum_{k=1}^{3} P_k(t) = 1 \end{cases}$$

c. Định lý Mác-cốp

Nếu quá trình thay đổi trạng thái của hệ thống dưới tác động của dòng tối giản thì quá trình sẽ có tính chất dừng, theo nghĩa:

$$\lim_{t\to+\infty} P_k(t) = P_k \qquad (6.11)$$

Trong trường hợp này hệ phương trình (6.10a)có dạng:

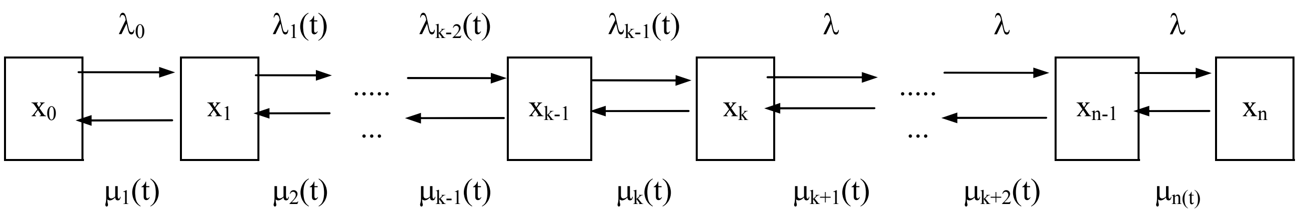
$$\sum_{j\neq k} \lambda_{jk}.P_j - \sum_{j\neq k} \lambda_{jk}.P_k = P'_k = 0 \qquad (6.10b)$$

Với điều kiện:

$$\sum_{j=k} P_k + \sum_{j=k} P_j = 1$$

d. Quá trình thay đổi trạng thái theo kiểu "huỷ và sinh"

Nhiều hệ thống phục vụ trong thực tế có quá trình biến đổi trạng thái rất đặc trưng, gọi là "huỷ và sinh". Đó là qua trình biến đổi trạng thái có sơ đồ trạng thái như sau:



Nhận xét: Trong sơ đồ diễn tả quá trình "huỷ và sinh" ta thấy tất cả các trạng thái đều có 4 mũi tên liên hệ, trừ hai trạng thái ở đầu và cuối, chỉ có 2 mũi tên đi ra và 2 mũi tên đi vào.

Dựa vào quy tắc thiết lập hệ phương trình trạng thái và dựa vào sơ đồ trạng thái của quá trình "huỷ và sinh", ta thiết lập được hệ phương trình trạng thái cuả quá trình này như sau:

$$\begin{cases} P'_0(t) = -\lambda_0(t).P_0(t) + \mu_1(t).P_1(t) \\ P'_k(t) = -[\lambda_k(t) + \mu_K(t)]\,P_k(t) + \lambda_{k-1}(t) + \mu_{k+1}(t).P'_{k+1}(t) \\ k = \overline{1,n-1} \\ P_n(t) = -\mu_n(t).P'_n(t) + \lambda_{n-1}(t).P_{n-1}(t) \\ \text{Với điều kiện: } \sum_{k=0}^{n} P_k(t) = 1 \end{cases} \qquad (6.12)$$

Nếu quá trình thay đổi trạng thái "huỷ và sinh" lại diễn ra dưới tác động của các dòng tối giản (quá trình có tính chất dừng) thì

Ta có $\lambda_k(t) = \lambda_k$, $\mu_k(t) = \mu_k$ và $\lim_{n\to+\infty} P'_k = P_k$ (k=0,12,......,n)

Khi đó quá trình "huỷ và sinh" dưới tác động của dòng tối giản, thì hệ thống phương trình trạng thái có dạng:

$$\begin{cases} \lambda_0 P_0 + u_1 P_1 = 0 \\ -(\lambda_k + u_k).P_k + \lambda_{k-i}.P_{k-1} + \mu_{k+1}.P_{k+1} = 0 \\ \overline{k} = \overline{1,n-1} \\ -\mu_n.P_n + \lambda_{n-1}.P_{n-1} = 0 \\ \text{Với điều kiện: } \sum_{k=0}^{n} P_k = 1 \end{cases} \qquad (6.13a)$$

Nếu ở (6.13a) ta đặt $U_k = -\lambda_k.P_k + \mu_{k+i}.P_{k+1}$

Thì hệ (6.13a)có dạng:

$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_k = U_{k-1} = 0 \quad (k = \overline{1,n-1}) \\ U_{n-1} = 0 \end{cases} \qquad (6.13b)$$

Với điều kiện $\sum_{k=0}^{n} P_k = 1$

Từ (6.13b)suy ra: $U_k = 0$ $(k = 0,n-1)$ (6.13c)

Với điều kiện $\sum_{k=0}^{n} P_k = 1$

Do đó $P_{k+1} = \dfrac{\lambda_k}{\mu_{k+1}} P_k$, $\qquad k = \overline{0, n-1}$ (6.14)

Bằng phương pháp truy hồi , từ (7.14) suy ra:

$$P_{k+1} = \frac{\lambda_k}{\mu_{k+1}} P_k = \frac{\lambda_k}{\mu_{k+1}} . \frac{\lambda_{k-1}}{\mu} .P_k = ... = \frac{\lambda_k \lambda_{k-1} ... \lambda_1 \lambda_0}{\mu_{k+1} \mu_k ... \mu_1} P_0$$

$$\Rightarrow P_{k+1} = \left[\prod_{i=0}^{k} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}} \right] .P_0 \; , \qquad k = \overline{0, n-1} \qquad (6.15)$$

Từ điều kiện $\sum_{k=0}^{n} P_k = 1 \Rightarrow \sum_{k=0}^{n} \left[\prod_{i=0}^{k} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}} \right] .P_0 = 1$

$$\Rightarrow P_0 + P_0. \sum_{k=1}^{n} \left[\prod_{i=0}^{k} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}} \right] = 1 \Rightarrow P_0 = \frac{1}{1 + \left[\prod_{i=0}^{k} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}} \right]} \qquad (6.16)$$

Vậy xác suất xuất hiện trạng thái x_{k+1} của quá trình "huỷ và sinh" dưới tác động của dòng tối giản (quá trình dừng) là P_{k+1} cho ở (6.15) với P_0 cho ở (6.16).

6.3 HỆ THỐNG PHỤC VỤ TỪ CHỐI

Hệ thống phục vụ từ chối do Erlange đề xuất lần đầu, nên người ta còn gọi là hệ thống phục vụ Erlange

6.3.1. Mô tả hệ thống:

Hệ thống phục vụ Erlange gồm n kênh phục vụ năng suất như nhau, bằng μ. Dòng yêu cầu đến hệ thống là dòng tối giản, cường độ λ yêu cầu/1 đơn vị thời gian. Thời gian phục vụ của các kênh tuân theo luật chỉ số với tham số μ. Nguyên tắc phục vụ của hệ thống như sau: mỗi yêu cầu đến hệ thống gặp lúc có ít nhất một kênh rỗi thì được nhận vào phục vụ tại một kênh rỗi bất kỳ, ngược lại thì bị từ chối và phải đi ra khỏi hệ thống.

6.3.2 Quá trình thay đổi trạng thái của hệ thống.

Ký hiệu $x_0(t)$ là trạng thái hệ thống không có yêu cầu, $x_1(t)$ là trạng thái hệ thống có một yêu cầu (có 1 kênh bận),...., x_k là trạng thái hệ thống có k yêu cầu đang được phục vụ (có k kênh bận), $k = \overline{0, n}$.

Dưới tác động của dòng vào, cường độ λ các trạng thái của hệ thống chuyển dịch theo hướng $x_0 \to x_1 \to .... \to x_k$.

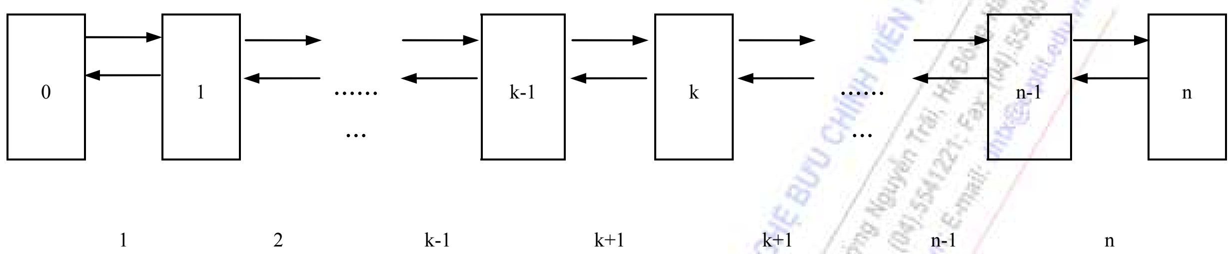
Ngược lại, dưới tác động của các dòng phục vụ tại các kênh, hệ thống sẽ chuyển dịch trạng thái theo hướng $x_k \to x_{k-1} \to ... \to x_1 \to x_0$. Cụ thể:

Dưới tác dụng của dòng vào, cường độ λ lần lượt trạng thái của hệ thống sẽ chuyển dịch từ $x_k \to x_{k+1}$, $k = \overline{0, n-1}$.

Dưới tác động của dòng phục vụ tại k kênh, với cường độ kμ, hệ thống sẽ chuyển dịch từ trạng thái $x_k \rightarrow x_{k-1}$ ($k = \overline{1,n}$).

Dưới tác động của dòng phục vụ của n kênh, , hệ thống sẽ chuyển dịch từ trạng thái x_n sang trạng thái x_{n-1}.

Từ phân tích ở trên, ta sẽ được sơ đồ trạng thái của hệ thống phục vụ Erlange như sau:



Đây là sơ đồ trạng thái theo quy luật "hủy và sinh". Theo kết quả nhận được từ (6.4), ta có:

$$P_{k+1} = \left[\prod_{i=0}^{k} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}}\right] P_0, k = \overline{0, n-1} \quad (6.17)$$

$$\Rightarrow P_k = \left[\prod_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda i}{\mu_{i+1}}\right] .P_0, \quad k = \overline{0, n} \quad (6.18)$$

Trong đó $P_0 = \dfrac{1}{1 + \sum_{k=1}^{n}\left(\prod_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}}\right)}$ (6.19)

Đối với hệ thống đang xét, ta có: $\lambda_i = \lambda$ và $\mu_{i+1} = (i+1)\mu$, $i = \overline{0, n-1}$

Từ (7.18) suy ra:

$P_k = \left[\prod_{i=o}^{-k-1} \frac{\lambda i}{\mu_{i+1}}\right] .P_0 = \dfrac{\lambda.\lambda...\lambda}{1\mu.2\mu...k\mu} P_0 = \dfrac{\lambda^k}{k!\,\mu^k} - P_0$ Đặt $\alpha = \dfrac{\lambda}{\mu}$

Ta có: $P_k = \dfrac{\alpha^k}{k!} P_0$ với P_0 cho ở (6.22) và $\alpha = \dfrac{\lambda}{\mu}$, ta có:

$$P_0 = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha^k}{k!}} = \frac{1}{\sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha^k}{k!}} \quad (6.20)$$

Để thuận tiện cho nghiên cứu khi sử dụng các bảng phụ lục về các qui luật phân phối xác suất thông dụng, ta đưa vào các hàm xác suất sau:

$$P(k,\alpha) = \frac{e^{-\alpha}.\alpha^k}{k!}; \; k = \overline{0, n-1}; \; R(n,\alpha) = \sum_{k=0}^{n} P(k,\alpha)$$

Hàm P (k,α) và P (k,α) có các tính chất sau:

Tính chất 1: $\lim\limits_{\alpha \to 0} P(k, \alpha) = \begin{cases} 1 \text{ nếu } k = 0 \\ 0, \text{nếu } k \neq 0 \end{cases}$

Tính chất 2: $\lim\limits_{\alpha \to a} P(k, \alpha) = \begin{cases} 0, & a = 0 \\ 1, & a = \infty \end{cases}$

[Nhớ lại: $e^{\alpha} = 1 + \alpha + \frac{\alpha^2}{21} + \dots + \frac{\alpha^n}{n!}$]

Tính chất 3: $\lim\limits_{n \to \infty} R(n, \alpha) = \phi\left(\frac{n + 0{,}5 - \alpha}{\sqrt{\alpha}}\right)$

Trong đó $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} .dt$: là hàm phân bố xác suất chuẩn.

Trong thực tế nếu n> 20, thì $R(n, \alpha) = \phi\left(\frac{n + 0{,}5 - \alpha}{\sqrt{\alpha}}\right)$

Với ký hiệu trên, ta có:

$$P_k = \frac{\alpha^k}{k!} P_0 = \frac{\alpha^k e^{-\alpha}}{k!} \frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{n} e^{-\alpha} \frac{\alpha^k}{k!}} = \frac{P(k, \alpha)}{R(n, \alpha)} \qquad (6.21)$$

$(k = \overline{0, n-1})$

6.4.3. Các chỉ tiêu đánh giá chất lượng phục vụ của hệ thống phục vụ từ chối Erglange

a. Xác suất trong hệ thống không có yêu cầu (hệ thống rỗi)

$$\text{Từ (7.21)} \Rightarrow P_0 = \frac{P_{(0,\alpha)}}{R_{(n,\alpha)}} = \frac{e^{-a}}{R_{(n,\alpha)}} \qquad (6.22)$$

Ý nghĩa: Xác suất P_0 cho biết tại thời điểm bất kỳ (ở trạng thái dừng), khả năng trong hệ thống không có yêu cầu (hệ thống rỗi)

P_0 cũng cho biết tỷ lệ thời gian tất cả các kênh của hệ thống phục vụ làm việc so với thời gian hoạt động của nó.

b. Xác suất từ chối phục vụ yêu cầu, ký hiệu P_{tc}

$$P_{tc} = P_n = \frac{P_{(n,\alpha)}}{R_{(n,\alpha)}} \qquad (6.23)$$

Ý nghĩa: Xác suất từ chối phục vụ yêu cầu chính là xác suất trong hệ thống tất cả các kênh đều làm việc (đang bận).

Nó cho biết khả năng một yêu cầu đến hệ thống bị từ chối đồng thời còn cho biết tỷ lệ số yêu cầu đến hệ thống bị từ chối, nó chỉ ra rằng trong hệ thống đang có n yêu cầu được phục vụ.

c. Xác suất phục vụ yêu cầu, ký hiệu P_v

$$P_v = 1\text{-}P_{tc} = 1 - \frac{P_{(n,\alpha)}}{R_{(n,\alpha)}} \qquad (6.24)$$

<u>Ý nghĩa</u>: Xác suất phục vụ yêu cầu cho biết khả năng một yêu cầu đến hệ thống được nhận vào phục vụ. Đồng thời cho biết tỷ lệ số yêu cầu được phục vụ so với tổng số yêu cầu đến hệ thống.

d. Số trung bình các kênh bận, ký hiệu $\overline{n}_b$

$$\overline{n}_b = \sum_{k=0}^{n} kP_k = \sum_{k=0}^{n} k\frac{P_{(k,\alpha)}}{R_{(n,\alpha)}} = \sum_{k=0}^{n}\frac{\alpha^k}{k!}P_0 = \alpha\sum_{k=1}^{n}\frac{\alpha^k}{k!}P_0$$

$$= \alpha(1\text{-}P_n) = \alpha\left(1 - \frac{P(n,\alpha)}{R(n,\alpha)}\right) = \alpha.P_v \qquad (6.25a)$$

<u>Ý nghĩa</u>: Số trung bình các kênh bận cho biết trung bình trong hệ thống có bao nhiêu kênh làm việc.

$\overline{n}_b$ là kỳ vọng toán học của kênh bận.

<u>Chú ý:</u>

- Từ (7.25a)suy ra: nếu biết $\overline{n}_b$ thì chúng ta có thể tính P_v như sau:

$$P_v = \frac{\overline{n}_b.\mu}{\lambda} = \frac{\overline{n}_b}{\alpha} \qquad (\alpha = \frac{\lambda}{\mu}) \qquad (6.25b)$$

Ta thấyλ_0 = $\overline{n}_b\,\mu$ chính là số yêu cầu được phục vụ trong một đơn vị thời gian. Ngược lại nếu biết xác suất phục vụ yêu cầu P_v thì ta có thể tính được $\overline{n}_b$ theo công thức:

$$\overline{n}_b = \alpha.P_v \qquad (6.26a)$$

<u>Ỳ nghĩa</u>: Số trung bình các kênh rỗi cho biết trung bình trong hệ thống có bao nhiêu kênh không làm việc.

<u>Chú ý:</u>

1. Nếu biết $\overline{n}_b$ thì tính toán được $\overline{n}_r$ như sau:

$$\overline{n}_r = n - \overline{n}_b \qquad (6.26b)$$

2. Nếu biết số $\overline{n}_r$ thì ta tính được $\overline{n}_b$, như sau:

$$\overline{n}_b = n - \overline{n}_r \qquad (6.26c)$$

e. Hệ số bận của kênh phục vụ, ký hiệu k_b

$$k_b = \frac{\overline{n}_b}{n} \qquad (6.27)$$

Ỳ nghĩa: Hệ số bận cho biết tỷ lệ số kênh bận của hệ thống được huy động để phục vụ các yêu cầu. Đồng thời k_b còn cho biết tỷ lệ thời gian kênh bận so với thời gian hoạt động của kênh.

h. Hệ số rỗi của kênh phục vụ, ký hiệu k_r

$$k_r = \frac{\overline{n}_b}{n} \qquad (6.28)$$

Ý nghĩa: Hệ số rỗi của kênh phục vụ cho biết tỷ lệ số kênh của hệ thống không được huy động phục vụ các yêu cầu, đồng thời cho biết tỷ lệ thời gian kênh không làm việc so với thời gian hoạt động của kênh.

i. Tổng chi phí và tổn thất, ký hiệu G

$$G = T\,(\lambda.P_{tc}.q_{tc} + \overline{n}_b.q_k + \overline{n}_r.q_{tb}) \qquad (6.29)$$

Trong đó: q_{tc} là giá trị tổn thất do phải bị từ chối (bị đi ra khỏi hệ thống) của một yêu cầu.

q_k là chi phí cho một kênh làm việc trong một đơn vị thời gian.

q_{tb} là tổn thất trung bình khi một kênh không làm việc trong một đơn vị thời gian.

T là thời gian hoạt động của hệ thống.

Ý nghĩa: G cho biết tổng phí tổng do phải chi phí cho việc phục vụ của các kênh trong hệ thống và tổn thất do các yêu cầu bị từ chối, do lãng phí các kênh không làm việc, khi hệ thống hoạt động.

k. Hiệu quả phục vụ của hệ thống, ký hiệu là E

E = C – G.

Trong đó:

- G là tổng chi phí và tổn thất của hệ thống phục vụ.
- C là giá trị phục vụ của cả hệ thống trong thời gian hoạt động hệ thống phục vụ.

$$C = P_v.\lambda.c.T$$

λ: cường độ dòng vào; c: là giá trị phục vụ một yêu cầu; T là thời gian phục vụ của hệ thống.

Ý nghĩa: Hiệu quả phục vụ của hệ thống cho biết trong một khoảng thời gian hoạt động T, sau khi đã trừ phần giá trị tổn thất và chi phí, hoạt động còn thực sự thu được một giá trị phục vụ bao nhiêu.

6.3.4. Bài toán mẫu.

Cần phải thiết kế một nhà xưởng để sửa chữa, nâng cấp thiết bị viễn thông sao cho bảo đảm 95% thiết bị đưa đến xưởng được sửa chữa, nâng cấp. Biết rằng hàng năm (365 ngày) trung bình có một khối lượng thiết bị cần đưa tới xưởng sửa chữa, nâng cấp là Q = 75.000 tấn.

Thiết bị được đưa tới xưởng theo từng bộ với trọng lượng trung bình là 455 tấn/ bộ. Trung bình $1m^2$ diện tích nhà xưởng thì sửa chữa, nâng cấp được 0,65 tấn thiết bị. Thời gian sửa chữa, nâng cấp thiết bị trong xưởng trung bình là 10 ngày/bộ.

Nguyên tắc làm việc của xưởng như sau: thiết bị đưa tới xưởng vào lúc trong xưởng còn có diện tích chứa được ít nhất một bộ thiết bị, thì được nhận vào sửa chữa, nâng cấp. Ngược lại nếu diện tích nhà xưởng đã hết thì bộ thiết bị đó bị từ chối phục vụ, không được vào xưởng sửa chữa, nâng cấp.

<u>Phân tích và giải</u>: Vấn đề cần phải giải quyết của bài toán là chỉ ra diện tích nhà xưởng cần phải xây dựng để thoả mãn tất cả các yêu cầu của xưởng sửa chữa, nâng cấp. Xưởng sửa chữa, nâng cấp thiết bị ở trên chính là một hệ thống phục vụ từ chối kiểu Erglange, trong đó diện tích nhà xưởng chính là các kênh phục vụ. Một kênh phục vụ tương ứng với một đơn vị diện tích S để đủ chứa được một bộ thiết bị đưa đến xưởng.

Dòng yêu cầu phục vụ ở đây là các bộ thiết bị đưa đến xưởng để sửa chữa, nâng cấp.

Thời gian phục vụ là thời gian sửa chữa, nâng cấp một bộ thiết bị trong xưởng.

Để xác định được tổng diện tích nhà xưởng cần xây dựng đảm bảo phục vụ được 95% thiết bị đưa tới nhà xưởng được phục vụ, ta phải xác định số đơn vị diện tích S. Theo bài toán, với các giả thiết về cường độ dòng vào λ, dòng phục vụ là μ. Ta phải có nhà xưởng để đảm bảo xác suất phục vụ yêu cầu $P_v \geq 0,95$ hoặc xác suất từ chối phục vụ là $P_{tc} \leq 0,05$.

Để xác định được số đơn vị S, ta lần lượt cho n là số đơn vị diện tích S, nhận các giá trị n = 1,2 ... và tính xác suất P_{tc} (hoặc P_v) tương ứng với tham số λ và μ đã biết, cho đến khi tại $n = n_0$ nào đó mà $P_{tc} \leq 0,05$ thì dừng lại. Từ đó suy ra diện tích $\Delta = n_0.S$ chính là diện tích nhà xưởng cần xây dựng.

Theo các số liệu của bài toán, ta tính được:

$$\lambda = \frac{Q}{455.365} = \frac{75.000\text{tấn}}{455\text{tấn}/\text{bộ}.365\text{ngày}} = 0,45 \text{ bộ/ngày}$$

$$\mu = \frac{1}{\bar{t}_{tb}} = \frac{1}{10\text{ngày}/\text{bộ}} = 0,1 \text{ bộ/ngày}$$

$$\alpha = \frac{\alpha}{\mu} = \frac{0,45\text{bộ}/\text{ngày}}{0,1\text{bộ}/\text{ngày}} = 4,5$$

Lần lượt cho n= 1, 2, 3......áp dụng công thức (7.26) ta tính được kết quả sau:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
P_{tc}	0,81	0,64	0,40	0,35	0,243	0,154	0,09	0,013	0,009

Nhìn vào bảng kết quả trên, ta thấy với n = 8 thì $P_{tc} = 0,013 < 0,05$ và do đó $P_v = 1 - P_{tc} = 1 - 0,013 = 0,987 > 0,95$.

Nghĩa là số thiết bị đưa đến được sửa chữa, nâng cấp trong năm đạt tỷ lệ:

0,987 > 0,95.

Diện tích nhà xưởng cần xây dựng là $\Delta = 8.S$ Ta có:

$$S = \frac{455\text{tấn}/\text{bộ}}{0{,}65\text{tấn}/m^2} = 700m^2 \Rightarrow \Delta = 8.700m^2 = 5.600m^2$$

6.4 HỆ THỐNG PHỤC VỤ CHỜ VỚI ĐỘ DÀI HÀNG CHỜ VÀ THỜI GIAN CHỜ KHÔNG HẠN CHẾ (HỆ THỐNG PHỤC VỤ THUẦN NHẤT)

6.4.1 Mô tả hệ thống phục vụ

Hệ phục vụ gồm n kênh phục vụ, năng suất như nhau, bằng μ. Thời gian phục vụ của kênh phân bố theo luật chỉ số với tham số α. Dòng yêu cầu đến hệ thống là dòng tối giản với cường độ λ. Nguyên tắc phục vụ của hệ thống là: mỗi yêu cầu đến hệ thống gặp lúc có ít nhất một kênh rỗi thì được nhận vào phục vụ tại một kênh rỗi bất kỳ, ngược lại yêu cầu đến hệ thống gặp lúc n kênh phục vụ đều bận thì phải "xếp hàng" chờ cho đến khi ít nhất một kênh rỗi thì được nhận vào phục vụ . Các yêu cầu đến trước được phục vụ trước.

6.4.2 Sơ đồ trạng thái của hệ thống

Ký hiệu x_0 : Trạng thái trong hệ thống không có yêu cầu

Ký hiệu x_1 :Trạng thái trong hệ thống có một yêu cầu được phục vụ

Ký hiệu x_k :Trạng thái trong hệ thông có k yêu cầu được phục vụ

Ký hiệu x_{n+l}: Trạng thái trong hệ thống có n yêu cầu đang được phục vụ và l yêu cầu đang chờ

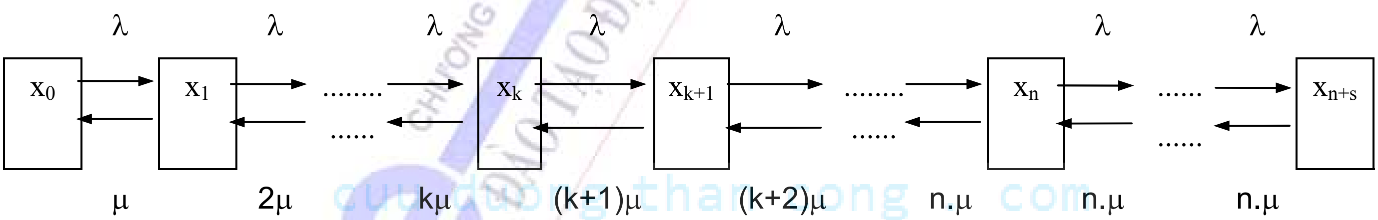
Ký hiệu x_{n+s}: Trạng thái trong hệ thống có n yêu cầu đang được phục vụ và s yêu cầu đang chờ ($0 \le s < +\infty$)

Theo nguyên tắc phục vụ đã cho, ta thấy dưới tác động của dòng vào, trạng thái của hệ thống biến đổi từ $x_0 \to x_1 \to x_2 \to x_3 \to \ldots \to x_n$ và trạng thái $x_n \to x_{n+1} \to \ldots. \to x_{n+1} \to \ldots$

Đồng thời dưới tác động của các dòng phục vụ cường độ $k\mu$, các trạng thái của hệ thống có thể chuyển chiều ngược lại:

$x_{n+s+1} \to x_{n+s} \to x_n \ldots. \to x_1 \to x_0$

Từ phân tích trên, ta suy ra sơ đồ trạng thái của hệ thống:



Theo sơ đồ trạng thái ta thấy hệ thống phục vụ trên có trạng thái biến đổi không theo qui luật "huỷ và sinh".

6.4.3 Phương trình trạng thái

Dựa vào sơ đồ trạng thái và qui tắc thiết lập phương trình trạng thái ta được:

$$P_{k+1} = \left(\prod_{i=0}^{k} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}} \right) . P_0$$

$$P_k = \left(\prod_{i=0}^{k-1}\frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}}\right).P_0 \qquad (k=\overline{1,n}) \qquad (6.30)$$

Trong biểu thức của P_k ta thay:

$\lambda_i = \lambda$, $(i=\overline{1,k-1},\ k=\overline{1,n})$

$\mu_{i+1} = (i+1).\mu$, $(i=\overline{1,k-1},\ k=\overline{1,n})$

$\mu_{i+1} = n.\mu$ với $i = \overline{n+1,n+2})$

Tacó: $P_k = \prod_{i=0}^{k-1}\frac{\lambda}{(i+1)\mu}.P_0$

$$\Rightarrow P_k = \frac{\lambda}{\mu}.\frac{\lambda}{2\mu}\dots\frac{\lambda}{k\mu}.P_0 = \frac{\lambda_k}{k!u^k} = \frac{1}{k!}.\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k.P_0$$

Đặt $\alpha = \frac{\lambda}{\mu} \Rightarrow P_k = \frac{\alpha^k}{k!}.P_0$, $\quad k=\overline{1,n}$ $\qquad (6.31)$

$$P_{n+s} = \left(\prod_{i=0}^{n+s-1}\frac{\lambda_i}{\mu_{i+i}}\right).P_0$$

$$= \frac{\lambda}{\mu}.\frac{\lambda}{2\mu}\dots\frac{\lambda}{n\mu}.\frac{\lambda}{n\mu}\dots\frac{\lambda}{n\mu}.P_0$$

$$= \frac{1}{n!}.\frac{\lambda^n}{\mu^n}.\frac{\lambda^s}{(n\mu)^2}.P_0$$ Đặt $\alpha = \frac{\lambda}{\mu}$, ta có:

$$P_{n+s} = \frac{1}{n!}\alpha^n.\alpha^s.\frac{1}{n^s}.P_s = \frac{\alpha^{n+s}}{n!n^s}.P_0$$

Vậy: $P_{n+s} = \frac{\alpha^{n+s}}{n!n^s}.P_0$ $\quad (s>1) \qquad (6.32)$

Đối với hệ thống phục vụ đang xét, ta cần xác định P_0?

Theo (6.19) ta có:

$$P_0 = \frac{1}{1+\sum_{k=1}^{n}\left(\prod_{i=0}^{k-1}\frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}}\right)} = \frac{1}{\sum_{k=0}^{n}\frac{\alpha^k}{k!}+\sum_{s=1}^{\infty}\frac{\alpha^{n+s}}{n!n^s}}$$

Xét chuỗi $\sum_{s=1}^{\infty}\frac{\alpha^{n+s}}{n!n^s} = \frac{\alpha^n}{n!}\sum_{s=1}^{\infty}\left(\frac{\alpha}{n}\right)^s$ hội tụ đến $\frac{\alpha^n}{n!}.\frac{\frac{\alpha}{n}}{1-\frac{\alpha}{n}} = \frac{\alpha^{n+1}}{n!(n-\alpha)}$

(Vì $\frac{\alpha}{n}<1$). Vậy ta có:

$$P_0=\frac{1}{\sum_{k=0}^{n}\frac{\alpha^k}{k!}+\frac{\alpha^{n+1}}{n!(n-\alpha)}}=\frac{e^{-\alpha}}{\sum_{k=0}^{n}\frac{\alpha^k}{k!}e^{-\alpha}+\frac{\alpha^n}{n!}e^{-\alpha}.\frac{\alpha}{(n-\alpha)}}$$

$$\rightarrow P_0=\frac{e^{-\alpha}}{R(n,\alpha)+\frac{\alpha}{n-\alpha}P(n,\alpha)} \qquad (6.33)$$

6.4.4. Các chỉ tiêu đánh giá chất lượng phục vụ của hệ thống

a. Xác suất hệ thống ở trạng thái rỗi (x_0), ký hiệu P_0

$$P_0=\frac{e^{-\alpha}}{R(n,\alpha)+\frac{\alpha}{n-\alpha}P(n,\alpha)} \qquad (6.34)$$

P_0: hệ thống ở trạng thái rỗi hay trạng thái không có yêu cầu được phục vụ

b. Xác xuất hệ thống ở trạng thái có yêu cầu phải chờ, ký hiệu P_c

$$P_c=P_n+P_{n+1}+\ldots+P_{n+s}+\ldots=\sum_{s=0}^{\infty}P_{n+s}=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\alpha^{n+s}}{n!n^s}.P_0$$

$$=P_0\frac{\alpha^n}{n!}\sum_{s=0}^{\infty}\left(\frac{\alpha}{n}\right)^s=P_0.\frac{\alpha^n}{n!}.\frac{1}{1-\frac{\alpha}{n}}$$

[vì chuỗi $\sum_{s=0}^{\infty}\left(\frac{\alpha}{n}\right)^s\rightarrow\frac{1}{1-\frac{\alpha}{n}}$]

Thay P_0 vào biểu thức của P_c, được:

$$P_c=\frac{\alpha^n}{n!}.e^{-\alpha}.\frac{1}{(1-\alpha/n)\left[R(n,\alpha)+\frac{\alpha/n}{(1-\alpha/n)}P(n,\alpha)\right]}$$

Đặt $x=\frac{\alpha}{n}=\frac{\lambda}{n\mu}$ ta có:

$$P_c=\frac{P(n,\alpha)}{(1-x)\left[R(n,\alpha)+\frac{x}{1-x}P(n,\alpha)\right]} \qquad (6.35)$$

Xác suất P_c cho biết xác suất một yêu cầu đến hệ thống phải chờ, đồng thời còn cho biết tỷ lệ số yêu cầu đến hệ thống phải chờ là bao nhiêu.

c. Số trung bình các yêu cầu phải chờ, ký hiệu $\overline{m}_c$

$$\overline{m}_c = \sum_{s=0}^{\infty} s.P_{n+s} = \sum_{s=1}^{\infty} s.\frac{\alpha^{n+s}}{n!n^s}P_0 = \frac{\alpha^n}{n!}P_0\sum_{s=0}^{\infty} s.\left(\frac{\alpha}{n}\right)^s$$

$$= \frac{\alpha^n}{n!}P_0\sum_{s=0}^{\infty} s.x^s = \frac{\alpha^n}{n!}P_0\,(x + 2x^2 + 3x^3 + ...)$$

$$= \frac{\alpha^n}{n!}P_0(1 + x + x^2 + ...)(x + x^2 + ...) = \frac{\alpha^n}{n!}P_0\,\frac{1}{1-x}.\frac{x}{1-x} = \frac{x}{(1-x)^2}.\frac{\alpha^n}{n!}.P_0$$

Thay P_0 cho ở (7.34) vào ta được:

$$\overline{m}_c = \frac{x}{(1-x)^2}\frac{\alpha}{n!}e^{-\alpha}\frac{1}{R(n,\alpha) + \frac{\alpha/n}{1-\alpha/n}P(n,\alpha)}$$

Hay $$\overline{m}_c = \frac{x}{(1-x)^2}.\frac{P(n,\alpha)}{\left[R(n,\alpha) + \frac{x}{1-x}P(n,\alpha)\right]} \qquad (6.36)$$

d. Thời gian chờ trung bình, ký hiệu $\overline{t}_c$

$$\bar{t}_c = \sum_{t_c=0}^{\infty} t_c.P(T_c = t_c) \qquad \text{(Tính theo kỳ vọng toán học)}$$

Trong đó T_c là thời gian chờ của mỗi yêu cầu đến hệ thống.

t_c là giá trị T_c có thể nhận trong đó t_c được xác định như sau:

$t_c =$
- 0, nếu yêu cầu đến hệ thống, mà trong hệ thống đang có số yêu cầu ít hơn n.
- $\frac{1}{n\mu}$, nếu yêu cầu đến hệ thống, mà trong hệ thống đang có n yêu cầu.
- $\frac{2}{n\mu}$, nếu yêu cầu đến hệ thống, mà trong hệ thống đang có n + 1 yêu cầu, trong đó có 1 yêu cầu đang chờ
- ….
- $\frac{s}{n\mu}$, nếu yêu cầu đến hệ thống, mà trong hệ thống đang có (n+ s -1) yêu cầu, trong đó có (s-1) yêu cầu đang chờ

P (T_c=t_c) là xác suất xuất hiện sự kiện ($T_c = t_c$), được xác định như sau:

$P(T_c = 0) = P$ (xác suất hệ thống có số yêu cầu đang phục vụ ít hơn n)

$P(T_c = \frac{2}{n\mu}) = P_{n+1}$ $P(T_c = \frac{s}{n\mu}) = P_{n+s-1}$

$$\Rightarrow \bar{t}_c = \sum_{t_c=0}^{\infty} t_c P[T_c = t_c] = 0.P_0 + \sum_{t_c=1}^{\infty} t_c.P(T_c = t_c)$$

$\Rightarrow \bar{t}_c = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{s}{n\mu} P_{n+s-1}$. Thay P_{n+s-1} cho ở (6.32), ta được:

$$\overline{t_c} = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{s}{n\mu} . \frac{\alpha^{n+s-1}}{n!n^{s-1}} .P_0 = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{s}{n\mu} . \frac{n}{\alpha} . \frac{\alpha^{n+s}}{n!n^s} .P_0$$

$$= \sum_{s=1}^{\infty} \frac{s}{\lambda} . \frac{\alpha^{n+s}}{n!n^s} .P_0 = \frac{1}{\lambda} \sum_{s=1}^{\infty} s.P_{n+s} = \frac{\overline{m}_c}{\lambda}$$

$$\Rightarrow \bar{t}_c = \frac{x}{\lambda(1-x)^2} . \frac{P(n,\alpha)}{\left[R(n,\alpha) + \frac{x}{1-x} P(n,\alpha)\right]} \quad (6.37)$$

e. Số trung bình các kênh rỗi, ký hiệu $\overline{n}_r$

$$\overline{n}_r = \sum_{k=0}^{n} (n-k) P_k \quad (6.38)$$

g. Số trung bình các kênh bận, ký hiệu $\overline{n}_b$

$$\overline{n}_b = n - \overline{n}_r \text{ hoặc } \overline{n}_b = \frac{\lambda}{\mu} Pv = \alpha Pv \quad (6.39)$$

Trong đó $\overline{n}_r$ là số trung bình các kênh rỗi. Mặt khác, đối với hệ thống đang xét ta có: $P_v = 1$, nên từ $P_v = \frac{\overline{n}_b .\mu}{\lambda} \rightarrow \overline{n}_b = \frac{\lambda}{\mu}.1 = \alpha$.

Vậy $\overline{n}_b = \frac{\lambda}{\mu} = \alpha$ (6.40)

h. Hệ số bận và hệ số rỗi của kênh, ký hiệu k_b, k_r

$$k_b = \frac{\overline{n}_b}{n} \quad (a) \quad (6.41)$$

$$k_r = \frac{\overline{n}_r}{n} \quad (b)$$

i. Tổng chi phí và phí tổn trong thời gian hoạt động T của hệ thống, ký hiệu G

$$G = T\,(q_c.\overline{m}_c + \overline{n}_b.q_k + \overline{n}_r.q_{tb}) \qquad (6.42)$$

Trong đó:

- q_c là tổn thất do phải chờ của một yêu cầu trong một đơn vị thời gian.
- q_k và q_{tb} là các đại lượng cho ở hệ thống phục vụ từ chối.

k. Hiệu qủa phục vụ của hệ thống, ký hiệu E

$$E = C - G \qquad (6.43)$$

Trong đó: - C là giá trị phục vụ thu được của hệ thống trong thời gian T.

Ở đây $C = \lambda cT$ (c, λ,T cho ở các phần trên)

6.5. HỆ THỐNG PHỤC VỤ CHỜ VỚI ĐỘ DÀI CHỜ HẠN CHẾ VÀ THỜI GIAN CHỜ KHÔNG HẠN CHẾ

6.5.1. Mô tả hệ thống

Một hệ thống phục vụ công cộng có n kênh phục vụ, năng suất các kênh bằng nhau và bằng μ, dòng yêu cầu đến hệ thống là Poát xông dừng, mật độ λ. Thời gian phục vụ một yêu cầu của kênh tuân theo luật chỉ số.

Nguyên tắc phục vụ: Một yêu cầu đến hệ thống gặp lúc có ít nhất một kênh rỗi thì được nhận vào phục vụ ở một trong các kênh rỗi nào đó. Ngược lại nếu tất cả các kênh đều bận thì phải xếp hàng chờ nếu số yêu cầu chờ bé hơn m.

6.5.2. Trạng thái của hệ thống

1. Sự thay đổi trạng thái:

Khi xét một hệ thống phục vụ vấn đề ta quan tâm lớn nhất hiệu quả phục vụ của hệ thống. Vì vậy đặc trưng phục vụ được chọn để xác định trạng thái của hệ thống là số kênh bận tại mỗi thời điểm.

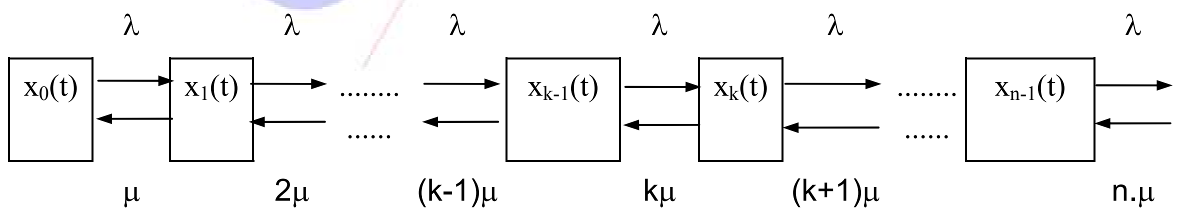
Gọi $x_k(t)$ là trạng thái hệ thống có k kênh bận tại thời điểm t. (k = 0,1,2,3.....,n)

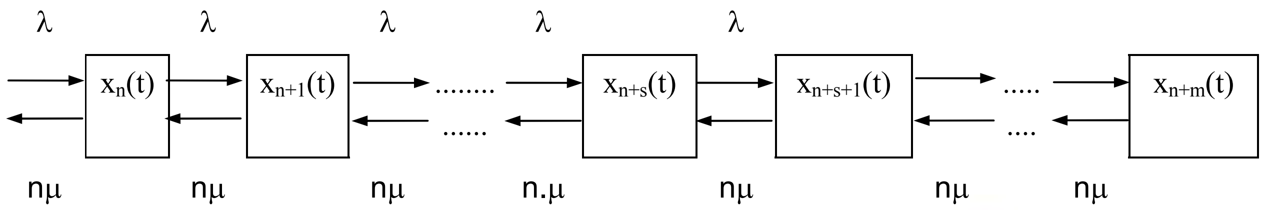
$X_{n+s}(t)$ là trạng thái hệ thống có n kênh bận và s yêu cầu phải chờ, tại thời điểm t (s = 1,2,.....,m)

Dưới tác động của dòng yêu cầu đến hệ thông, cường độ λ, hệ thống chuyển dịch từ trạng thái $x_0(t) \to x_1(t) \to x_2(t) \dots \to x_k(t)\dots$

Dưới tác động của dòng phục vụ, cường độ $k\mu$, hệ thống lại chuyển dịch từ trạng thái $x_k(t) \to x_{k-1}(t) \to x_2(t) \dots \to x_1(t) \to x_0(t)$.

Từ đó ta có sơ đồ trạng thái của hệ thống:





Quá trình thay đổi trạng thái của hệ thống theo qui luật "huỷ và sinh"

2. Hệ phương trình trạng thái:

Dựa vào qui tắc thiết lập phương trình trạng thái, ta được:

$$\begin{cases} 0 = -\lambda P_0(t) + \mu P_1 \\ 0 = -\lambda P_1(t) - \mu P_1 + \lambda P_0 + 2\mu P_2 \\ \dots\dots\dots \\ 0 = \lambda P_k - k\mu P_k + \lambda P_{k-1} + (k+1)\mu P_{k+1} \\ \dots\dots\dots \\ 0 = -n\mu P_n - \lambda P_n + \lambda P_{n-1} + n\mu P_{n+1} \\ \dots\dots\dots \\ 0 = -n\mu P_{n+s} - \lambda P_{n+s} + \lambda P_{n+s-1} + n\mu P_{n+s+1} \\ \dots\dots\dots \\ 0 = -n\mu P_{n+m} + \lambda P_{n+m-1} \end{cases} \qquad (6.44)$$

Với điều kiện: $\sum_{k=0}^{n} P_k = 1$ (*)

Đặt $\alpha = \dfrac{\lambda}{\mu}$ từ (7.44) ta suy ra $P_k = \dfrac{\alpha^k}{k!} P_0$ và $P_{n+s} = \dfrac{\alpha^n \alpha^s}{n! n^s} P_0$ (6.45)

Nếu $\dfrac{\alpha}{n} = 1$ thì $P_{n+s} = \dfrac{\alpha^n}{n!} P_0$

Trong (6.45) đặt $x = \dfrac{\alpha}{n}$, và áp dụng công thức (*) ta có:

$$P_0\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha^k}{k!} + \frac{\alpha^k}{n!} \sum_{s=1}^{m} x^s\right) = 1$$

Vậy:

+ Khi $x \neq 1$ thì $P_0 = \dfrac{1}{\sum_{k=0}^{n} \dfrac{\alpha^k}{k!} + \dfrac{\alpha^n}{n!} \sum_{s=1}^{m} x^s} = \dfrac{1}{\sum_{k=0}^{n} \dfrac{\alpha^k}{k!} + \dfrac{\alpha^n}{n!} \dfrac{(1-x^m)}{1-x} x}$

Hay $P_0 = \dfrac{P(0,\alpha)}{R(n,\alpha)+P(n,\alpha)\dfrac{x(1-x)^m}{1-x}}$ $\quad (P(0,\alpha) = e^{-\alpha})$

+ Khi x = 1 thì $P_0 = \dfrac{P(0,\alpha)}{R(\alpha,n)+P(\alpha,n).m}$ (6.46)

6.5.3. Các chỉ tiêu đánh giá chất lượng hoạt động của hệ thống

1. Xác xuất hệ thống có n kênh rỗi $\quad P_r = P_0$ (6.47)

2. Xác suất một yêu cầu đến hệ thống phải chờ, P_c...

$$P_c = \sum_{s=0}^{m-1} P_{n+s} = \frac{\alpha^n}{n!}\sum_{s=0}^{m-1} x^s.P_0 \qquad (6.48)$$

+ Khi x ≠ 1:

$$P_c = \frac{P(n,\alpha)}{R(\alpha,n)+P(\alpha,n)\dfrac{x(1-x^m)}{1-x}}.\frac{1-x^m}{1-x} \qquad (6.48a)$$

+ Khi x = 1:

$$P_c = m.P_n \qquad (6.48b)$$

3. Xác suất một yêu cầu bị từ chối P_{tc}

$$P_{tc} = P_{n+m} = \frac{\alpha^n}{n!}\,x^m P_0 \qquad (6.49)$$

+ Khi x ≠ 1, từ (6.49) và từ định nghĩa hàm P(α,n) suy ra:

$$P_{tc} = \frac{P(\alpha,n)}{R(\alpha,n)+P(\alpha,n)\dfrac{x(1-x^m)}{1-x}}.x^m \qquad (6.49a)$$

+ Khi x = 1, ta có:

$$P_{tc} = P_{n+m} = \frac{\alpha^n}{n!}.P_0 = P_n \qquad (6.49b)$$

4. Xác suất một yêu cầu đến hệ thống được phục vụ ngay: P_{opv}

$$P_{opv} = 1 - P_{tc} - P_c \qquad (6.50)$$

5. Số trung bình kênh bận và kênh rỗi ($\overline{n}_b$ và $\overline{n}_r$)

a) $$\overline{n}_b = \sum_{k=0}^{n} k.P_k + n\sum_{s=1}^{m} P_{n+s} = \sum_{k=1}^{n} k.P_k + n\sum_{s=1}^{m} P_{n+s} \qquad (6.51)$$

+ Khi x ≠ 1 ta có:

$$\overline{n}_b = \frac{\alpha R(\alpha, n-1) + nP(\alpha, n).\frac{x}{1-x}(1-x^m)}{R(\alpha, n) + P(\alpha, n)\frac{x}{1-x}\left(1-x^m\right)} \qquad (6.51a)$$

+ Khi x = 1, ta có:

$$\overline{n}_b = \frac{\alpha R(\alpha, n-1) + nmP(\alpha, n)}{R(\alpha, n) + mP(\alpha, n)} \qquad (6.51b)$$

b) $$\overline{n}_r = n - \overline{n}_b \qquad (6.52)$$

6. Độ dài trung bình hàng chờ $\overline{m}_c$

+ Khi x ≠ 1 thì: $$\overline{m}_c = \sum_{s=0}^{m} sP_{n+s} = \frac{P(\alpha, n)\sum_{s=0}^{m} sx^s}{R(\alpha, n) + P(\alpha, n)x\frac{1-x^m}{1-x}} \qquad (6.53a)$$

Trong đó:

$$\sum_{s=0}^{m} sx^s = x\sum_{s=1}^{m} sx^{s-1} = x\frac{\partial\sum_{s=0}^{m-1} x^s}{\partial x} = \frac{x}{(1-x)^2}\left[(m-1)x^m - mx^{m-1} + 1\right]$$

+ Khi x = 1, ta có:

$$\overline{m}_c = P_n \frac{m(m+1)}{2} \qquad (6.53b)$$

7. Thời gian chờ trung bình của một yêu cầu $\overline{t}_c$

Thời gian chờ của mỗi yêu cầu được xác định bằng khoảng thời gian hệ thống giải phóng mỗi yêu cầu và số yêu cầu chờ hiện có. Vì vậy nếu gọi thời gian là t_c thì $t_c = 0$ khi hệ thống còn có kênh rỗi. Khi có s yêu cầu chờ thì thời gian chờ của mỗi yêu cầu trung bình sẽ là s/nμ, vì vậy có thể tính thời gian chờ trung bình như sau:

$$\overline{t}_c = \sum_{s=0}^{m} \frac{s}{n\mu} P_{n+s} = \frac{1}{\lambda}\sum_{s=0}^{m} sP_{n+s+1}$$

Hay $\overline{t}_c = \dfrac{\overline{m}_c}{\lambda}$

8. Thời gian rỗi giữa hai lần phục vụ $\overline{t}_r$

$$\bar{t}_r = \overline{t_{pv}}.\frac{1-k_b}{k_b} = \frac{1-\frac{\overline{n_b}}{n}}{\mu\frac{\overline{n_b}}{n}}$$ trong đó: - $k_b = \frac{\overline{n}_b}{n}$, k_b: hệ số bận của kênh

- $\bar{t}_{pv} = \frac{1}{\mu}$

6.6. CÁC BÀI TOÁN MẪU

Bài toán 1. Một trạm đăng kiểm xe ô tô có 2 tổ làm việc độc lập, năng suất mỗi tổ 6 xe/ ngày. Dòng xe đến trạm là dòng Poát xông dừng, cường độ 10 xe/ngày. Thời gian đăng kiểm 1 xe tuân theo luật chỉ số. Một xe đến trạm nếu gặp lúc có tổ rỗi thì được nhận vào ngay tại một tổ rỗi, ngược lại phải chờ, nếu số xe chờ chưa quá 10 xe. Tính các chỉ tiêu phân tích chất lượng phục vụ của trạm trên.

Giải:

- Số kênh phục vụ n=2
- Năng suất 1 kênh μ=6 (cường độ dòng phục vụ)
- Cường độ dòng vào λ = 10
- Số chỗ chờ tối đa là m =10

$$\alpha = \frac{\lambda}{\mu} = 1{,}666667$$

$$\frac{\alpha}{n} = 0{,}833333$$

Các chỉ tiêu đánh giá chất lượng hoạt động của trạm

1. Xác suất trạm có 2 kênh rỗi là:

P_0 = 0,101231

2. Xác suất một yêu cầu đến hệ thống phải chờ là:

P_c = 0,707344

3. Xác suất từ chối một yêu cầu là P_{tc} = 0,022707

4. Xác suất một yêu cầu được phục vụ ngay P_{opv} = 0,269948

5. Số kênh bận trung bình $\overline{n}_b$ = 1,628821

6. Độ dài hàng chờ trung bình $\overline{m}_c$ = 2,401353

7. Thời gian chờ trung bình $\overline{t}_c$ = 0,1625882

8. Thời gian rỗi trung bình giữa 2 lần phục vụ của kênh $\overline{t}_r$ = 0,03798

Bài toán 2. Một thương cảng có n = 5 cầu tàu xếp dỡ. Dòng tàu cập bến là dòng tối giản và trung bình trong một tháng có $\lambda = 20$ tàu cập bến. Thời gian bốc dỡ xong một tàu của mỗi cầu tàu bốc dỡ là một đại lượng ngẫu nhiên và trung bình mất 6 ngày cho một tàu.

a. Hãy đánh giá tình hình phục vụ của thương cảng.

b. Nghiên cứu khả năng tăng số cầu tàu bốc dỡ của thương cảng với giả thiết dòng các tàu cập bến có cường độ là 20 tàu trong một tháng, năng suất của các cầu tầu xếp dỡ khi tăng lên vẫn là 6 ngày/tàu, chi phí $q_c = q_k$; $q_{tb} = 1000\$$

<u>*Giải:*</u> Từ các yếu tố của thương cảng cho ở trên, ta suy ra hoạt động của thương cảng chính là một hệ thống phục vụ chờ thuần nhất. Để đánh giá tình hình phục vụ của thương cảng, chúng ta tính một số chỉ tiêu quan trọng; P_c, $\overline{m}_c$, $\overline{t}_c$, $\overline{n}_r$, k_r

Ta có: $P_c = \dfrac{P(n,\alpha)}{(1-x)\left[R(n,\alpha)+\dfrac{x}{1-x}P(n,\alpha)\right]}$ (a)

Ta xác định các yếu tố trong công thức (a)

$\alpha = \dfrac{\lambda}{\mu} = \lambda.\overline{t}_p$. Theo giả thiết $\lambda = 20$ tàu/tháng; $\overline{t}_p$ = 6ngày/tàu = $\dfrac{6}{30}$ tháng/tàu $\rightarrow \alpha = 20$ tàu/tháng x $\dfrac{6}{30}$ tháng/tàu = 4 , $x = \dfrac{\alpha}{n} = \dfrac{4}{5} < 1$

Do đó, nếu áp dụng các công thức $P(n,\alpha) = \dfrac{e^{-\alpha}.\alpha^n}{n!}$ và

$R(n,\alpha) = \sum_{k=0}^{n}\dfrac{e^{-\alpha}.\alpha^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n}P(k,\alpha)$ vào (a) ta được:

$$P_c = \frac{P(n,\alpha)}{(1-x)\left[R(n,\alpha)+\dfrac{x}{1-x}P(n,\alpha)\right]}$$

$$= \frac{0{,}1563}{(1-4/5)\left[0{,}7851+\dfrac{4/5}{(1-4/5)}0.1563\right]} = 0{,}555$$

Vậy trung bình có trên 55% tàu cập bến phải chờ phục vụ

$$\overline{m}_c = \frac{x}{(1-x)}P_c = \frac{4/5}{(1-4/5)}\ 0{,}555 = 2{,}2 \text{ tàu}$$

Vậy trung bình có trên 2 tàu phải chờ ở bến $\overline{t}_c = \dfrac{\overline{m}_c}{\lambda} = \dfrac{2{,}2\text{tàu}}{20\text{tàu}/\text{tháng}}$ = 0,11 tháng ≈ 3,3 ngày

Vậy thời gian trung bình mỗi tàu phải chờ ở bến để được phục vụ là trên 3 ngày.

$\overline{n_b} = \alpha = 4$. Số cầu bận trung bình là 4 ngày $\overline{n_r} = n - \overline{n_b} = 5 - 4 = 1$. Số cầu rỗi trung bình là 1 ngày

Hệ số rỗi $k_r = \dfrac{\overline{n_r}}{n} = \dfrac{1}{5} = 0{,}2$

Vậy có 20% thời gian của các cầu tàu xếp dỡ còn lãng phí, hoặc có 20% số cầu tàu bốc dỡ chưa đưa vào phục vụ.

Nếu đưa vào các chỉ tiêu chủ yếu và tính chất hoạt động của thương cảng, ta thấy: Bến cảng hoạt động chưa được tốt bởi vì trên 55% tàu cập bến phải chờ, thời gian chờ trung bình của một tàu còn trên 3 ngày.

b. Để cải thiện sự hoạt động của thương cảng cho tốt hơn, chúng ta nghiên cứu khả năng tăng số cầu tàu xếp dỡ lên?

Để so sánh hiệu quả sau khi cải tiến, ta tính thêm các chỉ tiêu tổn thất và chi phí của hệ thống đang xét. Ta giả sử thử với = 5, 6, 7, 8, 9. Ta được bảng số liệu sau:

n	5	6	7	8	9
P_c	0,555	0,28	0,13	0,05	0,02
$\overline{m_c}$ (tàu)	2,2	0,56	0,17	0,05	0,016
$\overline{t_c}$(ngày)	3,3	0,81	0,24	0,075	0,0008
k_r	0,2	0,33	0,42	0,5	0,55
G($)	7200	6560	7170	8050	9016

Dựa vào kết quả ở bảng trên, chúng ta thấy cần tăng số cầu tàu lên n=6 thì tỷ lệ số tàu cập bến cảng phải chờ để bốc dỡ hàng cũng như độ dài hàng chờ của các tàu, thời gian chờ trung bình của các tàu giảm xuống rõ rệt. Đồng thời tổng phí tổn G là nhỏ nhất.

Bài toán 3. Một trạm thông tin khu vực X hàng năm trung bình cần có 1095 "Môđyn" điện tử để thay thế vào một loại thiết bị viễn thông. Thời gian chờ để thay thế xong một "Môđyn" vào thiết bị viễn thông là $\overline{t_p}$ = 2,7 ngày, đồng thời đây cũng là thời gian kể từ lúc "Môđyn" dự trữ trong kho được lấy ra để thay vào trong thiết bị cho đến lúc "Môđyn" mới được đưa vào dự trữ trong kho. Tiền lãi thu được do một thiết bị hoạt động trong một ngày là 4$, giá một "Môđyn" và chi phí bảo quản một "Mô đyn" trong 1 năm là C= 350$.

Hãy xác định cần dự trữ bao nhiêu "Môđyn" điện tử trong kho để đáp ứng tốt yêu cầu thay thế sao cho tổn thất trong năm là ít nhất.

<u>*Giải:*</u> Hoạt động của trạm thông tin X chính là một hệ thống phục vụ chờ thuần nhất, trong đó kênh phục vụ là chỗ đến dự trữ một "Môđyn", số kênh phục vụ là số chỗ để dự trữ "Môđyn" trong kho. Thời gian phục vụ của kênh là khoảng thời gian từ lúc "Môđyn" dự trữ trong kho được lấy ra để thay thế vào trong thiết bị viễn thông đến lúc "Môđyn" mới được đem vào kho dự trữ. Vị

trí để dự trữ "Môđyn" bị trống tương ứng với kênh bận, chỗ có để "Môđyn" tương ứng với kênh rỗi.

Nguyên tắc làm việc của hệ thống này là: mỗi khi có một thiết bị cần phải thay thế "Môđyn" mà trong kho còn có ít nhất một "Môđyn" thì được nhận vào thay thế, ngược lại trong kho không còn "Môđyn" nào nữa thì thiết bị đó phải chờ, thời gian chờ và số thiết bị chờ không hạn chế.

Từ phân tích ở trên, theo yêu cầu của bài toán đặt ra, chúng ta tính các chỉ tiêu P_c, $\bar{t}_c$ và tổng chi phí, tổn thất của trạm trong một năm bao gồm giá tiền mua và bảo dưỡng một "Môđyn" trong năm và tổn thất do thiết bị phải ngừng hoạt động để thay thế tương ứng với số "Môđyn" n > [α]

Theo đầu bài cường độ của dòng yêu cầu, nghĩa là nhu cầu thay thế "Môđyn" điện tử trong một ngày là:

$$\lambda = \frac{1095}{365} = 3 \text{ Môđyn/ ngày}$$

Do đó $\alpha = \lambda \bar{t}_p = 3.2,7 = 8,1$ và $[\alpha] = [8,1] = 8$

Vậy n> [α] có nghĩa n= 9,10,11,...

Kết quả tính toán được bảng sau:

Số Môđyn	P_c	$\bar{t}_c$ **(ngày)**	$G_1 = n.c$ **($)**	$G_2 = \bar{t}_c \times$ **x1095x4$**	**Tổng phí tổn G** $= G_1 + G_2$
9	0,744	2,26	3.150	9.898	13.048
10	0,433	0,63	3.500	2.759	6.259
11	0,259	0,24	3.850	1.051	4.901
12	0.00032	0,1	4.200	438	4.638
13	0,00033	0,078	4.550	188	4.738
14	0,00033	0,018	4.900	79	4.979

Từ kết quả tính toán ta thấy nếu mua dự trữ trong kho n=12 "Môđyn" thì tổng chi phí và tổn thất nhỏ nhất, đồng thời tỷ lệ số thiết bị viễn thông phải chờ để thay thế và thời gian chờ đủ nhỏ.

Từ phân tích trên ta chỉ đạo trạm thông tin cần mua dự trữ trong kho n = 12 Môđyn điện tử thường xuyên thì tổng phí tổn là nhỏ nhất, đồng thời tỷ lệ số thiết bị viễn thông phải chờ để thay thế Môđyn và thời gian chờ là đủ nhỏ.

Bài toán 4. Một xưởng sửa chữa thiết bị viễn thông, có khả năng trong một thời điểm chỉ sửa chữa, bảo dưỡng được một tổ hợp máy viễn thông loại X.

Xưởng có diện tích nhà có thể chứa được tối đa m = 3 tổ hợp thiết bị viễn thông loại X, chờ để sửa chữa và bảo dưỡng. Trung bình từng ngày có một tổ hợp thiết bị được đưa tới xưởng yêu cầu sửa chữa, bảo dưỡng. Xưởng sửa chữa, bảo dưỡng xong một tổ hợp thiết bị trung bình mất 2 ngày. Xưởng phục vụ theo nguyên tắc chờ với độ dài hàng chờ là m = 3.

a. Hãy đánh giá tình hình phục vụ của xưởng sửa chữa trên.

b. Nếu tăng thêm một dây chuyền sửa chữa bảo dưỡng nữa thì tình hình phục vụ của xưởng sẽ ra sao? Biết rằng năng suất của dây chuyền dự định tăng thêm vẫn là $\overline{t}_p = 2$ ngày, cường độ dòng vào của thiết bị đến xưởng là 2 ngày có 1 thiết bị đến xưởng yêu cầu được sửa chữa bảo dưỡng.

Giải: Đây là hệ thống phục vụ chờ với độ dài hàng chờ hạn chế m =3. Để đánh giá chất lượng phục vụ của xưởng, ta phải tính toán được các chỉ tiêu P_o, P_c, $\overline{m_c}$, $\overline{m}$, $\overline{t_c}$, $\overline{t}$, Q.

Theo giả thiết ta có m =1 kênh phục vụ m, m =3

$\lambda = 1$ máy/1 ngày; $\overline{t_p} = 2$ ngày/1 thiết bị; năng suất phục vụ (cường độ dòng phục vụ) $\mu = \frac{1}{2}$ thiết bị/ngày.

Vậy $\alpha = \frac{\lambda}{\mu} = 2$

$$P(n, \alpha) = \frac{e^{-\alpha}.\alpha^n}{n!} = \frac{e^{-2}.2}{1} = \frac{2}{e^2} \approx 0{,}2735$$

$$R(n, \alpha) = \sum_{k=0}^{n} P(k,\alpha) = P(0,\alpha) + P(1,\alpha) = \frac{e^{-2}.2^o}{0!} + \frac{e^{-2}.2^1}{1!}$$

$$= e^{-2} + e^{-2}.2 = \frac{1}{e^2} + \frac{2}{e^2} = \frac{3}{e^2} \approx 0{,}4035$$

$$P_0 = \frac{e^{-\alpha}}{R(n,\alpha) + mP(n,\alpha)} = \frac{(2{,}71828)^{-2}}{0{,}4035 + 3.0{,}2735} \approx 0{,}1046$$

$$P_{tc} = P_{n+m} = \frac{P(1,2)}{R(1,2) + 3P(1,2)}, \text{(vì } \frac{\alpha}{n} \neq 1)$$

$$\approx \frac{0{,}2735}{0{,}4035 + 3.0{,}2735} = \frac{0{,}2735}{1{,}2140} \approx 0{,}2245$$

$$P_v \approx 1 - P_{tc} = 1 - 0{,}2245 = 0{,}7755$$

$$P_c \approx \sum_{1=0}^{m-1} P_{n+s} = \sum_{s=0}^{2} P_{1+s} = P_1 + P_{1+1} + P_{1+2}$$

Ta có $P_1 = P_{1+1} = P_{1+2}$

$$= \frac{P(1,2)}{R(1,2) + 3P(1,2)} = \frac{0{,}2735}{0{,}5519 + 3.0{,}2735} \approx 0{,}2245$$

$\Rightarrow P_c = 0{,}2245 + 0{,}2245 + 0{,}2245 \approx 0{,}6735$

$$\overline{m}_c = \sum_{s=0}^{m} s.P_{n+s} = 0.P_{n+0} + 1.P_{n+1} + 2.P_{n+2} + 3.P_{n+3};\ \text{vì } \overline{n} = 1$$

nên có: $\overline{m}_c = P_{1+1} + 2.P_{1+2} + 3.P_{1+3}$

Ta có: $P_{1+1} = P_{1+2} = P_{1+3} \approx 0{,}2245$

$\Rightarrow \overline{m}_c$ = 0,2245+ 2. 0,2245+ 3. 0,2245= 1,3472

$\bar{t}_c = \dfrac{\overline{m}_c}{\lambda} = \dfrac{1{,}3472}{1} = 1{,}3472$ ngày

$\overline{m}_1 = \overline{m}_c + \overline{n}_b$ (a)

Ta có $\overline{n}_b = \sum_{k=0}^{n} k.P_k + n.\sum_{s=1}^{m} P_{n+s}$ vì vì n = 1 nếu có k=o

$\overline{n}_b = 0.P_0 + 1P_1 + 1(P_{1+1} + P_{1+2} + P_{1+3}) = P_1 + 1(P_{1+1} + P_{1+2} + P_{1+3})$

= 0,2245 + 1(0,2245+ 0,2245+ 0,2245) ≈ 4. 0,2245= 0,898

Thay vào (a) được: $\overline{m}_1 = 1{,}3472 + 0{,}898 = 2{,}2452$

$\overline{t}_1 = \overline{t}_c + \overline{t}_p = 1{,}3472 + 2 = 3{,}3472$ ngày

Q = λ P_v = 2.0,7755= 1,551 thiết bị/ ngày

Từ kết quả tính toán trên ta có thể đánh giá chất lượng phục vụ của xưởng sửa chữa trên như sau: Ta có $k_r = \dfrac{\overline{n}_r}{n} = \dfrac{1-\overline{n}_b}{n} \approx 0{,}11$: nên hệ số rỗi của kênh còn lớn (11%) trong khi đó xác xuất từ chối của xưởng là hơn 22% còn lớn, xác xuất chờ P_c = 0,6735 nghĩa là tỷ lệ thiết bị đến sửa chữa bảo dưỡng phải chờ là hơn 67%. Thời gian lưu lại chờ ở xưởng để được sửa chữa của tổ hợp thiết bị viễn thông là $\bar{t} \approx 3{,}3472$ (hơn 3 ngày). Do tính chất rất quan trọng của việc xử lý thông tin nên yêu cầu phải giải phóng nhanh các tổ hợp viễn thông để kịp phục vụ cho xử lý thông tin của các trạm thu phát thông tin. Vậy với chất lượng phục vụ như trên là chưa tốt.

b. Để thuận tiện cho việc đánh giá chất lượng của xưởng khi tăng thêm một kênh phục vụ nữa, ngoài các chỉ tiêu trên, ta cần tính thêm chỉ tiêu kinh tế G, với giả thiết q_{tc} = 10 đơn vị giá trị: q_c = 20 đơn vị giá trị, $q_k = q_{tp}$ = 10 đơn vị giá trị.

Khi tăng thêm một kênh phục vụ nữa thì n=2 còn theo giả thiết λ=1/2 máy/ngày; μ = 1/2máy/ngày; $\alpha = \dfrac{\lambda}{\mu} = 1$

Ta có $P_o = \dfrac{e^{-\alpha}}{R(n,\alpha) + m.P(m,\alpha)}, (m = 3, X = \dfrac{\alpha}{n} = \dfrac{2}{2}.)$

$= \dfrac{e^{-1}}{R(2,1) + 3P(2,1)}$ (b)

P (2,1) = $\dfrac{e^{-1}.1^2}{2!} \approx 0{,}183$

$$R(2,1) = \sum_{k=0}^{2} R(k,1) = P(0,1) + P(1,1) + P(2,1)$$

$$= \frac{e^{-1}.1^0}{01} + \frac{e^{-1}.1^1}{1!} + \frac{e^{-1}.1^2}{2!}$$

$$= e^{-1} + e^{-1}.1 + e^{-1}.2^{-1}$$

$\approx$0,367+ 0,367+ 0,183= 0, 917

Thay vào (b) được:

$$P_0 = \frac{e^{-1}}{0{,}917 + 3.0{,}183} = \frac{0{,}367}{0{,}917 + 0{,}549} = 0{,}250$$

$$P_c = \sum_{s=0}^{m-1} P_{n+s} = \sum_{s=0}^{2} P_{2+s} \qquad (n = 2, m = 3)$$

$= P_{2+0} + P_{2+1} + P_{2+2}$; vì $x= \frac{\alpha}{n} = \frac{1}{2} \neq 1$ nên ta có

$$P_{2+1} + P_{2+2} = \frac{(1/2)^3.P(2,1)}{R(2,1) + P(2,1)\frac{[1-(1/2)^3]}{1-1/2}} = \frac{\frac{1}{8}.0{,}183}{0{,}917 + 0{,}183.7/4} = 0{,}017$$

$$P_{n+0} = P_n = \frac{\alpha^n}{n!}P_0 \Rightarrow P_{2+0} = \frac{1}{2}^2 P_0 = \frac{1}{2!}^2.0{,}250$$

Vậy $P_c = P_{2+0} + P_{2+1} + P_{2+2}$ = 0,250 + 0,017+ 0,017= 0,284

$$P_{tc} = P_{n+m} \frac{X^m.P(n,1)}{R(n,1).P(n,1)\frac{1-X^m}{1-X}} \quad (\text{vì } X \neq 1)$$

$$= \frac{(1/2)^3.P(2,1)}{R(2,1) + P(2,1)\frac{7/8}{1/2}} \approx \frac{1/8.0{,}183}{0{,}917 + 0{,}183.7/4} \approx 0{,}017$$

$$\overline{m}_c = \sum_{s=0}^{m} s.P_{n+s} = \sum_{s=0}^{3} s.P_{2+s} = 0.P_{2+0} + P_{2+1} + 2.P_{2+2} + 3.P_{3+3}$$

$$= P_{2+1} + 2.P_{2+2} + 3.P_{2+3}$$

Ta có $P_{2+1} = P_{2+2} = P_{2+3} = 0{,}017$

nên $\overline{m}_c = 0{,}017 + 2.0{,}017 + 3.0{,}017 = 0{,}102$

$$\overline{n}_b = \sum_{k=o}^{n} k.P_k + n\sum_{s=1}^{m} P_{n+s}$$, vì n=2, m =3 nên ta có

$\rightarrow \overline{n_b} = 0.P_0 + 1.P_1 + 2.P_2 + 2(P_{2+1} + P_{2+2} + P_{2+3})$

$$P_1 = \frac{\alpha^1}{1!}P_0 = \frac{1^1}{1!}.0{,}250 = 0{,}250$$

$$P_2 = \frac{\alpha^2}{2!}P_0 = \frac{1^2}{2!}P_0 = \frac{1}{2}0{,}183 = 0{,}091$$

$P_{2+1} = P_{2+2} = P_{2+3} = 0{,}017$

Do đó $\overline{n}_b = 0{,}250 + 2.0{,}091 + 2\left(0{,}017 + 0{,}017 + 0{,}017\right) = 0{,}534$

$\overline{m}_1 = \overline{m}_c + \overline{n}_b = 0{,}102 + 0{,}534 = 0{,}636.$

$$\overline{t_1} = \overline{t_c} + \overline{t_p} = \frac{\overline{m_c}}{\lambda} + \overline{t_p}\ .$$

Ta có $\lambda = 1/2, \overline{m_c} = 0{,}102.$ Do $\bar{t}_p = 2$, nên ta có:

$$\overline{t_1} = \frac{0{,}102}{1/2} + 2 = 2{,}204$$

Q= $\lambda.P_v = 1/2\,(1 - P_{tc}) \approx 1/2\,(1 - 0{,}017) = 0{,}491$ thiết bị/ngày

G=T $\left(\overline{m}_c.q_c + \overline{n}_b q_k + \overline{n}_r q_{tp} - \lambda P_{tc}.q_{tc}\right)$ .Vì T=1 nên ta có:

= (0,102. 20+ 0,534.10+ (2- $\overline{n}_b$) . 10 +1/2, 0,017.10)

= 2,040 + 5,340 + 14,660 + 0,085 = 22,125 đơn vị tiền.

Để tiện phân tích chất lượng hoạt động của xưởng khi n =1, n = 2 ta lập bảng kết quả sau:

Số kênh phục vụ	Các chỉ tiêu của xưởng sửa chữa bảo dưỡng									
	P_o	P_{tc}	P_v	P_c	$\overline{m}_c$	$\overline{m}_1$	$\bar{t}_c$	$\bar{t}_1$	Q	G
n =1	0,1046	0,2245	0,7755	0,6735	1,3472	2,2452	1,3472	3,3472	1,551	39,189
n =2	0,250	0,017	0,983	0,284	0,102	0,636	0,204	2,204	0,491	22,125

Dựa vào bảng trên, ta phân tích các chỉ tiêu của hệ thống từ đó xác định được chất lượng phục vụ khi tăng thêm một dây chuyền phục vụ. Công việc này yêu cầu người học tự phân tích, xem như một bài tập vận dụng.

BÀI TẬP CHƯƠNG 6

1. Trên trục đường chính vào Thành phố A, người ta dự định đặt một trạm bảo dưỡng, sửa chữa xe gắn máy.

a. Hỏi cần phải đặt ở trạm này bao nhiêu dây chuyền bảo dưỡng sửa chữa để trong một ngày trạm thu được tiền lãi lớn nhất. Biết rằng dòng xe máy (yêu cầu) đến trạm bảo dưỡng sửa chữa là dòng tối giản, cường độ λ=12 xe/ giờ.

Thời gian bảo dưỡng sửa chữa xong một xe trung bình hết 2 giờ. Một ngày trạm làm việc 16 giờ. Chi phí cho việc phục vụ của một dây chuyền sửa chữa, bảo dưỡng trong một ngày là 400.000đ. Tiền phục vụ thu được một xe là 60.000đ.

b. Với số dây chuyền được bố trí ở (a) thì trong một ngày trạm phục vụ được bao nhiêu xe?

c. Tính toán các chỉ tiêu đánh giá chất lượng phục vụ của trạm.

HD: Xem bài toán mẫu ở mực 6.6.

2. Một bến cảng có n=5 cầu xếp dỡ. Dòng yêu cầu đến bến là dòng tối giản, trung bình một tháng có 20 tàu cập bến. Thời gian bốc dỡ xong một tàu của mỗi cầu bốc dỡ là một đại lượng ngẫu nhiên, trung bình mất 6 ngày cho một tàu.

a. Hãy đánh giá tình hình phục vụ của bến cảng.

b. Hãy nghiên cứu khả năng tăng số cầu tàu bốc dỡ của bến cảng sao cho đạt hiệu quả kinh tế cao hơn, với giả thiết dòng các tàu cập bến có cường độ là 20 tàu trong một tháng và năng suất của các cầu tàu xếp dỡ, khi tăng lên, vẫn là 6 ngày/ tàu. Chi phí $q_c = q_k$, q_{tb}= 1000$

HD: Xem bài toán 2. Mục 6.6

3. Hãy xác định cầu dự trữ bao nhiêu "Tổ hợp linh kiện bưu điện", sao cho phí tổn trong năm là ít nhất. Biết rằng hàng năm trung bình cần có 1095 "tổ hợp linh kiện bưu điện" để thay thế. Thời gian chờ để thay thế xong một "tổ hợp linh kiện bưu điện" cho một thiết bị trung bình là $\bar{t}_{Pv}$ = 2,7 ngày. Đồng thời đây cũng là thời gian từ lúc "tổ hợp linh kiện bưu điện" dự trữ trong kho lấy ra để thay thế vào thiết bị đến lúc "tổ hợp linh kiện bưu điện" mới được đưa vào dự trữ trong kho. Tiền lãi thu được do một thiết bị viễn thông hoạt động trong một ngày là 400$. Giá một "tổ hợp linh kiện bưu điện" và chi phí bảo quản một "tổ hợp linh kiện bửu điện" đó trong một năm là: C = 35.0$.

a. Xác định hệ thống phục vụ là hệ thống loại gì?

b. Xác định kênh phục vụ của một hệ thống.

c. Thời gian phục vụ của mỗi kênh.

d. Trạng thái P_0 P_v.

e. Xác định các chỉ tiêu phục vụ: P_{tc}, $\bar{t}_c$, G

4. Có hai hệ thống phục vụ, trong đó dòng vào các hệ thống là dòng tối giản và có cường độ λ.

Hệ 1 có n kênh, năng suất mỗi kênh là μ

Hệ 2 có 1 kênh, năng suất là nμ.

Chứng minh rằng với μ > 0; λ > 0 và n >1 xác suất phục vụ của hệ thống 1 lớn hơn xác suất phục vụ của hệ thống 2.

HD: Tính P_{PV} của hệ thống 1 và P_{PV} của hệ thống 2 và so sánh.

5. Chứng minh rằng với m>0 bất kỳ hệ thống chờ với độ dài hàng chờ hạn chế (m) có tỷ lệ yêu cầu được phục vụ cao hơn hệ thống từ chối cổ điển.

HD: Tính P_{PV} của hai hệ thống và so sánh.

6. Một cửa hàng dịch vụ rửa xe có 2 dây phục vụ, trung bình mỗi dây phục vụ xong 1 xe máy mất 30 phút. Dòng yêu cầu đến cửa hàng là dòng Poát xông dừng với cường độ 4 xe/giờ. Nguyên tắc phục vụ của cửa hàng là nguyên tắc của hệ từ chối, mỗi ngày làm việc 10 giờ.

a. Tính số xe được phục vụ trong ngày.

b. Muốn tỷ lệ xe không được phục vụ ít hơn 20% thì cần bao nhiêu dây phục vụ với năng suất như trên?

Với số dây tối thiểu đó mỗi ngày cửa hàng thu được số tiền lãi trung bình là bao nhiêu? Biết chi phí phục vụ 1 xe là 15.000đ/xe, chi phí cho một ngày một dây phục vụ là 100.000đ và nếu mỗi dây rồi sẽ gây ra lãng phí là 400.000đ/ngày.

HD:

a. 36 xe/ngày

b. n=4; E=275 ngàn đồng.

7. Bộ phận kiểm tra chất lượng sản phẩm của một xí nghiệp gồm 1 máy kiểm tra tự động được bố trí liên tiếp nhau. Năng suất của các máy như nhau và bằng 6 sản phẩm trong một phút. Nguyên tắc phục vụ của mỗi máy là một hệ từ chối một kênh và sản phẩm không được kiểm tra ở máy 1 thì được tự động chuyển sang kiểm tra ở máy.

Dòng sản phẩm được tự động chuyển đến bằng băng chuyền và trung bình 1 phút có 6 sản phẩm đến máy 1.

Hãy xác định tỷ lệ sản phẩm được kiểm tra qua 2 máy.

HD: 83.3%

8. Một cửa hàng bảo hành thiết bị bưu điện có 5 công nhân phục vụ và một diện tích đủ cho 10 thiết bị chờ. Dòng thiết bị đến cần bảo hành là dòng tối giản với trung bình $\lambda = 4$ thiết bị/giờ. Thời gian trung bình bảo trì xong một thiết bị của 1 công nhân mất 1 giờ, mỗi công nhân bảo trì 1 thiết bị. Hãy tính các chỉ tiêu:

a. Xác suất phục vụ P_{pv}:

b. Số công nhân bận trung bình

c. Số thiết bị chờ trung bình và thời gian chờ trung bình $\overline{m}_c, \overline{t}_c$

HD: a. $P_{PV} = 0.987$; $n_b = 3.95; \overline{m}_c = 1.58; \overline{t}_c = 0.39$

9. Một xí nghiệp sửa chữa máy bưu điện có 2 dây phục vụ và một diện tích đủ 5 máy chờ. Trung bình trong một ngày có 4 máy đến yêu cầu được sửa chữa và trung bình một ngày một dây sửa chữa được 2 máy.

a. Tính P_{pv} và suy ra số máy được sửa chữa trong một ngày.

b. Tính số máy phải chờ trung bình và thời gian chờ trung bình của mỗi máy.

c. Nếu tăng thêm một dây sửa chữa thì tỷ lệ máy được sửa chữa sẽ là bao nhiêu?

HD: $a.P_{pv} = 3.466; b.\overline{m}_c = 2; \overline{t}_c = 0.5; c.P_N = 0.997$

10. Một cây xăng có 2 máy bơm, năng suất như nhau vì trung bình là 30xe/giờ. Dòng khách hàng là dòng tối giảm có $\lambda = 50$ khách trong một giờ. Nguyên tắc phục vụ là của hệ chờ thuần

nhất. Tính tỷ lệ khách hàng phải chờ, độ dài hàng chờ trung bình và thời gian chờ trung bình của khách hàng.

HD: $P_c = 0.7575; \overline{m_c} = 3.78; \overline{t_c} = 0.75$

11. Cần xây dựng một kho có diện tích bao nhiêu để đảm bảo trên 95% hàng hoá đưa đến được bảo quản trong kho. Biết rằng hàng năm (có 365 ngày) trung bình có khoảng 75.000 tấn hàng hoá có nhu cầu được bảo quản. Hàng hoá được bảo quản theo từng lô với khối lượng trung bình 1 lô là 455 tấn và yêu cầu trên $1m^2$ diện tích chỉ bảo quản được 0,65 tấn hàng hoá. Thời gian trung bình mỗi lô hàng bảo quản trong kho là 10 ngày. Nguyên tắc hoạt động của kho là nguyên tắc của hệ từ chối cổ điển.

HD: $S=n*5600\ m^2$; trong đó: n là số kênh phục vụ của hệ thống.

12. Một công ty thương mại dự định mở một cửa hàng dịch vụ tổng hợp. Hãy xác định xem công ty cần bố trí bao nhiêu nhân viên phục vụ (bán hàng) để đảm bảo tỷ lệ khách hàng phải chờ không v ượt quá 10%. Với giả thiết trung bình 1 giờ có 30 khách đến mua hàng và mỗi nhân viên phục vụ với năng suất 15 khách hàng trong một giờ. Cửa hàng hoạt động như một hệ chờ thuần nhất.

HD: n=5

13. Một trạm sửa chữa máy viễn thông có 1 dây phục vụ và có 1 diện tích để 3 máy chờ. Theo số liệu thống kê, trong 1 ngày trung bình có 1 máy bị hỏng yêu cầu được sửa chữa và trung bình trong 2 ngày sửa chữa xong một máy. Nguyên tắc phục vụ của trạm là nguyên tắc của hệ chờ hạn chế.

a. Tính các chỉ tiêu P_c, P_{tc},P_{pv}, P_c, $\overline{m_c}, \overline{t_c}$ và cho nhận xét tình hình phục vụ của trạm.

b. Nếu tăng thêm 1 dây phục vụ với năng suất như trên thì tình hình phục vụ của trạm sẽ ra sao?

HD:

a. $P_0 = 0.0323; P_{tc} = 0.5161; P_c = 0.45; \overline{m_c} = 2.2; \overline{t_c} = 2.2$

b. $P_0 = 0.09; P_{tc} = 0.1818; P_c = 0.55; \overline{m_c} = 1.09$

14. Một trung tâm viễn thông xử lý tin nhanh có 4 tổ làm việc độc lập, được tổ chức như một hệ thống Eclang. Năng suất của mỗi tổ là 3 bản tin trong một giờ, dùng bản tin đến cần xử lý là dòng Poát xông dừng, trung bình 10 bản tin trong một giờ.

a. Hãy tính các chỉ tiêu đánh giá hoạt động của trung tâm

b. Người ta muốn nâng tỷ lệ bản tin đến trung tâm được xử lý và dự định hai phương án có tốn phí như nhau là:

i. Tăng thêm 3 tổ có cùng năng suất như các tổ cũ.

ii. Nâng năng suất gấp 2 lần cho 4 tổ hiện có.

Nên chọn phương án nào hiệu quả hơn?

HD:

a. $P_0 = 0.0472; P_{tc} = 0.2426; \overline{n_b} = 2.525; k_b = 0.631$

b. n=7 năng suất như cũ thì $P_{tc} = 0.0331$*; n=8 năng suất tăng gấp 2 thì* $P_{tc} = 0.0624$ *vì thế nên ta chọn phương án thứ 2.*

15. Căn cứ vào tỷ lệ bức điện không được nhận giải mã tại một trung tâm xử lý thông tin tổ chức theo chế độ từ chối cổ điển; dòng vào là dòng Poát xông dừng trung bình 30 bức điện trong một giờ. Hãy cho biết nên chọn phương án nào trong hai phương án san:

a. Bố trí 4 tổ máy năng suất mỗi tổ máy là 15 bức điện/giờ

b. Bố trí 5 tổ máy với năng suất mỗi tổ máy là 12 bức điện/ giờ

Kết luận trên có đúng với dòng vào là dòng Poát xông dừng trung bình 21 bức điện/giờ được hay không?

HD: Với phương án 1 $P_{tc} = 0.0952$ *. Phương án 2:* $P_{tc} = 0.0697$ *. Vì thế kết luận là đúng.*

16. Một trạm kiểm tra phòng dịch có 4 tổ làm việc độc lập năng suất mỗi tổ là 2 bệnh nhân/giờ. Mỗi giờ trung bình có 5 người đến cần kiểm tra, trạm làm việc theo chế độ của một trạm phục vụ công cộng Eclang.

a. Tính các chỉ tiêu đánh giá hoạt động của trạm.

b. Nếu số lượng người cần được kiểm tra tăng gấp đôi nên chọn phương án nào trong hai phương án tăng gấp đôi năng suất của mỗi tổ hoặc tăng gấp đôi số tổ?

HD:

a. $P_0 = 0.0737; P_{PV} = 0.0801; P_c = 0.3199; \overline{n_b} = 2.50; \overline{m_c} = 0.53; \overline{t_c} = 0.11; \overline{n_r} = 0.50$

b. Tăng gấp đôi số tổ.

17. Một phòng khám có 3 thầy thuốc, thời gian mỗi thầy thuốc khám cho một bệnh nhân trung bình 15 phút. Mỗi giờ trung bình có 9 bệnh nhân đến phòng khám, phòng khám có 6 chỗ chờ cho tôi đã có 6 bệnh nhân. Hãy tính các chỉ tiêu đánh giá hoạt động của phòng khám này.

HD: $P_0 = 0.0809; P_{PV} = 0.9727; P_{tc} = 0.0273; P_{OPV} = 0.4677; P_c = 0.5050$

18. Một phòng đăng ký dịch vụ thuê bao điện thoại có 3 tổ làm việc độc lập, mỗi tổ trung bình 1 giờ xong thủ tục cho 3 điện thoại, dòng người đến phòng cần đăng ký thuê bao là dòng Poát xông dừng trung bình 8 người. Phòng làm việc như một hệ thống chờ thuần nhất.

a. Hãy xác định các chỉ tiêu đánh giá hoạt động của phòng này.

b. Nếu muốn trung bình không quá 6 người thì cần tối thiểu bao nhiêu tổ như trên.

HD:

a. $P_0 = 0.0280; P_{OPV} = 0.2025; P_c = 0.80; \overline{n_b} = 2.67; \overline{m_c} = 6.38; \overline{t_c} = 0.80; \overline{n_r} = 0.33$

b. 4 tổ.

19. Cần bố trí bao nhiêu máy điện thoại tự động tại một trạm điện thoại công cộng, trên một trục đường vào Thành phố để đảm bảo trên 95% số người có nhu cầu gọi điện thoại được đáp ứng.

Biết rằng mỗi máy điện thoại tự động được một người sử dụng xong trung bình mất 12 phút, dòng người đến trạm điện thoại công cộng là dòng tối giản với cường độ 12 người/giờ, trạm hoạt động như một hệ từ chối cổ điển.

HD: Số máy tối thiểu n=6.

20. Một phòng bưu phẩm tự động có hai máy, năng suất như nhau là 24 bưu phẩm/ phút. Dòng bưu phẩm từ đây chuyển đến phòng kiểm tra là dòng Poát xông dừng trung bình 36 bưu phẩm/phút. Người ta dự định bố trí theo một trong hai phương án sau;

Phương án I: Để hai máy song song, làm việc độc lập như một hệ Eclang 2 kênh. Bưu phẩm sẽ vào kho mà không kiểm tra khi cả hai máy bận.

Phương án II: Để hai máy liên tiếp, máy một bận thì bưu phẩm chuyển sang máy hai, nếu máy hai cũng bận thì bưu phẩm vào kho không kiểm tra.

HD: Chọn phương án II.

21. Một trạm điện thoại công cộng Poát xông có 4 máy điện thoại tự động phục vụ, năng suất là 5 yêu cầu/giờ.

Dòng vào trung bình là 16 yêu cầu/giờ

a. Hãy cho biết trong hai cách tổ chức phục vụ sau đây, cách nào có tỷ lệ yêu cầu đến trạm được phục vụ ngay lớn hơn.

Cách I: Phục vụ như một hệ từ chối cổ điển

Cách II: Phục vụ như một hệ chờ với số chỗ chờ tối đa là 4.

b. Có thể tổng quát hoá câu a như thế nào và kết luận là gì?

HD: a. Chọn cách I.

CHƯƠNG VII: LÝ THUYẾT QUẢN LÝ DỰ TRỮ

7.1. MỘT SỐ KHÁI NIỆM

7.1.1. Các định nghĩa

1. Hàng hoá: Hàng hoá là đối tượng vật chất được sử dụng, dự trữ cho hoạt động của hệ thống kinh tế - xã hội nào đó.

2. Nhu cầu: Nhu cầu là khối lượng hàng hoá cần thiết sẽ được hệ thống tiêu thụ trong một khoảng thời gian T (giả thiết T=1 đơn vị).

Nhu cầu thông thường là một biến ngẫu nhiên nên nó tuân theo qui luật phân phối xác suất nào đó.

3. Cung cấp: Cung cấp là khả năng đáp ứng hàng hoá cho quá trình dự trữ và tiêu thụ của hệ thống. Trong các trường hợp cụ thể, cách thức cung cấp có thể khác nhau: Cung cấp theo từng đợt tập trung cường độ lớn, cung cấp đều đặn trong các khoảng thời gian v.v....

4. Thời gian đặt hàng: Thời gian đặt hàng là khoảng thời gian từ khi bắt đầu đặt hàng đến khi hàng bắt đầu được dự trữ và tiêu thụ. Khoảng thời gian này cũng là một đại lượng ngẫu nhiên, do vậy sẽ tuân theo luật phân phối xác suất nào đó.

5. Chu kỳ dự trữ - tiêu thụ: Chu kỳ dự trữ - tiêu thụ là khoảng thời gian dự trữ và tiêu thụ khối lượng hàng của một lần đặt mua.

6. Điểm đặt hàng: Điểm đặt hàng là mốc mà lượng hàng dự trữ còn nhưng cần bắt đầu đặt hàng cho chu kỳ "dự trữ - tiêu thụ" sau đó.

7. Các loại chi phí.

a. Chi phí mua hàng: Chi phí mua hàng là chi phí trực tiếp cho một đơn vị hàng về đến kho (bao gồm: giá hàng, chi phí vận chuyển, bốc xếp lên xuống..) chi phí mua hàng còn gọi là giá hàng.

b. Chi phí đặt hàng: Chi phí đặt hàng là chi phí cố định cho một lần đặt hàng, bao gồm chi phí giao dịch, chi phí cho các nghiệp vụ khác.

c. Chi phí dự trữ (Chi phí kho) Chi phí dự trữ là chi phí cho việc bảo quản một đơn vị hàng hoá trong một đơn vị thời gian. Chi phí dự trữ tỷ lệ với giá hàng qua một hệ số gọi là hệ số chi phí dự trữ (hay còn gọi là hệ số bảo quản).

d. Chi phí do không đảm bảo nhu cầu: Chi phí do không đảm bảo nhu cầu là chi phí phải chịu thiệt thòi khi thiếu một đơn vị hàng hoá trong một đơn vị thời gian.

e. Chi phí do dư thừa hàng: Chi phí do dư thừa hàng (dư thừa so với nhu cầu thực tế) là chi phí phát sinh khi chúng ta dự trữ quá mức cần thiết. Chẳng hạn, tổn thất do ứ đọng vốn, do hàng quá thời gian sử dụng, do hàng giảm chất lượng v.v..

7.1.2. Các lớp mô hình quản lý dự trữ

Có 2 lớp mô hình quản lý dự trữ chủ yếu sau:

- Lớp mô hình quản lý dự trữ với các yếu tố phi ngẫu nhiên.
- Lớp mô hình quản lý dự trữ với các yếu tố ngẫu nhiên.

7.2 CÁC MÔ HÌNH QUẢN LÝ DỰ TRỮ VỚI CÁC YẾU TỐ PHI NGẪU NHIÊN

Trong mục này, chúng ta sẽ nghiên cứu một số mô hình quản lý dự trữ mà các yếu tố cơ bản của nó đã được xác định. Đây là bài toán đơn giản, đầu tiên của điều khiển dự trữ, trong đó mô hình Wilson có ý nghĩa lớn về lý luận và thực tiễn.

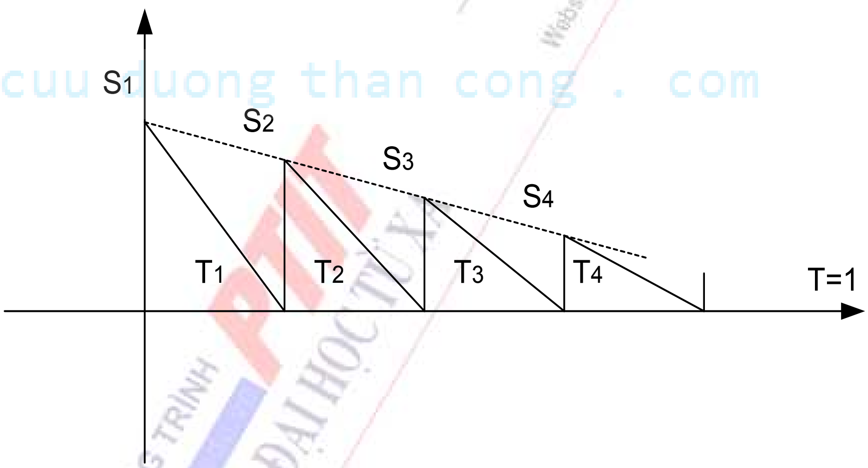
7.2.1 Mô hình quản lý dự trữ Wilson (tiêu thụ đều, bổ sung tức thời).

1. Mô hình bài toán.

Môt hệ thống kinh tế có nhu cầu loại hàng hoá nào đó là Q đơn vị trong khoảng thời gian là T (T = 1 đơn vị). Việc tiêu thụ loại hàng hoá này là điều đặn và thời gian bổ sung hàng vào kho dự trữ là tức thời. Chi phí cho mỗi lần đặt hàng là A, giá một đơn vị hàng là C, hệ số chi phí dự trữ là I, thời gian đặt hàng là T_0. Hãy xác định số lần đặt hàng và lượng hàng đặt mỗi lần sao cho tổng chi phí là bé nhất.

2.Phân tích và giải mô hình.

Hệ thống có đặt mua hàng dự trữ nhiều lần hoặc một lần trong khoảng thời gian T.



Hình 7.1 Sơ đồ kho

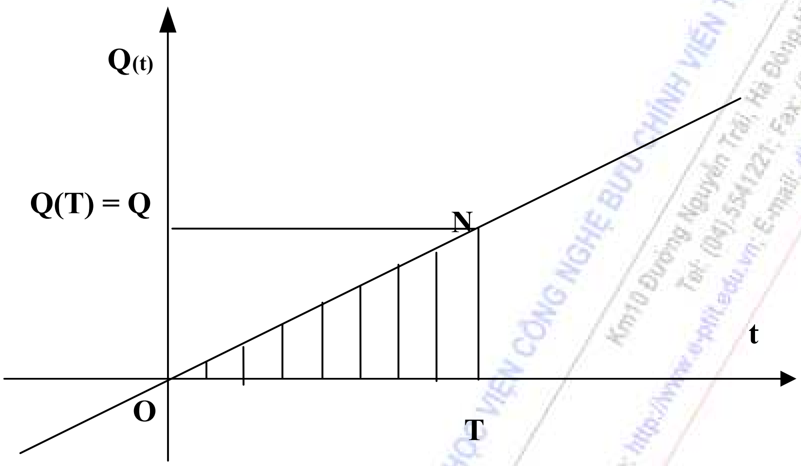
Giả sử ta chia T thành n kỳ dự trữ và tiêu thụ, trong mỗi kỳ i đặt mua lượng hàng tương ứng là S_i, ($i = \overline{i,n}$). Ta có sơ đồ biểu thị số lượng hàng trong kho như hình (8.1). Sơ đồ trên biểu hiện cường độ tiêu thụ đều, đường biểu diễn lượng dự trữ tuyến tính theo thời gian. Mỗi chu kỳ nhập một lượng hàng là S_i, ($i = \overline{i,n}$), tiêu thụ hết chu kỳ thì phải có hàng bổ sung dự trữ. Như vậy không xảy ra thiếu thừa dự trữ, do đó không phát sinh ra các chi phí tương ứng.

Hệ thống có thể dự trữ bằng cách mua ngay một lần tất cả khối lượng hàng Q cần thiết vào đầu năm (n = 1). Khi đó giả sử khối lượng hàng dự trữ được chở đến hệ thống một lần thì mức dự trữ trung bình trong kho là:

$$Z = \frac{1}{T}\int_0^T Q(t)dt \qquad (7.1)$$

Do $\int_0^T Q(t)dt$ là diện tích tam giác OTN, nghĩa là

$$\int_0^T Q(t)dt = \frac{1}{2}OT.TN = \frac{1}{2}T.Q\ (T), \text{ do vậy } Z = \frac{1}{2}T.Q(T) = \frac{Q(T)}{2} = \frac{Q}{2}$$



Hình 7.2

Nếu hệ thống đặt mua hàng dự trữ 2 lần vào đầu năm và giữa năm với khối lượng mỗi lần là $\frac{Q}{2}$ thì mức dự trữ trung bình trong kho bằng $\frac{Q}{4}$.

Nếu hệ thống đặt mua hàng dự trữ 4 lần vào đầu mỗi quý với khối lượng mỗi lần là $\frac{Q}{4}$ thì mức dự trữ trung bình trong kho là $\frac{Q}{8}$ v.v.. Một cách tổng quát nếu hệ thống thực hiện việc mua hàng bằng nhau và bằng $\frac{T}{n}$ thì lượng hàng dự trữ trung bình trong kho sẽ bằng $Z = \frac{Q}{2n}$. Đặt $\frac{Q}{n} = S$ ta có $Z = \frac{S}{2}$ và $n = \frac{Q}{S}$. Khi đó chi phí để thực hiện n hợp đồng đặt hàng là An + CQ, chi phí bảo quản dự trữ trong thời gian T là ICZ. Do đó tổng chi phí tạo ra dự trữ cho hệ thống (bao gồm chi phí đặt hàng và chi phí quản lý bảo quản dự trữ) là:

$$F(Z,n) = CQ + An + ICZ. \quad (7.2)$$

Do $Z = \frac{S}{2}$; $n = \frac{Q}{S}$ nên có thể viết (7.2) dưới dạng:

$$F(S) = CQ + \frac{AQ}{S} + IC\frac{S}{2} \quad (7.3)$$

Bài toán của ta dẫn đến phải xác định S hoặc $n = \frac{Q}{S}$ để F (S) đạt cực tiểu.

Do CQ không đổi nên F (S) đạt cực tiểu khi $G = \frac{AQ}{S} + IC\frac{S}{2}$ đạt cực tiểu. Hàm G đạt cực tiểu tại điểm dừng của nó, nghĩa là tại S sao cho $\frac{dG}{dS} = 0$

hay $$\frac{dG}{dS} = -\frac{AQ}{S^2} + \frac{IC}{2} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{IC}{2} = \frac{AQ}{S^2} \qquad (7.4)$$

- Từ (7.4) quy ra: Khối lượng hàng đặt mua mỗi lần $S = \frac{Q}{n}$ sẽ là tối ưu nếu chi phí giới hạn cho việc bảo quản bằng giá trị tuyệt đối của chi phí giới hạn cho việc đặt hàng. Nói cách khác là giá trị của S sẽ tối ưu nếu việc giảm chi phí bảo quản do khối lượng hàng đặt mua mỗi lần giảm đi một đơn vị bằng việc tăng chi phí đặt hàng số lần đặt hàng tăng lên.

- Nếu ký hiệu S^* là khối lượng đặt hàng tối ưu cho mỗi lần, thì từ (7.4) và theo hệ quả của bất đẳng thức côsi, suy ra: G nhỏ nhất khi:

$$S^* = \sqrt{\frac{2AQ}{IC}} \qquad (7.5)$$

và $$G(S^*) = AQ.\sqrt{\frac{IC}{2AQ}} + \frac{IC}{2}\sqrt{\frac{2AQ}{IC}}$$

hay $$G(S^*) = \sqrt{2AQIC} = \frac{2AQ}{S^*} = ICS^* \qquad (7.6)$$

$$F(S^*) = G(S^*) + CQ = \sqrt{2AQIC} + CQ \qquad (7.7)$$

hay $$F(S^*) = \frac{2AQ}{S^*} + CQ = ICS^* + CQ$$

- Số lần đặt hàng tối ưu: $n^* = \frac{Q}{S^*}$

- Chu kỳ dự trữ - tiêu thụ tối ưu: $t^* = \frac{1}{n^*}$

- Điểm đặt hàng tối ưu: Việc xác định điểm đặt hàng tối ưu sẽ đơn giản nếu thời gian đặt hàng $T_0 < t^*$, song thực tế có thể $T_0 \geq t^*$ như vậy cần đặt hàng trước một hay một số chu kỳ.

Điểm đặt hàng là mốc khối lượng trong kho khi lượng hàng trong kho cần bổ sung một lượng hàng đúng bằng lượng hàng tiêu thụ trong khoảng thời gian T_0. Muốn vậy thì hợp đồng đặt hàng dự trữ phải được ký kết vào lúc trong kho còn lượng hàng dự trữ là:

$$B^* = Q\,[T_0 - t^*.\ \mathrm{int}\,(T_0/t^*)] \qquad (7.8)$$

(Trong đó int (T_0/t^*) là phần nguyên của T_0/t^*).

B^* được xác định theo (7.8) gọi là điểm đặt hàng tối ưu của hệ thống.

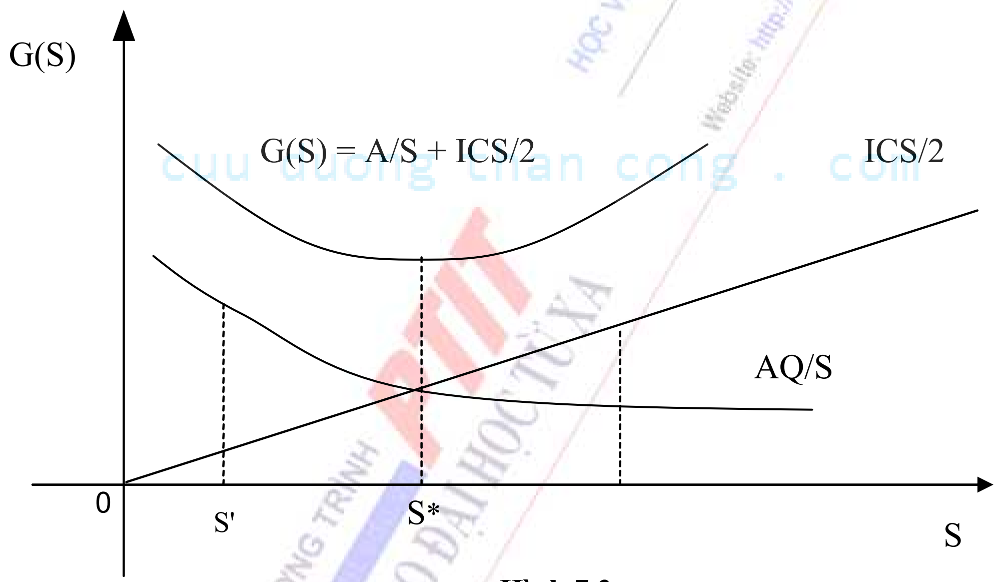
3. Nhận xét.

- Hàm G (S) = $\frac{AQ}{S} + \frac{ICS}{2}$ có thể biểu thị trên (Hình 7.3). Ta thấy S^* là hoành độ giao điểm của hai đồ thị của hàm chi phí đặt hàng dự trữ $f(S) = \frac{AQ}{S}$ và chi phí quản lý bảo quản dự trữ $g(S) = \frac{ICS}{2}$, nghĩa là $f(S^*) = g(S^*)$

Nhìn vào đồ thị ta thấy:

$$\frac{AQ}{S} > \frac{ICS}{2} \text{ với } S' < S^* \qquad (a)$$

$$\frac{AQ}{S} > \frac{ICS}{2} \text{ với } S'' > S^* \qquad (b)$$



Hình 7.3

Nhìn vào (a) ta thấy nếu ta đang thực hiện một chiến lược dự trữ nào đó mà chi phí đặt hàng quá cao so với chi phí dự trữ thì cần tăng khối lượng hàng đặt mỗi lần lên.

Ngược lại từ (b) ta thấy nếu chi phí đặt hàng thấp hơn nhiều so với chi phí dự trữ thì giảm khối lượng hàng đặt mỗi lần xuống.

Từ công thức S^* ta xác định được qui mô kho cần thiết tại điểm dự trữ tối ưu.

Từ công thức $F(S^*)$ ta xác định được lượng vốn cần thiết ch chu kỳ dự chữ tiêu thụ:

$$K^* = \frac{F(S^*)}{n^*}$$

$$= \frac{(\sqrt{2AQIC} + CQ)}{Q} \cdot \sqrt{\frac{2AQ}{IC}}$$

$$= = 2A + C\sqrt{\frac{2AQ}{IC}}$$

Sự thay đổi tổng nhu cầu Q có tác động đến qui mô kho và vốn.

Nếu $Q' = \alpha Q$, $(\alpha>0)$

thì $S^* = \sqrt{\frac{2AQ'}{IC}}$

$$= \sqrt{\frac{2A\alpha Q}{IC}} = S^*\sqrt{\alpha}$$

từ đó suy ra: Qui mô kho cần thiết thay đổi với hệ số $\sqrt{\alpha}$ khi nhu cầu thay đổi theo hệ số α.

Nếu $Q' = \alpha Q$, $(\alpha>0)$

thì vốn $K^* = 2A + C\sqrt{\frac{2AQ'}{IC}}$

$$= 2A + \sqrt{\alpha}\sqrt{\frac{2A\alpha Q}{IC}}$$

$$= 2A + \alpha\sqrt{\frac{2AQ}{IC}}.$$

Sự thay đổi của giá hàng có ảnh hưởng đến hành vi dự trữ. Giả sử lấy mức khối

lượng hàng đặt mỗi kỳ là S_0 và chủ hàng quy định nếu $S > q_0$ thì giá hàng sẽ hạ ε, $(0<\varepsilon<1)$ nghĩa là $C' = C(1-\varepsilon)$. Khi đó có hai khả năng xảy ra:

α) Khi đó $S_0 > S^*$.

+ Nếu $S_0\sqrt{1-\varepsilon} \le S^*$ thì đặt hàng với khối lượng là $S'^* = \frac{S^*}{\sqrt{1-\varepsilon}}$. (C), đây là lượng hàng đặt mua tối ưu.

+ Nếu $S_0\sqrt{1-\varepsilon} > S^*$ thì ta so sánh $F(S^*)$ và $F(S_0)$ để xác định lượng hàng đặt mua tối ưu.

β) Khi $S_0 \le S^*$ khi đó không cần thay đổi chiến lược đặt hàng mà vẫn nhận được ưu đãi khuyến mại. Khi đó lượng hàng tối ưu có thể lấy $S^* = \frac{S^*}{\sqrt{1-\varepsilon}}$

- Từ công thức $S^* = \sqrt{\frac{2AQ}{IC}}$

và $n^* = \frac{Q}{S^*} = Q\sqrt{\frac{IC}{2AQ}} = \sqrt{\frac{ICQ}{2A}}$ ta suy ra nếu Q không đổi thì S^* sẽ tỷ lệ thuận với căn bậc hai của chi phí đặt hàng A và tỷ lệ nghịch với căn bậc hai của giá hàng C và chi phí bảo quản I. Còn khi Q không đổi thì n^* tỷ lệ thuận với căn bậc hai của chi phí bảo quản dự trữ I và giá hàng C, tỷ lệ nghịch với chi phí đặt hàng A.

- Trong mô hình Wilson, ta giả thiết S = $\frac{Q}{n}$, nghĩa là khối lượng đặt mua hàng mỗi lần đều bằng nhau. Do đó chúng được đặt mua sau những khoảng thời gian như nhau. Ta thấy giả thiết này đưa ra không phải là tuỳ tiện mà nó có cơ sở khoa học. Thật vậy, giả sử trong giai đoạn T = 1 năm, hệ thống kinh tế đặt mua n lần với khối lượng một lần tương ứng là S_i, i (= $\overline{1,n}$). Lúc đó tổng khối lượng hàng hoá được mua trong năm là: Q = $\sum_{i=1}^{n} S_i$

(7.9)

Lượng dự trữ trung bình giữa hai lần đặt mua là: $Z_i = \frac{S_i}{2}$, i (= $\overline{1,n}$)

Thời gian bảo quản số hàng dự trữ đó là $\frac{S_i}{Q}T$, với T = 1 năm. Khi đó Tổng chi phí tạo ra dự trữ và bảo quản dự trữ là:

$$G = An + IC\sum_{i=1}^{n}\frac{S_i}{2}.\frac{S_i}{Q} = An + \frac{IC}{2Q}\sum_{i=1}^{n}S_i^2 \qquad (7.10)$$

Theo như cách giải trên, ta phải tìm cực tiểu hàm G cho ở (7.10) với điều kiện (7.9).

Theo phương pháp nhân tử Lagrange, ta xét hàm Lagrange dạng:

$$L = An + \frac{IC}{2Q}\sum_{i=1}^{n}S_i^2 - \lambda\left[\sum_{i=1}^{n}S_i^2 - Q\right] \qquad (7.11)$$

trong đó λ là nhân tử Lagrange thoả mãn điều kiện:

$$\lambda = 0 \text{ nếu } \sum_{i=1}^{n}S_i \neq Q \qquad (7.12)$$

$$\text{và } \lambda > 0 \text{ nếu } \sum_{i=1}^{n}S_i \equiv Q \qquad (7.13)$$

Với điều kiện (7.12) hàm L luôn luôn đồng nhất với hàm G, do đó cực tiểu của hàm L theo S_i cũng là cực tiểu của hàm G theo S_i. Giá trị cực tiểu của G là nghiệm của hệ phương trình sau:

$$\frac{\partial L}{\partial S_i} = \frac{IC}{Q}S_i - \lambda = 0, \qquad i = \overline{1,n}$$

Từ đó suy ra: $S_i^* = \frac{\lambda Q}{IC}$, $\qquad i = \overline{1,n}$

Như vậy tất cả các giá trị S_i đều bằng nhau và bằng $\dfrac{\lambda Q}{IC}$

Điều đó chứng tỏ điều kiện bằng nhau của các khối lượng đặt hàng mua là xuất phát từ giả thiết cường độ tiêu thụ dự trữ không thay đổi theo thời gian.

4. Các bài toán mẫu.

Bài toán 1. Một công ty xây lắp viễn thông, có tổng nhu cầu một loại vật tư là 200.000 tấn/năm, việc tiêu thụ vật tư là đều đặn trong năm, thời gian nhập hàng không đáng kể. Cửa hàng mua vật tư từ một nguồn không hạn chế về số lượng. Chi phí cho một lần đặt hàng là 400$, giá một tấn dây là 2400$, hệ số chi phí bảo quản là 0,05. Thời gian từ lúc đặt hàng đến khi có hàng vào kho là 2 tháng. Xác định các chỉ số cơ bản trong dự trữ và tiêu thụ vật tư đó của công ty.

<u>Giải:</u>

Từ điều kiện bài toán, ta có:

Q = 200.000 tấn/ năm; C = 2400$; I= 0,05

T = 1 năm; A = 400$, To = 2 tháng ≈ 0,164384 năm = 60 ngày.

Từ công thức (8.5) ta có $S^* = \sqrt{\dfrac{2AQ}{IC}} = \sqrt{\dfrac{2.200000.400}{2400.0,05}} 1154,7$ Tấn

Vậy lượng đặt hàng mỗi lần là $S^* \approx 1154,7$ tấn.

Từ công thức (7.7) suy ra tổng chi phí tạo ra dự trữ

$$F(S^*) = ICS^* + CQ = 0,05 \times 2400 .1154,7 + 2400\$. 200.000$$
$$= 480138564\$$$

Thời gian 1 chu kỳ dự trữ tiêu thụ là:

$$t^* = \frac{1}{n^*} = \frac{S^*}{Q} = \frac{1154,7}{200.000} = 0,006 \text{năm} \approx 2,190 \text{ngày}$$

Số lần đặt hàng trong một năm tối ưu là:

$$n^* = \frac{Q}{S^*} = \frac{200000}{1154,7} = 173,205 \text{lần}$$

Điểm đặt hàng tối ưu là:

$$B^* = Q\,[T_0 - t^*.\,\text{int}\,(T_0/t^*)]$$

$\text{int}\,[(T_0/t^0)] = \text{int}\left(\dfrac{60}{2,19}\right) = \text{int}(27,397) = 27$ ngày ≈ 0,074 năm

int [0,074] = 0.

$B^* = 200000\,[\,0,164384 - t^*.0] = 32876,8$ tấn.

Bài toán 2. Giả sử một công ty có một khoản tiền mặt V = 50.000 $ để chi tiêu trong một năm. Công ty có thể giữ một lượng tiền mặt nhất định, phần còn lại đem mua trái khoán, tiền mặt giữ trong két có lợi tức bằng không, còn trái khoán có lợi tức I = 0,01. Mỗi lần mua, bán trái khoán cần bỏ ra một khoản chi phí A = 20$. Hãy xác định lượng tiền mặt mà công ty đó dự trữ mỗi kỳ sao cho có lợi nhất, nếu việc chi tiêu là đều đặn.

Giải:

Giả sử công ty chia mỗi năm thành n kỳ dự trữ tiền mặt, mỗi kỳ lượng tiền mặt nhận được từ trái khoán là C. Như vậy chi phí cơ hội là IC/2, còn chi phí cho n lần giao dịch mua bán trái khoán là An hay AV/C. Bài toán trên dẫn đến bài toán dự trữ với hàm tổng tổn thất là N (C) = AV/C + IC/2. Đây là một dạng của mô hình dự trữ Wilson, ta có $C^* = \sqrt{\frac{2AV}{I}} = 14142\$$.

Với bài toán này người ta có thể tính toán lượng tiền phát hành cần thiết để đảm bảo quá trình lưu thông tiền tệ với tổng lượng lưu thông của một quốc gia đã được dự báo.

7.2.2 Mô hình dự trữ tiêu thụ đều, bổ sung dần

Trong mô hình dự trữ Wilson việc bổ sung hàng dự trữ là tức thời, nhưng trong thực tế sản xuất kinh doanh việc bổ sung hàng dự trữ là dần dần. Người ta vừa sản xuất vừa tiêu thụ, vừa nhập hàng vừa tiêu thụ. Đó là những mô hình dự trữ tiêu thụ đều, bổ sung dần dần. Trong mô hình này nếu cường độ cung cấp bằng cường độ tiêu thụ thì sẽ không có dự trữ, vì vậy ta chỉ xét các hệ thống kinh tế mà cường độ cung cấp lớn hơn đáng kể so với cường độ tiêu thụ.

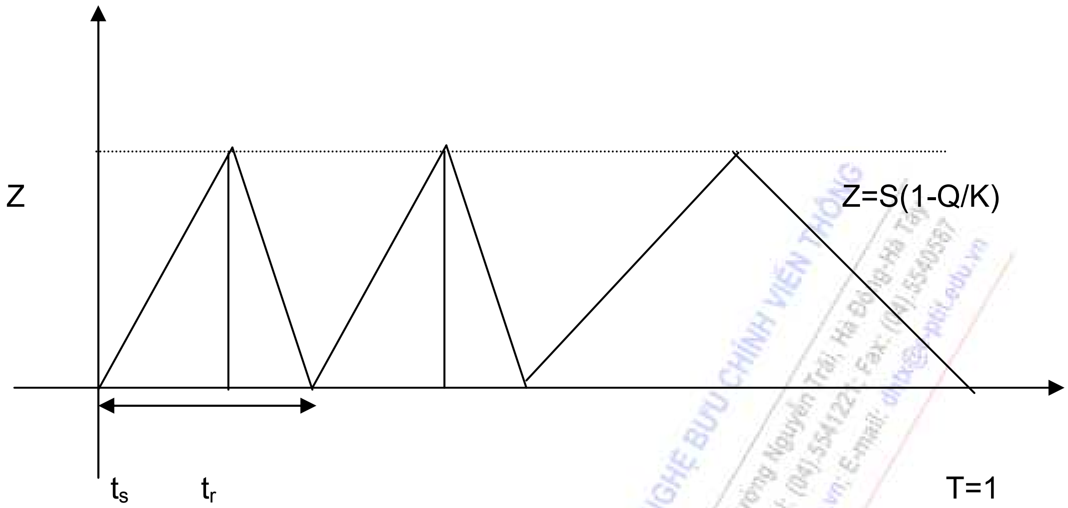
1. Mô hình bài toán dự trữ:

- Xét lớp hệ thống kinh tế mà nhu cầu một loại hàng trong thời kỳ T (T=1) là Q đơn vị. Việc tiêu thụ hàng đều đặn và thời gian bổ sung hàng vào kho được tiến hành với cường độ không đổi K đơn vị trong suốt thời gian T = 1. Ta giả thiết rằng K >> Q (vì nếu K ≤ Q thì không cần đặt vấn đề dự trữ). Chi phí cho mỗi lần đặt hàng là A, giá đơn vị hàng là C, hệ số chi phí dự trữ là I, thời gian đặt hàng là T_0. Hãy xác định số lần đặt hàng và lượng hàng đặt mỗi lần sao cho tổng chi phí tạo ra dự trữ.

Tương tự mô hình Wilson, ta có thể xem số lượng hàng đặt mỗi lần bằng nhau và bằng S, số lần đặt hàng là $n = \frac{Q}{S}$. Vì Q << K nên trong mỗi chu kỳ dự trữ - tiêu thụ T có hai khoảng thời gian t_s và t_r , trong đó t_s là thời gian có bổ sung vào kho và t_r là thời gian chỉ tiến hành tiêu thụ.

Gọi lượng hàng dự trữ tối đa trong kho là Z, khi đó nếu trong thời gian T=1, nhập hàng liên tục thì lượng hàng dư là K - Q, trong thời gian t_s lượng hàng dư cũng chính là Z, vậy $\frac{Z}{t_s} = \frac{K-Q}{T}$ hay $Z = t_s (K-Q)$, (vì T=1)

Mặt khác trong thời gian t_s lượng hàng nhập được vào kho là S, nên $\frac{S}{t_s} = \frac{K}{T}$ hay $t_s = \frac{S}{K}$. Từ đó suy ra $Z = \frac{S.(K-Q)}{K} = S(1 - \frac{Q}{K})$. Ta có sơ đồ biểu thị số lượng hàng dự trữ trong kho như (Hình 8.4)



Hình 7.4

Hàm tổng chi phí là:

$$F(S) = \frac{AQ}{S} + IC\frac{S}{2}\left(1 - \frac{Q}{K}\right) + CQ \qquad (7.14)$$

Mức dự trữ trung bình bằng: $\frac{z}{t_s} = \frac{S}{t_s}\left(1 - \frac{Q}{K}\right) = R$

Nếu đặt $I' = I(1 - \frac{Q}{K})$ và thay vai trò I' cho I, ta có hàm chi phí của mô hình Wilson và suy ra kết quả tương tự.

2. Giải mô hình

Khi thay I bằng $I' = I(1 - \frac{Q}{K})$, ta có mô hình hàm chi phí tạo ra dự trữ và bảo quản dự trữ giống như mô hình Wilson.

Tương tự như giải mô hình Wilson, ta xác định được lượng đặt hàng tối ưu mỗi lần là: $S^* = \sqrt{\frac{2AQ}{IC\left(1 - \frac{Q}{K}\right)}}$ (7.15)

$$G^* = \sqrt{2AQIC\left(1 - \frac{Q}{K}\right)} \qquad (7.16)$$

$$F(S^*) = \sqrt{2AQIC\left(1 - \frac{Q}{K}\right)} + CQ \qquad (7.17)$$

Số lần đặt hàng tối ưu là $n^* = \frac{Q}{S^*} = \sqrt{\frac{ICQ}{2A}\frac{(K - Q)}{K}}$ (7.18)

Chu kỳ dự trữ - tiêu thụ tối ưu là $t^* = \frac{1}{n^*}$ (7.19)

Điểm đặt hàng tối ưu trong trường hợp này ta xét khi đang làm đầy kho và khi đang làm vơi kho.

Trước tiên tính $B = Q\,[T_0 - t^*.\mathrm{int}\,(T_0/t^*)]$. Khi đó:

- Nếu $B \le Z^* = S^*(1 - \frac{Q}{K})$ thì B^* lấy bằng B và đặt hàng khi đang làm vơi kho.

- Nếu $B > Z$ thì B^* lấy bằng $(K-Q)\,(t^* - \frac{B}{Q})$ và đặt hàng khi đang làm đầy kho.

3. Nhận xét:

- Tỷ lệ Q/K là hoàn toàn xác định, nên sự sai khác của lời giải trong mô hình trên so với mô hình Wilson phụ thuộc vào giá trị $\frac{Q}{K}$. Nếu $\frac{Q}{K} \approx 0$ thì mô hình trên trở thành mô hình bổ sung tức thời. Ngược lại, khi $\frac{Q}{K} \approx 1$ thì coi như không có dự trữ.

- Mô hình dự trữ này phù hợp với quá trình tổ chức sản xuất tiêu thụ hơn là quá trình kinh doanh thương mại. Nếu đặt vào mô hình tổ chức sản xuất thì có thể xem K là năng lực sản xuất một mặt hàng chính, Q là nhu cầu, A là chi phí chuẩn bị một đợt sản xuất, C là chi phí trực tiếp cho sản xuất 1 đơn vị hàng, T_0 là thời gian chuẩn bị sản xuất.

- So với mô hình Wilson, mô hình này có tổng chi phí nhỏ hơn, vì có một khối lượng hàng có thể xem là không phải qua kho trong mỗi chu kỳ dự trữ - tiêu thụ, do đó giảm được chi phí dự trữ. Có thể xác định số lượng đó tại chiến lược dự trữ tối ưu như sau:

$$r^* = (S^* - Z^*) = S^* - S^*(1 - \frac{Q}{K}) = \frac{S^*Q}{K}$$

Với số chu kỳ tối ưu là $n = \frac{Q}{S^*}$ và T = 1, thì tổng lượng hàng không qua kho là $R^* = \frac{Q^2}{K}$. Khi đó R^* cũng là một chỉ tiêu để đánh giá một khía cạnh của chiến lược dự trữ đang tồn tại. Trong thực tế, R^* không phụ thuộc vào các chi phí mà chỉ phụ thuộc vào K và Q. Vì vậy nếu doanh nghiệp thực hiện một chiến lược dự trữ S, mà lượng hàng không qua kho lớn hơn R^* tức là nhu cầu lớn hơn mức dự báo hoặc khả năng sản xuất giảm, ngược lại khi lượng hàng không qua kho bé hơn R^* thì nhu cầu lớn hơn mức dự báo hoặc khả năng sản xuất tăng.

Ta cũng có các nhận xét tương tự như trong mô hình Wilson.

4. Các bài toán mẫu.

Bài toán1. Một cơ sở sản xuất thiết bị viễn thông có công suất 2.000.000 bộ/ năm. Nhu cầu tiêu thụ 1.400.000 bộ/năm. Chi phí cho một lần chuẩn bị sản xuất là 400$, chi phí sản xuất mỗi bộ là 140$. Chi phí bảo quản dự trữ là 0,01. Thời gian chuẩn bị một đợt sản xuất là 45 ngày.

a. Hãy phân chia nhu cầu trên thành từng đợt sản xuất sao cho tổng chi phí là bé nhất.

b. Nếu mỗi lần sản xuất 6.000 bộ thì chi phí cho mỗi bộ là 138$. Có nên sản xuất theo qui mô này không? Vì sao?

<u>Giải:</u> Theo bài toán ta có:

- Tổng công suất K = 2.000.000 bộ/năm
- Tổng nhu cầu Q = 1.400.000 bộ/năm
- Chi phí đặt hàng A = 400$
- Giá hàng C = 140 $
- Hệ số chi phí dự trữ I = 0,01
- Thời gian đặt hàng T_0= 0,123288 năm, tính theo ngày là 45 ngày.

Theo các công thức nhận được của mô hình tiêu thụ đều, bổ sung dần, ta tính được các chỉ tiêu tốt nhất như sau:

a. Lượng đặt hàng mỗi lần là: S^* = 51639,77795

Lượng hàng cực đại có trong kho là Z^*= 1.5491,93338

Tổng chi phí bé nhất là F (S^*) = 196021688,7

Thời gian một chu kỳ dự trữ - tiêu thụ là t^*= 0,036885556

Số chu kỳ trong một năm là: n^*= 27,11088342

Điểm đặt hàng: B^* = 2191,472493

Đặt hàng khi đang làm đầy kho

b. Nếu mỗi lần sản xuất 6.000 bộ thì tổng chi phí sẽ là:

F(6000) = 400$ x 1.400.000/6000 + 6000 x (1 - 1.400.00/ 2.000.000) x 130 x 0,01/2 + 1.400.000.138 = 179294503,3.

Ta thấy F (6000) < F (S^*). Vậy ta nên chọn lô hàng sản xuất mỗi lần là 6000 bộ.

Bài toán 2. Một cơ sở sản xuất ống nhựa đặc chủng dùng cho lắp đặt mạng cáp viễn thông, có năng lực sản xuất 60.000 tấn/năm. Nhu cầu thị trường ở mức 40.000 tấn/năm. Chi phí cho mỗi đợt chuẩn bị sản xuất là 140$. Chi phí sản xuất trực tiếp cho mỗi tấn nhựa là 900$. Việc tiêu thụ có thể xem là đều đặn. Chi phí bảo quản là 0,01, chi phí sản xuất trực tiếp. Trong năm t cơ sở này đáp ứng vừa đủ nhu cầu thị trường nói trên và chia thành 4 đợt sản xuất, mỗi đợt 10.000 tấn.

a. Hãy xác định khả năng sản xuất thực của cơ sở trong năm t. Biết rằng hàng không qua kho là: 20.000 tấn.

b. Năm (t+1), mọi chi phí tăng 10%, thời gian đặt hàng là 120 ngày, tính số lượng cần sản xuất mỗi đợt sao cho tổng chi phí là nhỏ nhất. Tính điểm đặt hàng tương ứng.

<u>Giải:</u>

a. Lượng hàng không qua kho trong trường hợp chọn qui mô tối ưu là $R^* = \frac{Q^2}{K} \approx$ 2.6666,666 tấn. Như vậy lượng hàng không qua kho nhỏ hơn mức lý thuyết. Từ công thức tính Z, thì lượng hàng không qua kho có thể tính theo công thức $R^2 = \frac{Q^2}{K}$.

Từ đó có thể ước tính khả năng thực của cơ sở là:

$$K^* = \frac{Q^2}{R^*} = 80.000 \text{ tấn.}$$

b. Theo bài toán ta có:

Tổng công suất K = 80.000,00

Tổng nhu cầu Q = 40.000,00

Chi phí đặt hàng A = 154,00

Hệ số chi phí dự trữ I = 0,010

Đơn giá C = 990,000

Thời gian đặt hàng (số ngày) T_0 = 120

Từ các công thức trong mô hình đã có, ta tính được:

Lượng hàng đặt tối ưu mỗi lần là S^* = 1577,62

Lượng hàng tối đa trong kho là Z^* = 788,81

Tổng chi phí nhỏ nhất $F(S^*)$ = 39607809,225

Thời gian một chu kỳ t^* = 0,0394

Số lần đặt hàng tối ưu n^* = 25,35

Điểm đặt hàng tối ưu B^* = 529,71, đặt hàng khi đang làm với kho.

7.2.3. Mô hình dự trữ nhiều mức giá

Ở các mô hình đã xét, ta giả thiết giá của mỗi đơn vị hàng không đổi, nhưng thực tế, do người nguyên nhân khác nhau, giá hàng có thể thay đổi theo qui mô của lô hàng mua mỗi lần, chẳng hạn người ta có thể chia các mức giá thành giá bán lẻ, giá bán buôn cấp 1, cấp 2, giá bán theo đơn đặt hàng có ứng tiền trước v.v. Nói một cách tổng quát là giá mỗi đơn vị hàng có thể thay đổi theo số lượng hàng đặt mỗi lần. Sau đây chúng ta nghiên cứu một số mô hình tiêu biểu thuộc lớp mô hình dự trữ này.

1. Mô hình bài toán:

Một doanh nghiệp có nhu cầu một loại hàng X trong thời gian T là Q đơn vị. Chi phí cho mỗi lần đặt hàng là A, hệ số chi phí dự trữ là I, giá hàng thay đổi theo số lượng mua mỗi lần S như sau:

Nếu $S < S_1$ thì giá là C_1

$S_1 \le S < S_2$ thì giá là C_2

$S_2 \le S < S_3$ thì giá là C_3

....

$S_{k-1} \le S < S_k$ thì giá là C_k

....

$S_{n-1} \le S$ thì giá là C_n ,

Trong đó $S_1 < S_2 < .... < S_{n-1}$, ta gọi S_i, $(i = \overline{1,n})$ là các mốc thay đổi giá. Có thể xem S_0 = 0, $S_n = +\infty$ và $C_1 > C_2 > .... > C_n$.

Để đơn giản, đầu tiên ta giả thiết thời gian bổ sung hàng không đáng kể (bổ sung tức thời)

Đặt $F_i(S) = \dfrac{AQ}{S} + IC_i\dfrac{S}{2} + C_iQ$ (7.20)

Đây là tổng chi phí quản lý dự trữ nếu ta mua hàng với giá C_i. Ta có:

$$F(S) = \begin{cases} F_1(S) \text{ khi } S \in (0, S_1) \\ F_2(S) \text{ khi } S \in [S_1, S_2] \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_{n-1}(S) \text{ khi } S \in [S_{n-2}, S_{n-1}) \\ F_n(S) \text{ khi } S \in [S_{n-1}, \infty) \end{cases} \quad (7.21)$$

2. Giải mô hình

Theo giả thiết ta có $F_1(S) > F_2(S) > \ldots\ldots > F_n(S)$ với mọi giá trị $S > 0$.

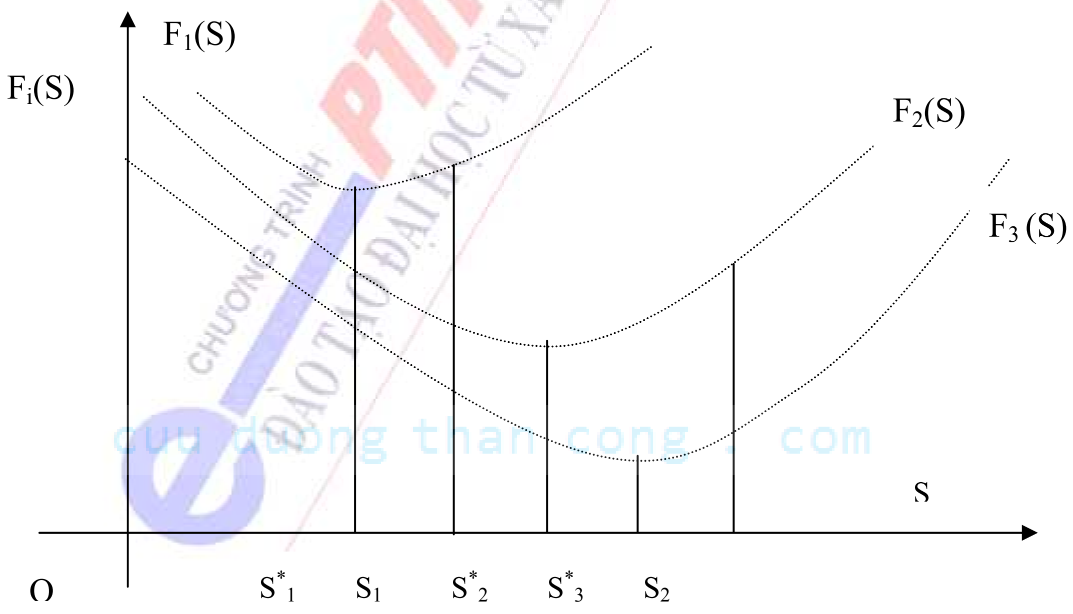
Gọi S_i^* là điểm cực tiểu của hàm $F_i(S)$, ta có:

$$S_i^* = \sqrt{\frac{2AQ}{IC_i}} \qquad , i = \overline{1, n-1} \quad (7.22)$$

Do C_i giảm, nên ta có $S_i^* > S_{i-1}^*$, mặt khác ta có:

$$F(S_i^*) = C_iQ + \frac{2AQ}{S_i^*} < F_{i-1}(S_{i-1}^*) = C_{i-1}Q + \frac{2AQ}{S_{i-1}^*}$$

Ta có thể mô tả trường hợp 3 mức giá trên đồ thị, như sau:



Hình 7.5

a. Khi có hai mức giá:

a1. Ta có: $S_2^* = \sqrt{\dfrac{2AQ}{IC_2}}$ (7.23)

- Nếu $S_2^* \geq S_1$ thì lượng hàng đặt tối ưu là $S^* = S_2^*$

- Nếu $S_2^* < S_1$ thì $F_2(S_1) = \dfrac{AQ}{S_1} + \dfrac{IC_2S_1}{2} + C_2Q$, đây là giá trị bé nhất của hàm tổng chi phí với $S \geq S_1$.

Ta có: $S_i^* = \sqrt{\dfrac{2AQ}{IC_1}}$ (7.24)

$F_1(S_i^*) = \sqrt{2AQIC_1} + C_1Q$ (7.25)

Có ba khả năng xảy ra:

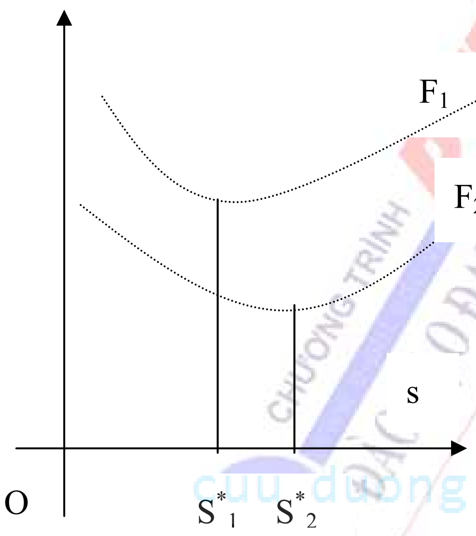
Nếu $F_2(S_1) < F_1(S_i^*)$ thì $S^* = S_1$ (7.26a)

Nếu $F_2(S_1) > F_1(S_i^*)$ thì $S^* = S_i^*$ (7.26b)

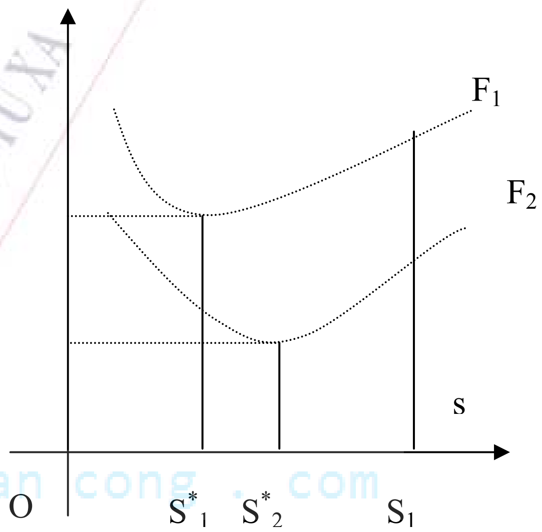
Nếu $F_2(S_1) = F_1(S_i^*)$ thì $S^* = S_i^*$ hoặc $S^* = S_1$ (7.26c)

Nghĩa là có hai mức đặt hàng tối ưu

Có thể mô tả hai trường hợp trên bởi các đồ thị (Hình 7.6, Hình 7.7, Hình 7.9) dưới đây:

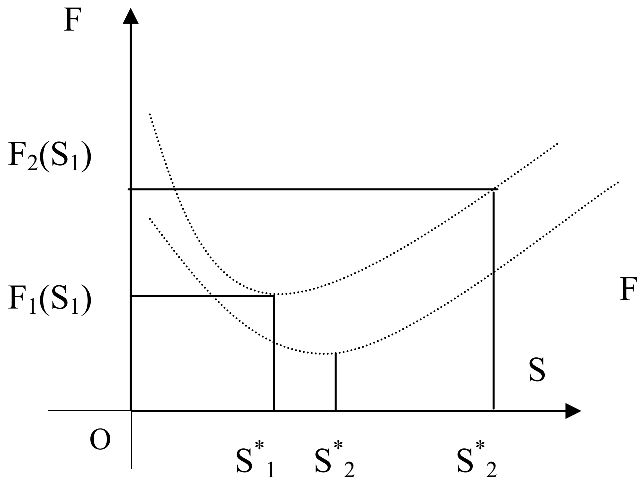


Hình 7.6

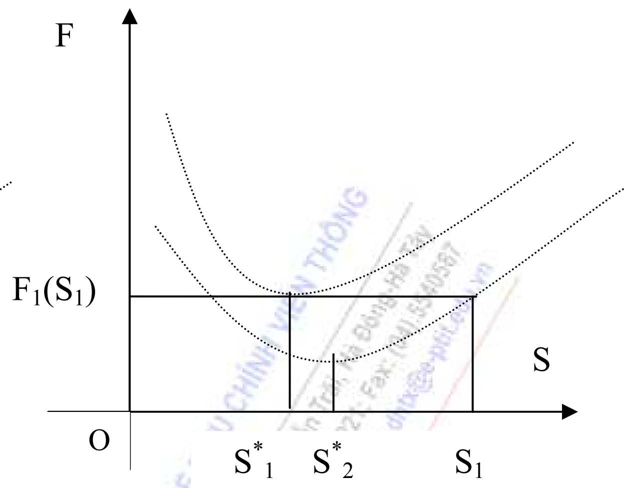


Hình 7.7

Khi $S_2^* \geq S_1$, ta lấy $S^* = S_2^*$. Khi $F_2(S_1) < F_1(S_1^*)$ ta lấy $S^* = S_1$



Hình 7.8



Hình 7.9

Trường hợp $F_2(S_1)>F_1(S_i^*)$ thì lấy $S^* = S_i^*$

Khi $F_2(S_1) = F_1(S_i^*)$ ta lấy

$S^* = S_1 = S_i^*$

b. Trường hợp n mức giá

Ta xét hàm F_n (S) từ đó tìm giá trị nhỏ nhất của hàm F(S) trong khoảng $[S_{n-1}, +\infty]$, nếu giá trị đó đặt tại điểm cực trị thì ta nhận được giá trị $S^* = S^*_n$ là giá trị tại đó F(S) nhỏ nhất toàn bộ, (với $S < +\infty$), ngược lại nếu lấy giá trị $F_n(S_{n=1})$ làm giá trị nhỏ nhất địa phương.

Xét khoảng $[S_{n=1}, S_{n-1}]$ để tìm giá trị nhỏ nhất của F (S) biểu hiện bởi giá trị nhỏ nhất của hàm $F_{n-1}(S)$ trong khoảng này, so sánh với giá trị nhỏ nhất trong khoảng trước... Tiếp tục như vậy ta tìm được S^* khi nhận được giá trị đầu tiên:

$g^*_1 \in [S_{i-1}, S_i]$

Ta có thể lý luận đơn giản hơn khi mức giá quá lớn như sau:

Tính các giá trị S^*_k, với k = n, n - 1, n - 2… cho đến khi nhận được S^*_i thoả mãn điều kiện S^*_i thuộc $[S_{i-1}, S_i]$.

Tính $\{F_k(S_{k-1})$ với $k > i$ $\}$ và $F_i(S^*_i)$

Tìm min $\{F_k(S_{k-1})$ với $k > i$, $F_i(S^*_i)$ $\}$

Điểm đạt giá trị nhỏ nhất chính là điểm cực tiểu của hàm F(S).

Tập hợp các dữ liệu cần thiết cho việc giải bài toán, được thể hiện ở bảng sau:

k	S^*_i	S_{k-1}	Min F(S)
n			
n - 1			
n - 2 …			………..

3. Các bài toán mẫu.

Bài toán 1. Một doanh nghiệp kinh doanh một loại thiết bị điện tử, tổng lượng hàng có khả năng tiêu thụ là 10.000 chiếc/năm. Chi phí cho một lần đặt hàng là 100$; hệ số chi phí bảo quản là 10%, cường độ bán ra đều đặn. Thời gian nhập kho không đáng kể. Nếu mỗi lần đặt mua từ 200 chiếc trở lên thì giá 1 chiếc là 1205$. Thời gian đặt hàng là 90 ngày.

Hãy xác định lượng hàng mua mỗi lần sao cho tổng chi phí nhỏ nhất. Tính thời gian 1 chu kỳ dự trữ - tiêu thụ và điểm đặt hàng tương ứng.

<u>Giải:</u>

Bài toán này là dạng mô hình quản lý dự trữ với 2 mức giá.

Theo bài toán ta có:

Tổng nhu cầu Q = 10.000 chiếc/năm

Giá hàng: mua > 2000 chiếc, (S_{k-1}), thì giá 1.200$, ($C_k$)

Mua dưới 2000 chiếc thì giá 1205$/chiếc

Chi phí đặt hàng a = 100$

Hệ số chi phí dự trữ I = 0,1

Thời gian đặt hàng T_0 = 90 ngày = 3 tháng ≈ 0,2465 năm.

Ta có $S_k = \sqrt{\frac{2AQ}{IC_2} = \frac{2.100.10000}{0{,}1.1200}} \approx 129{,}099$ chiếc

Vì S^*_k nhỏ hơn S_1 = 200 chiếc, ta tính $F_2(S_1) = \frac{AQ}{S_1} + \frac{IC_2S_1}{2} + C_2Q$. Ta có:

$$F_2(S_1) = \frac{100.10000}{2000} + \frac{0{,}1.1200.2000}{2} + 1200\ .\ 10000$$

= 500$ + 120000$ + 12000000$

= 12.120.500$.

$$S^*_i\sqrt{\frac{2AQ}{IC_2}} = \sqrt{\frac{2.100.10000}{0{,}1.1205}} \approx 128{,}831 \text{ chiếc.}$$

$F_1(S^*_k) = \sqrt{2AQIC_2} + C_1Q = \sqrt{2.100.10000.0{,}1.1205} + 1205.10000$

= 12065524,175$.

Vì $F_2(S_1) > F_1(S^*_k)$ nên ta lấy S^* = 128,831 chiếc.

Từ đó tính được:

Lượng hàng đặt mỗi lần là S^* = 128,831 chiếc.

Tổng chi phí tạo ra dự trữ bé nhất là $F(S^*)$ = 12065524,175

Thời gian 1 chu kỳ tiêu thụ - dự trữ là $t^* = \frac{1}{n^*} = \frac{S^*}{Q}$ = 77,62 lần.

Điểm đặt hàng tối ưu $B^* = Q[t_0 - t^*.\text{int}(T_0/t^*)]$

$$= 10000.\left[0{,}2465 - 0{,}013.\text{int}\left(\frac{0{,}2465}{0.013}\right)\right]$$

= 125 chiếc.

Bài toán 2. Một cửa hàng kinh doanh mặt hàng A. Tổng nhu cầu trong khu vực là 4000 tấn/năm. Cường độ tiêu thụ đều và thời gian nhập hàng vào kho không đáng kể. Chi phí mỗi lần làm hợp đồng là 200$, hệ số chi phí dự trữ là I = 0,05, thời gian đặt hàng là 120 ngày. Nếu mỗi lô hàng mua từ 100 tấn trở lên thì giá 1 tấn là 56$, ngược lại giá 57$ 1 tấn. Xác định cỡ lô hàng đặt mỗi lần tối ưu, thời gian 1 chu kỳ dự trữ - tiêu thụ và điểm đặt hàng.

Giải: Đây là mô hình dự trữ 2 mức giá. Theo đầu bài ta có:

Tổng nhu cầu Q = 400 tấn/năm.

Mức chuẩn để thay đổi giá S_1 = 100 tấn.

Chi phi đặt mua mỗi lần A = 200$.

Giá mua khi $S < S_1$ là 57$/ tấn.Khi $S \geq S_1$ là 56 tấn.

Hệ số chi phí dự trữ I = 0,05.

Thời gian đặt hàng T_0 = 0,328767 = 120 ngày.

$$S_2^* = \sqrt{\frac{2AQ}{IC_2}} = \sqrt{\frac{2.200.400}{0{,}05.56}} = 755{,}929 \text{ tấn.}$$

$S^*_2 < S_2$. Ta tính $F_2(S_1) = \dfrac{AQ}{S_1} + \dfrac{IC_2S_1}{2} + C_2Q = 227600$.

Tính $S_1^* \sqrt{\dfrac{2AQ}{IC_1}} = \sqrt{\dfrac{2.200.4000}{0{,}05.57}} = 749{,}269$ tấn

$$F_1(S_1^*) = \sqrt{2AQIC_1} + C_1Q = \sqrt{2.200.4000.0{,}05.57} + 57.4000.$$

= 243524,175$.

Ta thấy $F_2(S_1) < F_1(S^*_1)$ nên lấy $S^* = S_1$ = 1000 tấn.

Từ đó ta tính được:

Lượng hàng đặt mỗi lần là S^* = 1000 tấn.

Tổng chi phí tạo ra dự trữ bé nhất là $F(S^*)$ = 227600$.

Thời gian 1 chu kỳ tiêu thụ - dự trữ là t^* =0,25.

Số lần đặt hàng trong năm tối ưu n^* = 4.

Điểm đặt hàng tối ưu $B^* = Q[t_0 - t^*.\text{int}(T_0/t^*)]$.

= 4000. [0,329 - 0,25 . 1] = 4000 . 0,04 = 416 tấn.

Bài toán 3. Một cửa hàng kinh doanh các linh kiện điện tử, trong dó nhu cầu linh kiện loại X là 20000 chiếc/năm, chi phí mỗi lần đặt hàng là 50$, hệ số chi phí dự trữ là 0,2. Giá hàng tuỳ thuộc vào lượng hàng đặt mua mỗi lần S như sau:

$0 \leq S < 5000$, giá 4,3$/chiếc

$5000 \leq S < 1500$, giá 4,1$/chiếc

1500≤ S, giá 4$/chiếc.

Hãy xác định chiến lược dự trữ sao cho tổng chi phí tạo ra dự trữ là bé nhất. Tính các chỉ tiêu chủ yếu của mô hình quản lý dự trữ này. Biết thời gian đặt hàng là T_0 = 90 ngày.

Giải:

Đây là mô hình dự trữ có 3 mức giá. Theo bài toán, ta có:

Tổng nhu cầu Q = 20000 chiếc/năm

Mốc giá thứ nhất S_1 = 5000, mốc giá thứ hai S_2 = 15000

Giá bán 4,3$/chiếc khi $0 \le s < 5000 = S_1$

4,1$/chiếc khi $5000 \le S < 5000 = S_1$

4,0$/chiếc khi $15000 \le s$

Vậy C_1 = 4,3$/c; C_2= 4,1$/c; c_3= 4$/c

Chi phí đặt hàng A = 50$

Hệ số chi phí dự trữ I = 0,2

Thời gian đặt hàng T_0 = 90 ngày ≈ 0,246575 năm.

Theo thuật toán giải bài toán quản lý dự trữ nhiều mức giá, ta tính được: S^* = 500 chiếc.

Tổng chi phí tạo ra dự trữ bé nhất là $F(S^*)$ = 84250$

Thời gian 1 chu kỳ tiêu thụ - dự trữ là t^* = 0,25 năm

Số lần đặt hàng tối ưu trong năm là n^* = 4

Điểm đặt hàng tối ưu là B^* = 4931,507 chiếc.

8.2.4. Mô hình dự trữ nhiều sản phẩm

Trong thực tế, ở phần lớn các hệ thống kinh tế - xã hội, trong quá trình hoạt động của mình, phải dự trữ nhiều loại hàng. Giữa các loại hàng đó luôn có sự tác động qua lại ảnh hưởng lẫn nhau, chúng có thể thay thế lẫn nhau hoặc bổ sung cho nhau. Thậm chí dù các loại hàng hoá độc lập với nhau về tính năng sử dụng thì chúng vẫn có tác động qua lại với nhau thể hiện ở sự cạnh tranh về dung tích kho mà chúng chiếm chỗ, về lượng vốn đầu tư, về số lượng hợp đồng được ký kết có giá trị pháp lý trong năm…

Chúng ta sẽ nghiên cứu một số mô hình hình dự trữ với các điều kiện ràng buộc như trên.

1. Mô hình dự trữ với ràng buộc về dung tích kho

a.Mô hình: Giả sử đơn vị kinh tế ta xét cần dự trữ nhiều loại hàng hoá trong kho. Đối với loại hàng loại j cần f_j m^3 cho một đơn vị hàng hoá. Nếu S_j là khoío lượng hàng loại j được đặt mua mỗi lần thì với dung tích kho hạn chế bằng f, ta có điều kiện ràng buộc là:

$$\sum_{j=1}^{n} f_j S_j \le f \qquad (7.26)$$

Ký hiệu Q_j là nhu cầu hàng năm của loại hàng thứ j.A_j là chi cố định đặt mua loại hàng j, C_j là giá mỗi đơn vị hàng j (giá này không phụ thuộc vào khối lượng hàng đặt mua), I_j là hệ số chi phí bảo quản hàng j:

Tổng chi phí tạo ra n loại hàng dự trữ là:

$$f = \sum_{j=1}^{n}\left[\frac{Q_j}{S_j}A_j + I_jC_j\frac{S_l}{2}\right] + \sum_{j=1}^{n} C_jQ_j \qquad (7.27)$$

Bài toán đòi hỏi phải xác định các giá trị S_j ($j = \overline{1,n}$) sao cho (7.27) đạt cực tiểu với điều kiện (7.26).

<u>b. Giải mô hình</u>: áp dụng phương pháp nhân tử Lagrange để tìm cực trị của hàm F, ta xây dựng hàm Lagrange cho hàm $G = \sum_{j=1}^{n}\left[\frac{Q_j}{S_j}A_jI_jC_j\frac{S_j}{2}\right]$

Ta có: $$L = \sum_{j=1}^{n}\left[\frac{Q_j}{S_j}A_jI_jC_j\frac{S_j}{2}\right] + \lambda\left[\sum_{j=1}^{n} f_jS_j - f\right] \qquad (7.28)$$

Trong đó λ là nhân tử Lagrange thoả mãn điều kiện:

$$\lambda = 0 \text{ nếu } \begin{cases} f_jS_j < f \\ f_jS_j = f \end{cases} \qquad (7.29)$$

Với điều kiện (7.29), hàm I luôn luôn đồng nhất với hàm G và cực tiểu của hàm L cũng chính là cực tiểu của hàm G.

Các giá trị của S_j ($j = \overline{1,n}$) và λ là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial S_j} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{Q_j}{S_j^2}Aj + \dfrac{I_jC_j}{2} + \lambda f_j = 0, j = \overline{1,n} \\ \sum_{j=1}^{n}(f_jS_j - f) = 0 \end{cases} \qquad (7.30)$$

Giải hệ (7.30) ta nhận được giá trị tối ưu của S^*_j và λ^*. Các giá trị S^*_j được biểu diễn qua λ^* bằng biểu thức:

$$S_j^* = \sqrt{\frac{2Q_jA_j}{I_jC_j + \lambda^* f_j}}, j = \overline{1,n} \qquad (7.31)$$

Từ kết quả trên, ta nhận được các biểu thức:

$$F(S^*_j) = \sum_{j=1}^{n}\left[\frac{Q_j}{S_n^*}Aj + I_jC_j\frac{S_j^*}{2}\right] + \sum_{j=1}^{n} C_jQ_j \qquad (7.32)$$

Số lần đặt mua tối ưu của loại hàng j là:

$$n_j^* = \frac{Q_j}{s_j^*}, j = \overline{1,n} \qquad (7.33)$$

Thời gian 1 chu kỳ dự trữ - tiêu thụ loại hàng j là:

$$t_j^* = \frac{1}{n_j^*}, j = \overline{1,n} \qquad (7.34)$$

Điểm đặt hàng tối ưu cho loại hàng j là:

$B^*_j = Q_j\,[T^0_j - t^*_j \text{ int } (T^0_j/t^*_j)]$, $j = \overline{1,n}$ (7.35)

<u>c. Nhận xét</u>: Việc đưa điều kiện (7.26) vào bài toán, làm cho bài toán trở nên phức tạp hơn nhiều. Trong thực tế ta giải bài toán trên như sau:

- Đầu tiên ta giải bài toán không có điều kiện ràng buộc (7.26) và xác định được giá trị tối ưu.

$$S_j^0 = \sqrt{\frac{2A_jQ_j}{I_jC_j}}, j = \overline{1,n} \qquad (7.36)$$

- Nếu các S^0_j thoả mãn điều kiện (7.26) thì đó chính là các nhiệm tối ưu của bài toán đã cho, nếu S^0_j không thoả mãn điều kiện (7.26) thì ta giải bài toán có điều kiện ràng buộc (7.26)

2. Mô hình dự trữ với ràng buộc về vốn đầu tư.

<u>a. Mô hình</u>: Xét lớp hệ thống kinh tế mà tổng số vốn đầu tư có thể chi cho dự trữ trong một năm là K, khi đó hệ thống này hoạt động dự trữ luôn phải chịu sự ràng buộc là:

$$\sum_{j=1}^{n} C_jS_j \le K \qquad (7.37)$$

Khi đó ta phải tìm giá trị S^*_j $j = \overline{1,n}$ sao cho hàm $F(S^*_j)$ cho ở (7.27) đạt cực tiểu với điều kiện ràng buộc (7.37)

<u>b. Giải mô hình</u>:

- Đầu tiên ta giải mô hình dự trữ không có ràng buộc (7.26) và (7.37). Nếu các giá trị S^0_j, ($j = \overline{i,n}$) tìm được thoả mãn điều kiện (7.26) và (7.37) thì đó là lời giải của mô hình đã cho và ta cần tìm. Nếu có ít nhất một trong hai điều kiện không được thoả mãn thì ta giải mô hình với điều kiện chưa thoả mãn này, chẳng hạn với (7.26). Tiến hành giải mô hình theo phương pháp đã biết. Sau khi tìm được S^*_j, ($j = \overline{1,n}$) ta kiểm tra điều kiện (7.37) có thoả mãn hay không? Nếu thoả mãn thì đó là lời giải cần tìm. Nếu không thoả mãn, ta giải mô hình với ràng buộc (7.37). Nếu lời giải của bài toán này thoả mãn điều kiện (7.26) thì đó chính là lời giải mô hình với hai điều kiện ràng buộc (7.26) và (7.37). Khi đó hàm Lagrange L tương ứn với hàm G và hai ràng buộc (7.26) ; (7.37) có dạng:

$$L = \sum_{j=1}^{n}\left[\frac{Q_j}{S_j}A_j + C_jI_j\frac{S_j}{2}\right] + \lambda\left[\sum_{j=1}^{n} h_jS_j - f\right] + \delta\left[\sum_{j=1}^{n} C_jS_j - K\right], \qquad (7.38)$$

Trong đó λ và δ là nhân tử Lagrange. Các giá trị tối ưu S^*_j , ($j = \overline{1,n}$) là nghiệm của hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial S_i} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \delta} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{Q_j}{S_j^2}A_j + \dfrac{I_jC_j}{2} + \lambda f_j + \delta C_j = 0, j = \overline{1,n} \\ \sum_{j=1}^{n} f_jS_j - f = 0 \\ \sum_{j=1}^{n} C_jS_j - K = 0 \end{cases} \quad (7.39)$$

Giải hệ (7.39) ta thu được S^*_j:

$$S^*_j = \sqrt{\frac{2Q_jA_j}{I_jC_j + 2\lambda^* f_j + 2\delta^* C_j}}, j = \overline{1,n} \quad (7.40)$$

Từ (7.40), ta xác định lượng $F(S^*_j)$, t^*_j, n^*_j và B^*, $j = \overline{1,n}$ nhờ các biểu thức đã biết.

3. Bài toán mẫu.

Một doanh nghiệp sản xuất và bảo quản trong kho của nó ba loại thiết bị bưu điện. Doanh nghiệp chỉ được phép dùng cho dự trữ một số vốn đầu tư không quá 14.000$. sản phẩm được sản xuất ở doanh nghiệp theo lô. Các số liệu liên quan đến quá trình sản xuất và dự trữ được cho ở bảng sau:

Loại thiết bị / Các số liệu sản xuất và dự trữ	1	2	3
Nhu cầu hàng năm Q_j	1.000	500	2.000
Giá thành C_j	20$/lô	100$/lô	50$/lô
Chi phí chuẩn bị sản xuất A_j	50$/lô	75$/lô	100$/lô
Hệ số bảo quản I_j	0,20	0,20	0,20

Hãy xác định khối lượng dự trữ tối ưu cho từng loại thiết bị

Giải: Bài toán ở đây đặt ra là phải tìm S^*_1, S^*_2,S^*_3.

Trước tiên ta tìm các giá trị S_j khi không có điều kiện ràng buộc về vốn đầu tư. Ta có:

$S_j^0 = \sqrt{\dfrac{2Q_jA_j}{I_jC_j}}, j = \overline{1,3}$ thay số liệu vào ta tính được:

$$S_1^0 = \sqrt{\frac{2.100.50}{0,20.50}} = 158 \text{lô}$$

$$S_2^0 = \sqrt{\frac{2.100.75}{0,20.100}} = 61 \text{lô}$$

$$S_3^0 = \sqrt{\frac{2.2000.100}{0,20.50}} = 200 \text{lô}$$

Tổng số vốn đầu tư tương ứng là:

K = 20.158 + 100.61 + 50.200 = 19.260$ > 14.000$.

Vậy ta phải giải bài toán với điều kiện ràng buộc về vốn đầu tư:

$$\sum_{j=1}^{3} C_j S_j \le K$$

Khi đó S_j^* được xác định bởi biểu thức:

$$S_j^* = \sqrt{\frac{2Q_j A_j}{I_j C_j + 2\delta^* C_j}} = \sqrt{\frac{2Q_j A_j}{C_j\left(I_j + 2\delta^*\right)}}, \qquad , (j = \overline{1,n}) \qquad (a)$$

trong đó δ là nghiệm của phương trình:

$$\sum_{j=1}^{3} C_j S_j - K = 0 \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{3} \sqrt{\frac{2Q_j A_j C_j}{\left(I_j + 2\delta^*\right)}} = K \qquad (b)$$

Thay giá trị vào biểu thức trên, được:

$$14000\$ \;= \sqrt{\frac{2.1000^2}{0{,}20 + 2\delta^*}} + \sqrt{\frac{2.500.100.75}{0{,}20 + 2\delta^*}} + \sqrt{\frac{2.2000.50.100}{0{,}20 + 2\delta^*}}$$

$$= \sqrt{\frac{10^6}{0{,}1 + \delta^*}} + \sqrt{\frac{5.10^4.75}{0{,}10 + \delta^*}} + \sqrt{\frac{10.10^6}{0{,}1 + \delta^*}}$$

hay $\sqrt{0{,}10 + \delta^*} = \frac{1}{14}\left[1 + 1{,}935 + 3{,}169\right] = \frac{6{,}16}{14} \approx 0{,}436$

=> $\delta^* = 0{,}091$

Thay $\delta^* = 0{,}091$ vào (a) ta được:

$$S_1^* = \sqrt{\frac{2.1000\ .50}{20\ .0{,}382}} = 114 \text{ lô}$$

$$S_2^* = \sqrt{\frac{2.500\ .75}{100\ .0{,}382}} = 44 \text{ lô}$$

$$S_3^* = \sqrt{\frac{2.2000\ .100}{50\ .0{,}382}} = 145 \text{ lô}$$

7.3. MÔ HÌNH QUẢN LÝ DỰ TRỮ ĐỐI VỚI YẾU TỐ NGẪU NHIÊN

Trong hoạt động thực tiễn, thường dẫn đến lớp bài toán điều khiển dự trự, trong đó có những yếu tố ngẫu nhiên. Chẳng hạn nhu cầu Q, cường độ tiêu thụ - dự trữ và thời gian vẫn chuyển hàng dự trữ… đều là những đại lượng ngẫu nhiên và chúng tuân theo một quy luật phân phối xác suất nào đó. Việc nghiên cứu lớp lớp bài toán này được tiến hành ở nhiều góc độ khác nhau, tuỳ thuộc vào mục đích nghiên cứu và công cụ mà ta có thể sử dụng nghiên cứu.

Sau đây ta chỉ nghiên cứu một lớp bài toán điều khiển dự trữ đơn giản, trong đó chỉ đề cập đến tính ngẫu nhiên của một yếu tố, các yếu tố ngẫu nhiên này xem như đã biết quy luật phân phối xác suất của nó. Như vậy các kết quả nghiên cứu dù là rất cụ thể cũng chủ yếu mang tính phương pháp, nhờ đó ta có thể nghiên cứu những bài toán tương tự. Sau đây ta nghiên cứu hai mô hình tiêu biểu.

7.3.1. Mô hình dự trữ có bảo hiểm.

Chúng ta xét một lớp bài toán điều khiển dự trữ mà thời gian đặt hàng là một biến ngẫu nhiêm, tuân theo một quy luật phân phối xác suất nào đó. Trong trường hợp này, dù cho việc tiêu thụ là đều đặn, thì lượng hàng tiêu thụ trong thời gian đặt hàng cũng trở thành một biến ngẫu nhiên. Điều này dẫn đến tình trạng là có thể thiếu hàng trong thời gian đặt hàng T_0, nên sẽ gây ra những thiệt hại nhất định cho các hoạt động kinh tế - xã hội. Trong nhiều trường hợp hậu quả của việc thiếu hàng là rất lớn, chẳng hạn: Trong một chiến dịch quân sự nếu thiếu vũ khí, lương thực, thuốc men sẽ dẫn đến kết cục xấu cho chiến dịch quân sự. Trong phòng dịch bệnh nếu thiếu thuốc dự trữ sẽ làm cho dịch bệnh lây lan gây đại dịch cho xã hội...

Vì vậy cần phải xác định một chiến lược dự trữ đảm bảo cho mọi hoạt động của hệ thông kinh tế - xã hội đang xét không bị gián đoạn với một xác suất cho phép nào đó. (Với độ tin cậy, độ an toàn nào đó) Lượng dự trữ đó gọi là lượng dự trữ bảo hiểm.

1. Mô hình bài toán.

Ta phải điều khiển dự trữ một hệ thống kinh tế - xã hội mà nhu cầu về một loại hàng nào đó, trong thời gian T = 1 đv, là Q đơn vị. Chi phí mỗi lần đặt hàng là A, giá hàng là C, hệ số chi phí bảo quản theo giá là I, thời gian đặt hàng là một biến ngẫu nhiên t đồng nhất trong mỗi chu kỳ dự trữ - tiêu thụ, có phân phối xác suất là P (t) với trung bình và phương sau hữu hạn (trong hầu hết các trường hợp có thể xem là t có phân phối chuẩn). Việc bổ sung hàng là tức thời và tiêu thụ hàng diễn ra đều đặn theo thời gian. Hãy xác định lượng hàng cần mua mỗi lần và một lượng dự trữ bảo hiểm R sao cho khả năng xẩy ra thiếu hàng không lớn hơn α đủ nhỏ và có tổng chi phí dùng cho quản lý dự trữ là ít nhất.

Như vậy, với việc bổ sung lượng dự trữ bảo hiểm R, sẽ đảm bảo thoả mãn nhu cầu tiêu thụ tại mọi điểm với độ tin cậy là $(1 - \alpha)$ cho trước.

2. Giải mô hình.

Gọi lượng hàng tiêu thụ trong thời gian t là Q_t, khi đó Q_t là một đại lượng ngẫu nhiên. Để giải bài toán trong trường hợp này, thay vì xét tính ngẫu nhiên của thời gian đặt hàng T_t, ta xét như lượng hàng tiêu thụ trong thời gian đó là một đại lượng ngẫu nhiên Q_t , tuân theo một quy luật phân phối xác suất nào đó, với trung bình phương sai hữu hạn.

Giả sử ta biết quy luật phân phối của t, vì việc tiêu thụ là đều đặn nên có thể suy ra quy luật phân phối của lượng hàng tiêu thụ Q_t, trong thời gian đặt hàng T_t.

$T_t = [t - t^*.\text{int}(t/t^*)]$,

Trong đó t^* là chu kỳ dự trữ - tiêu thụ tối ưu.

Biến ngẫu nhiên Q_t xác định theo công thức $Q_t = Q.\ T_t$

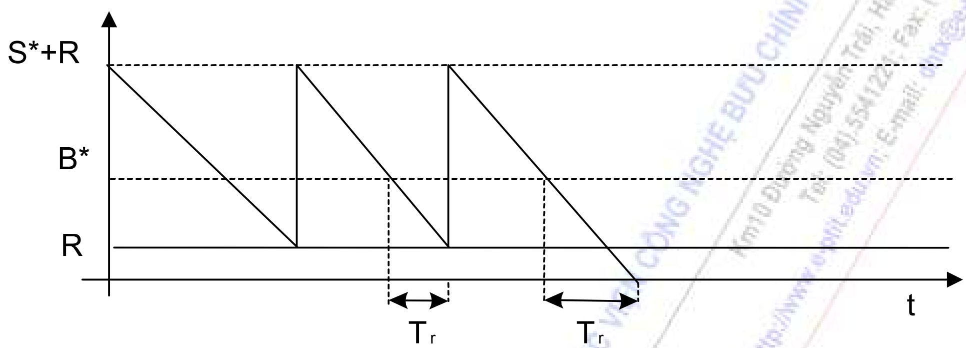
Nếu t biến ngẫu nhiên có phân phối chuẩn thì Q_t cũng là biến ngẫu nhiên có phân phối chuẩn với kỳ vọng là $Q.M(T_t)$ và phương sai là $Q^2.D(T_t)$, trong đó $M(T_t)$ và $D(T_t)$ là kỳ vọng và phương sai của T_t.

Mô hình trên có thể xem là mô hình dự trữ Wilson. Việc xác định lượng dự trữ bảo hiểm R sao cho trong khoảng thời gian t lượng hàng tiêu thụ Q_t vượt qua $(B^* + R)$ với xác suất tối đa là α, đồng thời có tổng chi phí quản lý dự trữ là bé nhất.

Như vậy việc giải mô hình này chia làm hai giai đoạn.

Giai đoạn 1, giải mô hình Wilson với T_0 là trung bình của T_t. Giả sử nhận được lượng đặt hàng tối ưu mỗi lần là S^*, thời gian một chu kỳ dự trữ - tiêu thụ tối ưu là T^* và điểm đặt hàng tối ưu là B^*. (B^* chính điểm đặt hàng trung bình)

Với lượng hàng dự trữ bảo hiểm R, ta có thể mô tả sơ đồ kho như sau:



Giai đoạn 2, xác định R sao cho $P(Q_t > B^* + R) < \alpha$. Theo định ký cộng xác suất hai biến cố đối lập, ta suy ra: $P(Q_t < B^* + R) > 1 - \alpha$.

Gọi phân vị mức $1 - \alpha$ của phân phối $F(Q_t)$ là F_{1-t} (tức là $P(Q_t < F_{1-t})$, ta cần chọn R sao cho $B^* + R > F_{1-t}$ hay $R > F_{1-t} - B^*$. Vì ta muốn tổng chi phí quản lý dự trữ bé nhất (kể cả chi phí phát sinh cho dự trữ bảo hiểm), nên cần chọn lượng bảo hiểm tối thiểu R^* sao co $R^* = F_{1-v} - B^*$.

Trong trường hợp này, dự trữ trung bình trong kho sẽ là: $0{,}5S^* + R^*$.

Trong tổng chi phí quản lý dự trữ của mô hình này, phát sinh thêm, so với mô hình Wilson, hai khoản chi phí là chi phí mua lượng dự trữ bảo hiểm R^*: CR^* và chi phí bảo quản lượng dự trữ bảo hiểm R^*: ICR^*. Khi đó hàm tổng chi phí quản lý dự trữ có dạng:

$$F(S^*, R^*) = IC(S^* + R^*) + C(Q + R^*) + An \qquad (7.41)$$

3. Bài toán mẫu.

Một cơ sở sản xuất điện thoại tự động, mỗi năm cần sử dụng 11,88 tấn nhựa đặc chủng, quy luật tiêu thụ đều theo thời gian, thời gian nhập kho không đáng kể. Chi phí mỗi lần đặt hàng là 60$, giá mỗi tấn nhựa đặc chủng là 850$,chi phí dự trữ bằng 10% giá mua.

Thời gian đặt hàng là T_t, có phân phối chuẩn với kỳ vọng là 60 ngày và độ lệch chuẩn là 1 ngày, với thời gian đó trung bình mỗi ngày trên cơ sở tiêu thụ là 33 kg (33 = 11.880/365) hay 1980 kg trong 60 ngày và độ lệch chuẩn là 33 kg (33 = 1.33). Với mức bảo hiểm có độ tin cậy 0,99, hãy xác định lượng dự trữ bảo hiểm R^* sao cho tổn thất ít nhất và tổng chi phí quản lý dự trữ cho sản xuất là ít nhất

<u>Giải:</u>

Giai đoạn 1, ta tính lượng hàng đặt mua tối ưu mỗi lần:

$$S^* = \sqrt{\frac{2AQ}{IC}}$$

Theo bài toán ta có:

A = 60\$; Q = 114880 kg; C = 850\$; I = 0,10

Thay vào (a) ta được:

$$S^* = \sqrt{\frac{2.60.11880}{0,10.850}} = 4095\text{kg}$$

Từ đó ta tính được

$$t^* = \frac{S^*}{Q} = \frac{4095}{11880} = 0,31 \text{ năm}; \; n^* \; ; \; \frac{11880}{4095} = 2,901$$

Điểm đặt hàng tối ưu:

$B^* = 1948,32$ kg

Với mức tin cậy 0,99 ta cần xác định lượng dự trữ $R^* = F_{0,99} - B^*$ hay $B^* + R > f_{0,99}$, trong đó $(B^* + R)$ là đại lượng ngẫu nhiên có phân phối chuẩn với kỳ vọng là $M(B^* + R) = 33$ Kg/ngày . 60 ngày = 1980 kg, độ lệch chuẩn $\delta_R = 33$.

Vậy $R^* = 2056,56 - 2000 = 56,56$ kg.

Lượng dự trữ trung bình trong kho là:

$$Z = \frac{1}{2} S^* + R^* = 2047,5 + 56,56 = 2104,06.$$

Tổng chi phí tạo ra dự trữ là:

$F(S^*, R^*) = IC\,(S^* + R^*) + C\,(Q^* + R^*) + n^*.A$

$= 0,10.0,850\,(4095 + 56,56) + 0,850\,(11880 + 56,56) + 2,9.60.$

$= 10.499,133$

7.3.2. Mô hình dự trữ một giai đoạn

Trong mục này, chúng ta sẽ nghiên cứu mô hình quản lý dự trữ có yếu tố ngẫu nhiên, nhưng hoạt động của hệ thống kinh tế - xã hội xét trong một khoảng thời gian hữu hạn, trong thời gian đó chỉ đặt hàng một lần (nên gọi là một giai đoạn). Tuy vậy có thể sử dụng mô hình này để xác định tổng lượng hàng tối ưu cho một thời gian T khi nhu cầu có tính ngẫu nhiên.

1.Mô hình bài toán.

Xét lớp hệ thống kinh tế - xã hội, mà nhu cầu một loại hàng trong thời gian T là một biến ngẫu nhiên Q, tuân theo quy luật phân phối xác suấ F(Q), với kỳ vọng và phương sai hữu hạn. Hệ thống đó có thể mua với giá C_0 và bán với giá C_1 ($C_1 > C_0$), việc không thoả mãn nhu cầu dẫn đến tổn thất là C_Q đối với 1 đơn vị hàng thiếu, số hàng thừa sẽ phải bán với giá C_S ($C_S < C_0$). Hãy xác định lượng mua s có lợi nhất trong thời gian T.

2. Giải mô hình

Ta xét hai trường hợp Q là rời rạc và Q là liên tục.

a. Trường hợp là lượng hàng cần mua thì lượng hàng tiêu thụ được trong thời gian T là Min(S, Q), như vậy lợi nhuận trung bình có thể tính như sau:

- Nếu $Q \le S$ thì sẽ thừa hàng. Vì Q là đại lượng ngẫu nhiên nên lượng hàng thừa (S - Q) cũng là một đại lượng ngẫu nhiên.

Xác suất có lượng hàng thừa (S - Q) cũng là xác suất để nhu cầu bằng Q: P(Q). Khi đó lợi nhuận trung bình với điều kiện

$Q \le S$ là $D_1(S) = \Sigma[X_1Q =- C_0S + C_S(S - Q)]\ P(Q)$. (7.42)

- Nếu Q > S, xuất hiện tình trạng thiếu hàng, gây tổn thất do thiếu hàng. Xác suất có lượng hàng thiếu (S - Q) cũng là xác suất để nhu cầu bằng Q: P(Q). Khi đó lợi nhuận trung bình với điều kiện Q > S là:

$D_2(S) = \Sigma\ [C_1S =- C_0S + C_Q(Q - S)]\ P(Q)$. (7.43)

Hàm tổng lợi nhuận trung bình là:

$D(S) = D_1(S) + D_2(S)$ (7.44)

Ta phải xác định S sao cho D(S) lớn nhất.

Ký hiệu P(Q = S) là xác suất hiện sự kiện Q = S

P(Q < S) là xác suất hiện sự kiện Q < S

Ta có $D(S + 1) - D(S) = C_1 - C_0 + C_Q - (C_1 + C_Q - C_S).P(Q < S + 1)$

$D(S) - D(S - 1) = C_1 - C_0 + C_Q - (C_1 + C_Q - C_S).P(Q < S)$

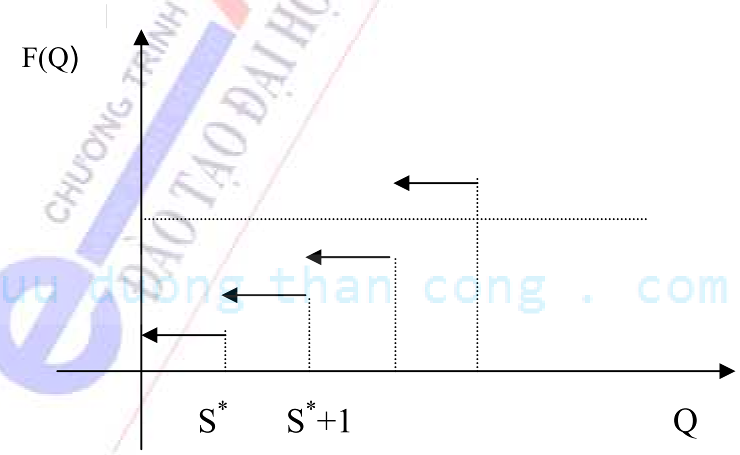
Điểm S^* tối ưu phải thoả mãn điều kiện:

$D(S^* + 1) - D(S^*) \le 0$

$D(S^* + 1) - D(S^* - 1) \ge 0$

Đặt $\alpha = \dfrac{C_1 - C_0 + C_Q}{C_1 + C_Q - C_S}$, do $C_0 > C_S$ và $C_1 > C_0$ nên $0 < \alpha < A$.

Vậy S^* chính là phân vị mức α của phân phối F (Q). Có thể mô tả kết quả trên như sau:



Khi $\alpha = P(Q < S^* + 1)$ ta có hai lời giải S^* và $S^* + 1$. Tuy nhiên trong thực tế ta có thể không quan tâm nhiều đến khả năng này vì hai lý do sau:

- Hai giá trị gần bằng nhau và S^* luôn là một nghiệm.

- Hàm lợi nhuận được tính như giá trị trung bình của một phân phối xác suất.

3.Bài toán mẫu.

Bài toán 1. Một Bưu cục của tỉnh X, bán một loại hàng lưu niệm trong 1 ngày được một số lượng là Q, là một đại lượng ngẫu nhiên tuân theo quy luật Poát Xông, trung bình là 20 quyển/ngày.

Hãy xác định số lượng S cần đặt mua của Trung tâm trong một ngày để đảm bảo lợi nhuận trung bình trong ngày là lớn nhất.

Biết rằng giá mua buôn mỗi đơn vị hàng là 15.000 đồng VN, giá bán lẻ là 18.000 đồng VN. Cửa hàng ước tính thiệt hại khi không thoả mãn nhu cầu (vì mất khách) là 1500 đồng VN/1 đơn vị, ngược lại mỗi hộp bưu phẩm không bán được phải bảo quản và bán lại với giá hạn là: 13.000 đồng VN.

<u>Giải</u>: Bài toán trên là mô hình dự trữ một giai đoạn, với các tham số như sau:

$$C_1 = 18.000,\ C_0 = 15.000,\ C_Q = 1500,\ C_S = 13.000$$

Vậy $\alpha = \dfrac{C_1 - C_0 + C_S}{C_1 + C_Q - C_S} = \dfrac{18.000 - 15.000 + 13.000}{18.000 + 1500 - 13.000} = 0{,}6923$

Tra bảng phân phối Poát xông với trung bình 20 ta có phân vị mức $\alpha = 0{,}6923$ của phân phối F(Q) là $S^* = 22$.

Vậy số lượng đặt mua tối ưu của trung tâm trong một ngày là $S^* = 2$ đơn vị

b. Trường hợp Q là đại lượng ngẫu nhiên liên tục

Trong trường hợp này, ta cũng tìm S^* tương tự như trường hợp a): xác định S^* sao cho $F(S^*) = \alpha$, trong đó F (Q) là hàm phân phối xác suất của nhu cầu Q. Nếu biết hàm mật độ xác suất của Q là f(Q) thì ta xác định S^* nhờ công thức sau:

$$\int_0^{S^*} f(Q)dQ = \alpha$$ Khi đó S^* là phân vị mức α của Q.

Thật vậy, ta có:

$$D_1(S) = \int_0^S [C_1Q - C_0S + C_S(S - Q)].f(Q)dQ$$

và $$D_2(S) = \int_S^\infty [C_1S - C_0S + C_S(Q - S)].f(Q)dQ$$

Từ đó suy ra:

$$D(S) = (C_1 - C_0 + C_Q).\ S[1 - F(S)] + (C_1 - C_S)\int_0^S Qf(Q)dQ + (C_S - C_0).\ S.F(S) - C_Q\int_S^\infty Q.f(Q)dQ \quad (*)$$

Lấy đạo hàm hai vế (*) và cho $D'(S) = 0$ ta được S^* là phân vị mức α của Q, trong đó $\alpha = \int_0^{S^*} f(Q)dQ = \alpha$

Bài toán 2. Một công ty cung ứng phân đạm cho vùng X, có nhu cầu phân đạm trong năm là một đại lượng ngẫu nhiên Q có phân phối chuẩn với trung bình ước lượng là M(Q) = 12.000 tấn, độ lệch chuẩn được ước lượng là 40 tấn. Giá mua vào là 120$/tấn, giá bán lẻ là 140$/tấn. Việc cung cấp thiếu mỗi tấn so với nhu cầu sẽ làm thất thiệt 30$, lượng tồn kho cuối kỳ chuyển sang kỳ sau phải bán với giá 115$/tấn.

a. Hãy xác định lượng hàng mua sao cho tổng lợi nhuận cao nhất.

b. Giải bài toán trong trường hợp trung bình hàng năm được mô tả như trên, theo số lượng tính toán ở câu a. Biết chi phí dự trữ tính theo giá mua với hệ số 0,05, chi phí đặt hàng mỗi lần là 120$.

<u>Giải:</u>

a. Theo c dữ kiện của bài toán, ta có:

$C_1 = 140$ $\qquad C_S = 115$

$C_0 = 120$ $\qquad C_Q = 30$

Ta tính được $\alpha = 0,9$

Ta tìm S^* sao cho $\phi[S^* - 1200)/40] = 0,9$. Tra bảng phân phối chuẩn, ta tìm được $U_{0,9} = 1,28$

Vậy $S^* = 1,28.\ 40 + 12000 = 12051,2$ tấn

b. Với $Q^* = S^* = 12051$, giải bài toán mô hình dự trữ Wilson, ta nhận được kết quả sau:

- Lượng hàng đặt mua tối ưu mỗi lần $S^* = 694,29$
- Tổng chi phí dự trữ $G(S^*) = 120.0,05.649,29 = 4165,74$
- Tổng chi phí tạo ra dự trữ $F(S^*) =$

Như vậy thực tế giá tính đủ cho mỗi lần là:

$$C_{02} = 120 + 4165,74/\ Q^* = 120,346$$

Trở lại tính $\alpha = 0,9008$, ta thấy giá trị này không sai khác đáng kể so với giá trị ban đầu, vậy có thể chọn tổng lượng nhu cầu $Q^* = 12048$ và $S^* = 649,29$.

3. Nhận xét:

Ta xét mô hình dự trữ một giai đoạn ở một số trường hợp đơn giản.

a. Khi $C_S = 0$, nghĩa là lượng hàng thừa phải huỷ (Chẳng hạn các linh kiện điện tử bị hỏng, quá đát, các loại vaxin quá hạn, các loại thực phẩm tươi sống, rau quả quá hạn...). Khi đó ta có $\alpha = 1 - C_0/\ (C_1 + C_Q)$ như vậy tỷ lệ $C_0 / (C_1 + C_Q)$ chính là xác suất của biến số ($Q>S^*$), tỷ lệo này cho biết khả năng thiếu hàng tại phương án tối ưu, tỷ lệ này tăng nếu như giá mua vào so với giá bán ra chênh lệch nhỏ, đồng thời thiệt hại do không thoả mãn nhu cầu không quá lớn.

b. Trong mô hình trên, Q được xem như biến ngẫu nhiên vì vậy sau khi xác định $Q^* = S^*$ ta cần giải bài toán tìm chiến lược đặt hàng cho mỗi thời kỳ. Trong trường hợp này giá bán hàng ứng với mô hình Wilson bao gồm giá mua, chi phí dự trữ, chi phí thất thiệt tính cho mỗi đơn vị hàng bị thiếu hụt tại chiến lược dự trữ tối ưu. Việc phân bài toán thành hai bước giải như vậy chắc chắn không cho ta phương án tối ưu toàn bộ, vì vậy ta có thể sử dụng thuật toán lặp nhiều vòng để tìm lời giải gần đúng.

7.3.3 Mô hình dự trữ có sản phẩm trung gian.

Mô hình này xét các hệ thống kinh tế có sản xuất ra sản phẩm. Trong các dây truyền sản xuất, hệ thống thường phải dự trữ các sản phẩm trung gian (bán thành phẩm) để hạn chế khả năng cả dây chuyền sản xuất phải ngừng hoạt động khi một máy của dây chuyền bị hỏng. Để đơn giản, ta xét một dây chuyền gồm hai máy A và B với một thùng đựng dự trữ bán thành phẩm liên hệ với nhau theo sơ đồ sau:

Máy A → Dự trữ bán thành phẩm → Máy B

Trong dây chuyền có thể xảy ra những trường hợp sau:

1. Máy A và máy B cùng tốt
2. Máy A hỏng, máy B tốt
3. Máy A tốt, máy B hỏng
4. Máy A hỏng, máy B hỏng

Trong cả 4 trường hợp thì trường hợp 2 và 3 cần dự trữ sản phẩm trung gian. Lúc đó cần dự trữ bán thành phẩm giữa hai máy sao cho tổng chi phí tạo ra dự trữ và thiệt hại do việc một trong hai máy phải ngừng hoạt động do máy kia bị hỏng, là nhỏ nhất.

1. Mô hình bài toán

Xét một xí nghiệp sản xuất các thiết bị bưu điện trên dây n dây như nhau, mỗi dây chuyền có 2 máy. Giả sử λ là khoảng thời gian trung bình giữa hai lần hỏng của máy A; δ là khoảng thời gian hỏng của máy A mỗi lần. Khi đó δ là đại lượng ngẫu nhiên với hàm mật độ xác suất là f(δ) đã biết; δ là thiệt hại sinh ra do máy B phải ngừng hoạt động trong một đơn vị thời gian. Ký hiệu Z là lượng dữ trữ bán thành phẩm giữa hai máy, Q là năng suất hoạt động của máy B trong một đơn vị thời gian. Khi đó mỗi lần máy A hỏng, thì máy B phải ngừng hoạt động và khoảng thời gian ngừng hoạt động đã xác định bằng biểu thức:

$$t_B = \begin{cases} 0, \text{ nếu } Z \ge Q \\ \delta - \dfrac{Z}{Q}, \text{ nếu } Z < QS \end{cases} \qquad (7.45)$$

Như vậy thiệt hại trung bình sinh ra do máy B phải ngừng hoạt động mỗi lần của một dây chuyền sản xuất là:

$$G = \delta \int_{-\frac{Z}{Q}}^{\infty} \left(\delta - \frac{Z}{Qq} \right) f(\delta) d\delta \qquad (7.46)$$

Nếu trong khoảng thời gian trung bình giữa hai lần hỏng của máy A là λ, thì trung bình trong mỗi đơn vị thời gian (Chẳng hạn một giờ) sẽ có $\frac{1}{\lambda}$ lần máy A hỏng. Do đó tổng chi phí bảo quản dự trữ và thiệt hại do máy B phải ngừng hoạt động của một dây chuyền sản xuất là:

$$D = ICZ + \frac{\delta}{\lambda} \int_{-\frac{Z}{Q}}^{\infty} \left(\delta - \frac{Z}{Q} \right) F(\delta) d\delta \qquad (7.47)$$

Tổng thiệt hại và chi phí cho quản lý dự trữ của cả xí nghiệp là:

$$F = n\,IC + \frac{\delta}{\lambda}\int_{-\frac{Z}{Q}}^{\infty}\left(\delta - \frac{Z}{Q}\right)f(\delta)d\delta \qquad (8.48)$$

2. Giải mô hình

Lý luận giống như giải mô hình trước đây, giá trị tối ưu Z^* là nghiệm của phương trình:

$$\frac{dF}{dZ} = n\left[IC - \frac{\delta}{\lambda}\frac{1}{Q}\int_{-\frac{z^*}{Q}}^{\infty} f(\delta)d(\delta)\right] = 0 \qquad (7.49)$$

hay $$IC - \frac{\delta}{\lambda}\frac{1}{Q}\int_{-\frac{Z}{Q}}^{\infty} f(\delta)d\delta = 0 \qquad (7.50)$$

$$\Rightarrow \int_{-\frac{Z}{Q}}^{\infty} f(\delta)d\delta = \frac{Q\lambda IC}{\delta} \qquad (7.51)$$

Giải (7.51) ta tìm được Z^* và suy ra các giá trị khác. Từ (7.51) suy ra $Q\lambda IC > \delta$ thì nhu cầu về dự trữ sản phẩm trung gian là không cần thiết.

3. Bài toán mẫu.

Giả sử dây chuyền sản xuất có 2 máy. Khoảng thời gian giữa hai lần hỏng của máy A là $\lambda = 16$ giờ, trung bình mỗi lần hỏng kéo dài là $\lambda.\delta = \frac{1}{2}$ giờ, khoảng thời gian hỏng của máy A là đại lượng ngẫu nhiên có phân phối luỹ thừa với hàm mật độ xác suất là $f(\delta) = \alpha e^{-\alpha\delta}$. Mỗi giờ máy B ngừng hoạt động sẽ làm thiệt hại $\delta = 40\$$, chi phí bảo quản mỗi đơn vị dự trữ trong một giờ là $I.C = 0{,}1\$$. Với những điều kiện làm việc bình thường, năng suất của máy B là $Q = 20$ thiết bị/giờ ; $\alpha = \frac{1}{\alpha\delta}$. Hãy xác định sản phẩm dự trữ trung gian Z^* tối ưu.

<u>Giải</u>: Theo phân tích ở trên, ta được thời gian máy B ngừng hoạt động:

$$t_B = \begin{cases} 0, \text{ nếu} Z \geq 20.\frac{1}{2} = 10 \\ \frac{1}{2} - \frac{Z}{20}, \text{ nếu} Z < 20.\frac{1}{2} = 10 \end{cases}$$

Khoảng thời gian hỏng của máy A là đại lượng ngẫu nhiên có phân phối xác suất theo quy luật luỹ thừa $f(\delta) = \alpha.E^{-\alpha\delta}$, trong đó $\alpha = \frac{1}{\lambda\delta} = \frac{1}{1/2} = 2$

Từ công thức (8.51) ta tính được lượng dự trữ tối ưu Z^* phải thoả mãn điều kiện:

$$\int_{-\frac{Z^*}{20}}^{\infty} 2e^{-2\delta} d\delta = \frac{2.016.001}{40} = 0.08$$

Giải ra được: $e^{-2\left(\frac{Z^*}{20}\right)} = 0.08 \Rightarrow \dfrac{1}{e^{2\left(\frac{Z^*}{20}\right)}} = 0,08$

$$\ln 1 - 2\left(\frac{Z^*}{20}\right)\ln e = \ln(0,08)$$

$$Z^* = -10\ln\frac{8}{100} \quad \text{hay} \quad Z^* = 10\ln\frac{100}{8}\ln(12,5)$$

Tổng chi phí bảo quản và thiệt hại ứng với lượng dự trữ tối ưu là:

$$D = 0,01.10.\ln(12,5) + \frac{40}{16}\int_{-\frac{10\ln(12,5)}{20}}^{\infty}\left(\delta - \frac{10\ln(12,5)}{20}\right)2e^{-2\delta}d\delta$$

BÀI TẬP CHƯƠNG 7

1. Một cửa hàng kinh doanh một mặt hàng điện tử. Nhu cầu về mặt hàng này trong khu vực là 40.000 đơn vị/năm. Giá mua mỗi đơn vị là 14$, chi phí bảo quản mỗi đơn vị tính tỷ lệ với giá mua theo hệ số 0,05. Chi phí cho mỗi lần liên hệ và hợp đồng mua hàng là 120$. Thời gian từ lúc bắt đầu làm hợp đồng đến khi có hàng về bán là 3 tháng.

a. Tính lượng hàng đặt mỗi lần sao cho tổng chi phí bé nhất. Xác định thời gian mỗi chu kỳ mua và tiêu thụ hàng. Xác định mức hàng còn lại trong kho vào thời điểm cần tiến hành làm thủ tục mua hàng cho chu kỳ sau.

b. Vẽ đồ thị minh hoạ và dựa vào đồ thị mô tả hành vi hợp lý của cửa hàng khi có hạ giá cho lô hàng lớn hơn hoặc bằng S_0.

c. Nếu cửa hàng nhận được một báo giá mới của một cơ sở khác với đơn giá 13,5$, nhưng tiền liên hệ và hoàn tất hợp đồng mua hàng mỗi lần là 125$ thì có nên chọn mua ở cơ sở mới này không?

HD:

$q^* = 3703.28$

$F(q^*) = 562592.296$

a. $t^* = 0.0926$

$n^* = 10.8$

$B^* = 2456.45$

c. Chọn mua ở cơ sở mới.

2. Nhu cầu một mặt hàng điện tử dân dụng tại một thị xã do một công ty thương mại cung ứng hàng năm là 30.000 chiếc. Giá mua mỗi chiếc là 4$, chi phí dự trữ tính theo khối lượng hàng lưu kho mỗi chiếc là 6$/năm. Chi phí cho mỗi lần đặt hàng là 50$. Việc tiêu thụ đều đặn và thời gian nhập hàng vào kho không đáng kể.

a Xác định lượng hàng đặt mỗi lần tốt nhất và điểm đặt hàng tương ứng nếu thời gian đặt hàng là 3 tháng.

b. Giả sử cơ sở bán hàng muốn công ty mua với số lượng mỗi lô lớn hơn mức tính được ở câu a, cơ sở này dự định sẽ hạ giá hàng 10% cho lô hàng tối thiểu là S chiếc, nhưng lại muốn công ty mua mỗi lô có số lượng tối thiểu đó thì cần đặt S trong khoảng nào? Trong trường hợp đó nếu công ty không mua mỗi lần lô hàng S thì sẽ phải chi một chi phí cơ hội bao nhiêu?

HD:

$q^* = 707.11$

a. $F(q^*) = 124242.641$

$B^* = 326.19$

b. Vẽ đồ thị rồi so sánh

3. Một xí nghiệp sản xuất một loại thiết bị viễn thông dự báo tổng nhu cầu loại nguyên liệu chính để sản xuất thiết bị này là 120.000 tấn. Việc tiêu thụ đều đặn và thời gian nhập hàng vào kho không đáng kể, có hai phương thức mua nguyên liệu.

Phương thức I: Mỗi đợt mua từ tổng công ty kinh doanh loại nguyên liệu này với số lượng tùy chọn giá mỗi tấn là 240$, chi phí bảo quản bằng 12% giá mua, chi phí giao dịch, tổ chức mua mỗi tấn là 150$.

Phương thức II: Chia đều tổng nhu cầu thành 4 lần đặt mua giá mỗi tấn là 225$, chi phí bảo quản bằng 15% giá mua, chi phí giao dịch, tổ chức mua mỗi lần như phương thức I.

a. Nên mua theo phương thức nào, nếu định chiến lược sai thì thiệt hại tối thiểu là bao nhiêu?

b. Nếu tổng nhu cầu hàng năm tăng 10% và giá cả cũng tăng 10% còn chi phí giao dịch, tổ chức mua không đổi thì năm sau nên mua như thế nào?

HD:

a. Phương thức I: $F(q^*) = 28832199.379$ USD

Phương thức II: $F_{min} = 28013100$ USD

Chọn phương thức II. Nếu mua theo phương thức I thì thiệt hại rối thiểu là 819099.379 USD

4. Một trạm bán xăng mỗi tháng tiêu thụ 16.000kg, cường độ tiêu thụ đều và thời gian bổ sung xăng về bồn chứa có thể bỏ qua, chi phí cố định cho mỗi lần mua từ nhà cung cấp là 100$, giá mua từ nhà cung cấp là 0,28$/kg, chi phí bảo quản gồm hai phần: Chi phí cố định mỗi tháng 320$ không phụ thuộc vào số lượng trong bồn chứa và chi phí tính cho mỗi kg mỗi tháng bằng 15% giá mua. Hãy cho biết giá bán ra tối thiểu để trạm thu được từ một kg số tiền lãi không dưới 0,02$. Muốn đảm bảo mức lãi đó trạm cần dự trữ như thế nào?

HD: $F(q^*) = 5166.6061$ USD. Giá bán tối thiểu $q=0.3429$ USD/kg; $q^*=8728.72$ USD

5. Một người dự định mở một cửa hàng bán bia, cơ sở tư vấn thương mại đã cung cấp các số liệu sau:

Tổng nhu cầu hàng năm trong khu vực do cửa hàng cung cấp là 14.000 thùng. Giá mỗi thùng về đến cửa hàng là 144$, chi phí cho ký hợp đồng mua bán mỗi lần cố định là 100$, chi phí bảo quản và khoản tiền lãi tiền gửi gộp lại bằng 7% giá hàng (không tính chi phí hợp đồng mua bán).

Hãy xác định tổng số tiền tối thiểu cần có để người này có thể mua bán hàng, đáp ứng nhu cầu theo các dự báo nêu trên. Biết cường độ tiêu thụ đều và thời gian nhập hàng không đáng kể. Thời gian từ khi làm hợp đồng đến khi có hàng là 1 tháng.

HD: F(q)=76103.64 USD*

6. Với các dữ kiện của mô hình Wilson.

a. Hãy tìm biểu thức cho biết khi tăng tổng nhu cầu, chi phí mua hàng và chi phí đặt hàng cùng mức 1% thì tổng chi phí nhỏ nhất tăng bao nhiêu %. Nhận xét gì về giá trị biểu thức này tại quy mô tối ưu, giải thích?

b. Giả sử hệ thống kho có sẵn với dung tích M_0 lớn hơn quy mô tối ưu trong mô hình. Vì vậy ngoài chi phí dự trữ tính theo thời giá đã nêu trong mô hình mỗi đơn vị dung tích bỏ trống chịu một thiệt hại là p. Hãy nêu cách giải quyết có lợi nhất và minh hoạ bằng một thí dụ cụ thể.

HD:

a. Thay C và A vào q và F(q*) sau khi đã tăng C và A lên 1%. So sánh giá trị F(q*) mới và F(q*) gốc theo %.*

b. Từ $\overline{q^*} = q^*\sqrt{\alpha}$ *ta có quy mô kho cần thay đổi với hệ số* $\sqrt{\alpha}$ *khi nhu cầu thay đổi* α

7. Một cửa hàng bán lẻ lương thực cho một khu vực dân cư với tổng nhu cầu hàng năm là 60.000 tấn. Chi phí cho mỗi lần tổ chức mua từ tổng công ty là 200$, giá mua mỗi tấn là 300$, chi phí bảo quản bằng 20% giá mua. Cửa hàng có một hệ thống kho với dung tích $M = M_0$ tấn. Lượng hàng mỗi lần cửa hàng đang mua đúng bằng M_0.

a. Hiện tại người ta thấy rằng việc tăng dung tích kho là cần thiết, nhằm giảm tổng chi phí. Hãy xác định lượng giảm tổng chi phí khi tăng dung tích kho theo M.

b. Nên tăng dung tích kho như thế nào để tiết kiệm nhất nếu như hệ số chi phí bảo quản với lô hàng mua mỗi lần trên mức M_0 bằng 22% giá mua (các điều kiện khác không thay đổi).

HD:

a. Dung tích kho $M_0<632.46$ *tấn thì F(S*) giảm theo dung tích M là* $\dfrac{12.000.000\text{USD}}{M^2} - 60$

b. Tăng đến 603 tấn.

8. Nhu cầu 1 loại thuốc chữa bệnh thông thường hàng năm là 960.000 hộp, một công ty dược dự tính cung cấp số thuốc này từ một cơ sở sản xuất có công suất dự tính 1.600.000 hộp/năm. Chi phí cho mỗi đợt chuẩn bị sản xuất là 250$, chi phí sản xuất mỗi hộp là 12$, chi phí bảo quản bằng 20% chi phí sản xuất. Công ty có 1 kho đủ lớn để bảo quản, việc tiêu thụ coi như đều đặn và cường độ sản xuất trong mỗi kỳ không đổi. Trong năm đầu công ty đã chia thành 6 đợt sản xuất bằng nhau và cung cấp vừa đủ nhu cầu. Kiểm tra thấy lượng thuốc qua kho là 500.000 hộp.

Hãy xác định lại khả năng sản xuất của cơ sở trên và đặt kế hoạch sản xuất cho các năm sau với giả thiết các yếu tố khác không thay đổi.

Nếu có thể mua từ một nguồn khác với khả năng cung cấp không hạn chế, thời gian nhập hàng vào kho coi như không đáng kể, giá mua mỗi hộp 10$, chi phí giao dịch hoàn tất hợp đồng mỗi lần 400$ thì có nên mua hay không trong hai trường hợp.

- Không chịu khấu hao cơ sở sản xuất bị bỏ không.

- Mỗi năm không sản xuất khấu hao phải chịu là 1.000$.

HD:

Lượng hàng qua kho lý thuyết là: R_0=384000.

+ Tính lại công suất K=2003478 hộp/năm*

- Lượng hàng đạt tốt nhất S=19595.92*

- Lượng hàng tối đa trong kho là: Z=10206.21*

- Tổng chi phí nhỏ nhất là F(S)=11544494.896 USD*

+ Mua ngoài không chịu chi phí khấu hao

- Lượng hàng tối ưu của S: S*=19595.92*

- Tổng chi phí nhỏ nhất: F(S)=9639191.836 USD*

+ Chịu chi phí khấu hao:

- Tổng cho phí nhỏ nhất: F(S)=9640191.836 USD.*

Nên mua ngoài kể cả phải chịu chi phí khấu hao cơ sở sản xuất.

9. Xét mô hình dự trữ xác định lượng hàng mua mỗi năm trong điều kiện nhu cầu Q phân phối chuẩn với trung bình và phương sai hữu hạn trong điều kiện tiêu thụ đều, bổ xung dần dần với các tham số Q, K, A, C, I như đã nêu.

a. Hãy xác định Q và tìm chiến lược đặt hàng có hàm chi phí nhỏ nhất tương ứng.

b. Nêu 1 thí dụ bằng số và giải bài toán cho 2 năm liên tiếp biết rằng nhu cầu tiêu thu tăng α%/năm và năng lực sản xuất tăng β%/năm.

10. Một công ty kinh doanh xăm lốp ô tô có tổng nhu cầu 120.000 bộ/năm. Công ty có thể mua ở hai nguồn với các điều kiện như sau:

Nguồn A: Tổng công suất sản xuất và cung ứng là 600.000 bộ/năm. Cách thức cung ứng theo đợt với cường độ đều, chi phí cho mỗi lần đặt hàng là 200$. Giá mỗi bộ 140$. Thời gian từ lúc làm hợp đồng đến khi có hàng để bán là 15 ngày.

Nguồn B: Tổng công suất đủ lớn và thời gian cung ứng coi như không đáng kể. Giá hàng là 138$/bộ. Chi phí cho mỗi lần đặt hàng là 210$; thời gian đặt hàng 45 ngày.

Chi phí dự trữ tính theo số lượng dự trữ hiện vật là 2,5$/1đơn vị.

a. Hãy chọn nơi mua hàng có tổng chi phí bé nhất và tính các kết quả tương ứng.

b. Giả sử các loại chi phí khác không thay đổi, hãy xác định giá cao nhất có thể của nguồn B mà công ty mua hàng ở nguồn đó.

HD:

a. Nguồn A: F(S)=18609782.270 USD.*

Nguồn B: F(S)=16571220.032 USD. Chọn nguồn B.*

- Luồng hàng tối ưu: S=4491.97*

- Tổng chi phí cực tiểu: F(S)=16571220.032 USD.*

t=0.0374; n*=26.71; B*=1318.62*

11. Một cơ sở sản xuất và cung ứng cho thị trường loại phân bón A với tổng nhu cầu là 30.000 tấn/năm. Cơ sở này có khả năng sản xuất hàng năm 40.000 tấn một cách đều đặn, ngoài ra có thể mua ngoài sản phẩm cùng loại. Nếu tự sản xuất chi phí cho 1 tấn là 140$, nếu mua ngoài giá 1 tấn là 138$; giá bán là 160$/tấn. Trong trường hợp mua ngoài, cơ sở phải chịu một khoản thiệt hại do không sử dụng thiết bị là 20.000$/năm. Hệ số chi phí dự trữ tính theo giá mua vào hoặc theo chi phí sản xuất là 10%. Chi phí đặt hàng khi mua ngoài là 150$ mỗi lần, và thời gian nhập hàng không đáng kể, còn chi phí chuẩn bị sản xuất mỗi lần là 100$. Cơ sở nên mua ngoài hay tự sản xuất và cung ứng? Mỗi lần mua hoặc sản xuất bao nhiêu để tổng lãi lớn nhất.

HD: Mua ngoài với S=804.66; F(S*)=4201184 USD. Tổng lãi thu được: 598816 USD.*

12. Một cơ sở kinh doanh máy tính đã dự báo tổng số máy có thể tiêu thụ là 2.000 chiếc/năm. Việc tiêu thụ coi như đều đặn, tiền vốn có thể gửi ngân hàng với tổng lãi suất không kỳ hạn 10%/năm. Chi phí cho việc đặt mua mỗi lô hàng là 400$, giá mỗi máy (đã tính thuế nhập khẩu) là 620$. Chi phí bảo quản 1% giá máy. Thời gian từ lúc làm thủ tục nhập đến khi có máy về và được phép bán ra là 3 tháng.

a. Xác định cỡ lô hàng nhập mỗi lần sao cho tổng chi phí bé nhất.

b. Nếu bên cung cấp máy đặt giá khuyến mại cho lô hàng từ 500 máy trở lên 5% giá thì có nên thay đổi cỡ lô hàng mua mỗi lần không?

HD:

a. Luồng hàng tốt nhất S=153.17; F(S*)=1250446.052 USD.*

b. Mua lô 500 chiếc: F(S)=1195798 USD*

13. Một nhà in có tổng nhu cầu 120 tấn giấy/năm. Nhà in có thể mua giấy từ 1 cơ sở sản xuất có công suất đủ lớn. Chi phí cho 1 lần giao dịch mua hàng là 60$; giá mỗi tấn giấy 160$ nếu mua lô hàng dưới 10 tấn, 158$ nếu mua lô hàng từ 10 tấn trở lên. Chi phí bảo quản tính theo giá với hệ số 0,02.

a. Xác định cỡ lô hàng mua mỗi lần sao cho tổng chi phí bé nhất; mô tả kết quả trên đồ thị.

b Nếu bên bán chào hàng với giá 155$/tấn đối với mỗi lô hàng 16 tấn thì theo bạn có nên mua theo lô này không?

HD:

a. S=275.59; F(S*)=316870.862; t*=0.1378; n*=7.26.*

b. Tính F(S) mới rồi so sánh với F(S) ở câu a. Từ đó quyết định có nên mua không.*

14. Một công ty phát hành một mặt hàng văn hoá phẩm với nhu cầu thường xuyên, đều đặn. Mỗi lần tổ chức sản xuất phát sinh một chi phí cố định là 200$, chi phí trực tiếp cho mỗi đơn vị phụ thuộc lượng phát hành mỗi lần như sau: Nếu mỗi lần phát hành dưới 1.000 đơn vị thì giá là 0,8$, từ 1.000 đến 3.000 giá là 0,72$, từ 3.000 đến 5.000 giá là 0,7$, từ 5.000 trở lên giá là 0,85$, chi phí bảo quản tính theo giá với hệ số 5%.

Xác định lượng phát hành mỗi lần sao cho tổng chi phí nhỏ nhất, biết rằng tổng nhu cầu hàng năm là 25.000 đơn vị.

HD: Suy luận giống bài 13.

15. Nhu cầu một loại hoá chất sản xuất phân bón là 8.000 tấn/năm. Chi phí cho mỗi hợp đồng mua hàng là 50\$. Hệ số chi phí dự trữ là 0,2; giá mỗi tấn phụ thuộc lượng mua mỗi lần q như sau:

nếu $0 < q < 1.000$ thì giá là 25\$/tấn.

nếu $1.000 \leq q < 3.000$ thì giá 24\$/tấn

nếu $q \geq 3.000$ thì giá 23,5\$/tấn

Thời gian đặt hàng 90 ngày.

a. Xác định lượng hàng đặt tốt nhất; thời gian 1 chu kỳ và điểm đặt hàng tương ứng trong trường hợp bổ sung tức thời và tiêu thụ đều.

b. Giả sử việc tiêu thụ là đều đặn và bổ sung dần với cường độ 16.000tấn/năm. Hãy xác định lượng hàng mua mỗi lần tối ưu và tổng chi phí tương ứng.

HD:

a. S=1000.00; F(S*)=194800.00; t*=0.125; B*=972.60*

b. S=3000; F(S*)=191658*

16. Nhu cầu một loại hàng do một công ty đảm nhiệm cung cấp là 10.000tấn/năm. Cường độ nhu cầu đều đặn, chi phí cho mỗi đợt tổ chức mua là 100\$, chi phí cho mỗi tấn phụ thuộc qui mô mua mỗi đợt (M) như sau:

25\$ nếu M<1000 tấn, 24\$ nếu 1000 tấn ≤ M < 5000 tấn, 23,5\$ nếu M ≥ 5000 tấn.

Chi phí bảo quản bằng 15% giá hàng.

a. Xác định lượng hàng mua mỗi lần sao cho tổng chi phí nhỏ nhất; vẽ đồ thị minh hoạ kết quả trên.

b. Giả sử công ty đã mua theo qui mô tối ưu tìm được ở câu a, khi giá hàng tăng 1% còn mọi chi phí khác không đổi, công ty dự định giảm qui mô mua mỗi lần 1%. Dự định này có duy trì được chiến lược tối ưu không? Nếu thực hiện dự định này tổng chi phí chênh lệch so với tổng chi phí mua theo qui mô cũ là bao nhiêu? so với tổng chi phí thấp nhất có thể là bao nhiêu?

HD: Suy luận tương tự như bài 15.

17. Một cơ sở kinh doanh loại hàng A, thông thường mỗi lô hàng nhập trong khoảng 100 tấn đến 500 tấn, giá mỗi tấn 12\$, chi phí bảo quản mỗi tấn 2\$/năm, chi phí đặt hàng mỗi lần 120\$ và thời gian đặt hàng là 3 tháng. Vì một lý do nào đó cơ sở này muốn thay đổi lượng nhập hàng mỗi lần, bên bán đưa ra thêm các phương án:

Nếu mỗi lần mua từ 500 tấn trở lên thì giá mỗi tấn giảm 5%; ngược lại nếu mua dưới 100 tấn mỗi lần thì giá mỗi tấn tăng 10%; nếu chỉ mua mỗi năm 1 lần với khối lượng từ 1500 trở lên thì giá mỗi tấn là 10\$.

Hãy chọn phương án mua có lợi nhất và tính các chỉ tiêu có liên quan đến việc dự trữ, tiêu thụ. Biết rằng nhu cầu hàng năm là 20000 tấn và việc tiêu thụ coi như đều đặn, thời gian nhập hàng không đáng kể.

HD: Suy luận tương tự như bài 13, 15.

18. Nhu cầu than cho một nhà máy nhiệt điện là 500 tấn/năm. Việc tiêu thụ đều đặn và bổ sung tức thời. Chi phí cho mỗi lần làm hợp đồng là 60$; hệ số chi phí dự trữ là 0,05. Giá mỗi tấn than thay đổi theo số lượng mỗi hợp đồng q như sau:

nếu $0 < q < 100$ thì giá là 120$/tấn.

nếu $100 \leq q < 200$ thì giá 110$/tấn.

nếu $q \geq 200$ thì giá 150$/tấn.

Hãy mô hình hoá bài toán trên dưới dạng một bài toán dự trữ và giải bài toán đó. Mô tả kết quả trên đồ thị.

HD: $S^*=200$; $F(S^*)=53175$; $t^*=0.4$; $n^*=2.5$; $B^*=82.19$

19. Một công ty được sử dụng tổng số vốn 1.200.000$/năm. Người ta có thể đem số vốn này mua bán trái phiếu. Chi phí cho mỗi lần mua bán một trái phiếu là 20$. Lãi suất trái phiếu là 0,05% năm nếu trái phiếu có mệnh giá nhỏ hơn 100000$, lãi suất là 0,08% năm nếu trái phiếu có mệnh giá từ 10.000 đến 50.000$ và từ 50.000$ trở lên lãi suất là 0,1%. Hãy mô hình hoá bài toán này thành một mô hình dự trữ và xác định một chiến lược dùng tiền mặt có lợi nhất.

HD: Suy luận tương tự như bài 15, 18.

20. Một khách sạn dự báo trong mỗi năm tiêu thụ hết 40.000 chai rượu cùng loại. Việc tiêu thụ coi như đều đặn và việc nhập hàng mất một thời gian không đáng kể. Chi phí bảo quản tính theo giá với hệ số 0,05% năm; Giá mỗi chai 60$ nếu mua ít hơn 100 chai mỗi lần; giá 55$ nếu mua từ 100 đến 1.000 chai mỗi lần; nếu mua từ 1.000 chai trở lên mỗi lần giá là 50$. Thời gian đặt hàng 2 tháng; chi phí 1 lần đặt hàng là 180$.

a. Xác định số chai rượu cần mua mỗi lần sao cho tổng chi phí bé nhất; tính điểm đặt hàng tương ứng.

b. Nếu Nhà nước có quyết định đánh thuế 20% trên giá mua vào, nhưng hệ số chi phí bảo quản vẫn tính với giá chưa tính thuế thì có cần thay đổi lượng hàng mua mỗi lần không?

HD:

a. $S^*=1385.64$; $F(S^*)=6010392.305$ USD ; $B^*=1032.78$

b. Không.

21. Một công ty sử dụng một loại vật tư cho sản xuất; loại vật tư này có thể mua ở 2 nguồn khác nhau.

Nguồn I: Chi phí mỗi hợp đồng 400.000đồng; giá 12.000 đồng/kg; thời gian đặt hàng 45 ngày, bổ sung hàng dần với cường độ 12tấn/năm.

Nguồn II: Chi phí mỗi hợp đồng 600.000đồng; giá 110.000đồng/kg nếu mua ít hơn 1.000kg mỗi lần và 10.500đồng/kg nếu mua từ 1.000kg trở lên. Thời gian đặt hàng 60 ngày, bổ sung hàng mất thời gian không đáng kể.

Tổng nhu cầu trong mỗi năm là 8 tấn, chi phí dự trữ có hệ số 0,1 và giả sử tiêu thụ đều đặn trong năm. Hãy xác định nguồn mua có lợi và tổng chi phí tương ứng.

HD: Chọn nguồn II: $S^*=3032.72$; $F(S^*)=87174901$; $B^*=1315.07$

22. Một nhà máy tinh chế đường có tổng nhu cầu bán thành phẩm mỗi năm 500.000 tấn.

Nhà máy có thể mua bán thành phẩm theo 1 trong hai phương thức:

Phương thức thứ nhất là mỗi lần mua một khối lượng nào đó với giá không đổi bên bán thoả thuận là 125$/tấn. Chi phí cố định giao dịch là 20$ cho 1 lần.

Phương thức thứ hai là mua theo mùa giá sẽ là 120$/tấn ở đầu tháng 1 và 132$/tấn ở đầu tháng 7, mỗi lần mua đủ cho sáu tháng sản xuất. Chi phí cố định cho giao dịch 1 lần là 45$.

Chi phí bảo quản bằng 5% giá mua. Hãy chọn cách mua sao cho tổng chi phí nhỏ nhất.

HD: Phương thức I: Luồng hàng tối ưu S=1788.85 ; F(S*)=62511180.340 USD ; t*=0.0036 ; n*=279.51; B*=1645.57;*

Phương thức II: F(S)=64575090 USD. Chọn phương thức I.*

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. TS Nguyễn Quảng và TS Nguyễn Thượng Thái. Giáo trình toán chuyên ngành. NXB Bưu Điện, tháng 9 năm 2003.
2. TS Nguyễn Quảng và CN Lê Văn Bông. Giáo trình toán ứng dụng. NXB Quân đội nhân dân, năm 2003.
3. GS.TS Trần Túc.Bài giảng quy hoạch tuyến tính ĐHKT-1996
4. GS.TS Trần Túc. Hướng dẫn giải bài tập quy hoạch tuyến tính. NXBKH&KT, năm 1998.
5. Bài tập quy hoạch tuyến tính. Bộ môn toán, Trường ĐHGTVT, năm 1996.
6. Bài tập toán kinh tế. Trường ĐHTCKT, năm 1995.

MỤC LỤC

TOÁN KINH TẾ

Mã số: 417TKT210

Chịu trách nhiệm bản thảo

TRUNG TÂM ĐÀO TẠO BƯU CHÍNH VIỄN THÔNG 1