CHƯƠNG 1

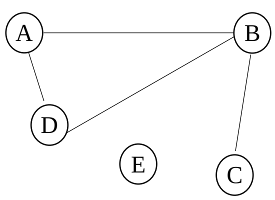
CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN

1. Định nghĩa đồ thị

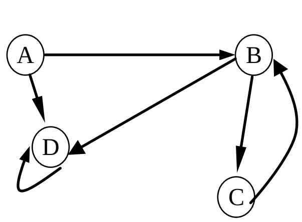
$V \neq \phi$:tập đỉnh, E={(u,v): u,v$\in$ V} :tập cạnh
G = (V,E) gọi là đồ thị.

- Đồ thị vô hướng: cạnh là cặp đỉnh không có thứ tự. Ta có: $(u,v) \in E \Rightarrow (v,u) \in E$
- Đồ thị có hướng: cạnh là cặp đỉnh có thứ tự gọi là cung.
- Đơn đồ thị : mỗi cặp đỉnh chỉ có tối đa một cạnh/cung
- Đa đồ thị: mỗi cặp đỉnh có thể có hơn một cạnh/cung
- Đồ thị có trọng số: trên mỗi cạnh/cung có một giá trị gọi là trọng số của cạnh/cung
  (Trong tài liệu này ta chỉ xét đơn đồ thị.)

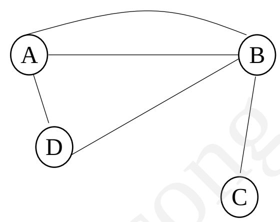
Ví dụ : hình 1a,1b,1c,1d



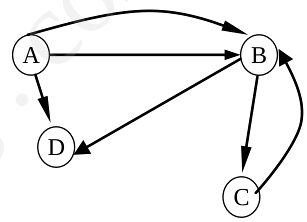
Đơn đồ thị vô hướng



Đơn đồ thị có hướng



Đa đồ thị vô hướng



Đa đồ thị có hướng

Nhận xét:
Rất nhiều bài toán có thể mô hình hoá bằng đồ thị và giải quyết bằng các thuật toán trên đồ thị.
Ví dụ xếp lịch thi đấu là một đồ thị vô hướng với mỗi đội là đỉnh, hai đội thi đấu với nhau là cạnh. Mạng giao thông là một đa đồ thị có hướng với nút giao thông là đỉnh, đường đi giữa hai nút là cung. Tương tự việc thiết kế mạng máy tính, mạng viễn thông có thể đưa về bài toán đồ thị.

2. Các thuật ngữ

- Khuyên: cạnh (cung) gọi là khuyên nếu có hai đỉnh trùng nhau.
- Cạnh (cung) lặp: là hai cạnh (cung) cùng tương ứng với một cặp đỉnh.
- Đỉnh kề: nếu (u,v) là cạnh (cung) của đồ thị thì v gọi là kề của u. Trong đồ thị vô hướng nếu v kề u thì u cũng kề v.
- Cạnh liên thuộc: cạnh e=(u,v) gọi là cạnh liên thuộc với hai đỉnh u, v.
- Bậc của đỉnh: số cạnh liên thuộc với v gọi là bậc của đỉnh v, kí hiệu là deg(v). Bậc của đỉnh có vòng được cộng thêm 2 cho mỗi vòng.
  Ví dụ hình 1a : deg(E)=0, deg(B)=3, deg(C)=1
- Đỉnh cô lập, đỉnh treo: Trong đồ thị vô hướng, đỉnh bậc 0 gọi là đỉnh cô lập, đỉnh bậc 1 gọi là đỉnh treo.Ví dụ hình 1a: C là đỉnh treo, E là đỉnh cô lập
- Cung vào, ra: cung e=(u,v) gọi là cung ra khỏi u và là cung vào v.
- Bán bậc của đỉnh: số cung vào v gọi là bán bậc vào của đỉnh v, kí hiệu $deg^-(v)$, số cung ra khỏi v gọi là bán bậc ra của đỉnh v, kí hiệu $deg^+(v)$.
  Ví dụ (hình 1b)
  $deg^-(A)=0$, $deg^-(B)=2$, $deg^-(D)=3$, $deg^+(A)=2$, $deg^+(B)=2$, $deg^+(C)=1$

- **Định lý 1:** Trong đồ thị vô hướng

Tổng bậc các đỉnh = 2 lần số cạnh.

Gọi m là số cạnh, thì : $\sum_{v \in V} \deg(v) = 2m$

Chứng minh:
Mỗi cạnh e=(u,v) được tính một lần trong deg(u) và một lần trong deg(v) $\Rightarrow$ trong tổng bậc của các đỉnh, mỗi cạnh được tính hai lần $\Rightarrow$ tổng bậc bằng 2m.

- **Hệ quả**: Trong đồ thị vô hướng

Số đỉnh bậc lẻ là một số chẵn

Chứng minh:
Gọi O là tập các đỉnh có bậc là số lẻ, và U là tập các đỉnh có bậc là số chẵn.
Ta có:

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = \sum_{v \in O} \deg(v) + \sum_{v \in U} \deg(v) = 2m$$

Do $\forall$ $v \in U$, deg(v) chẵn nên $\sum_{v \in U} \deg(v)$ chẵn $\Rightarrow$ $\sum_{v \in O} \deg(v)$ chẵn

Do $\forall$ $v \in O$, deg(v) lẻ mà tổng $\sum_{v \in O} \deg(v)$ chẵn, nên tổng này phải gồm một số chẵn các số hạng

$\Rightarrow$ số đỉnh có bậc là số lẻ là một số chẵn (đpcm).

- **Định lý 2**: Trong đồ thị có hướng

Tổng bán bậc ra = tổng bán bậc vào = số cung

Gọi m là số cung, thì

$$\sum_{v \in V} \deg^{+}(v) = \sum_{v \in V} \deg^{-}(v) = m$$

Chứng minh:
Hiển nhiên vì mỗi cung (u,v) ra ở đỉnh u và vào ở đỉnh v nên được tính một lần trong bậc ra của u và một lần trong bậc vào của v nên suy ra đpcm.

3. Đường đi, chu trình, liên thông

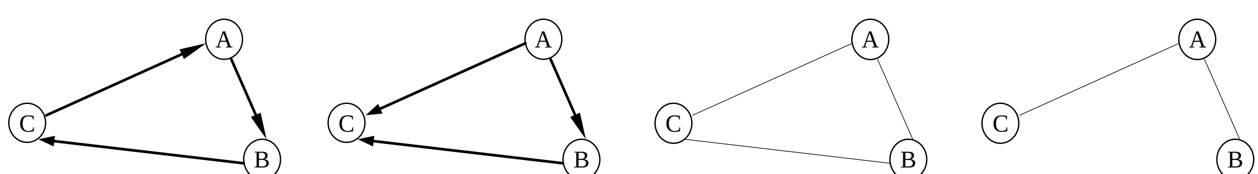
*** Đường đi, chu trình:**

- Đường đi: Đường đi có độ dài n từ đỉnh v_0 đến đỉnh v_n là dãy $v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}, v_n$; với $(v_i\ v_{i+1}) \in E$, $\forall$ i=0,…,n-1. Đường đi có thể biểu diễn bằng một dãy n cạnh (cung): $(v_0, v_1), \ldots, (v_i, v_{i+1}), \ldots, (v_{n-1}, v_n)$. Đỉnh v_0 gọi là đỉnh đầu, đỉnh v_n gọi là đỉnh cuối của đường đi.
- Chu trình: là đường đi có đỉnh đầu trùng với đỉnh cuối. Đường đi (hay chu trình) gọi là đơn nếu không có cạnh (cung) bị lặp lại.

*** Đồ thị Liên Thông:**

- Đồ thị gọi là liên thông nếu hai đỉnh bất kỳ luôn có đường đi. Nếu đồ thị không liên thông, đồ thị luôn có thể chia thành các đồ thị con liên thông (thành phần liên thông) đôi một không có đỉnh chung.
- Đồ thị có hướng liên thông còn được gọi là liên thông mạnh. Nếu đồ thị có hướng không liên thông nhưng đồ thị vô hướng tương ứng liên thông thì đồ thị có hướng gọi là liên thông yếu.
- Đồ thị vô hướng liên thông gọi là định hướng được nếu có thể định hướng các cạnh để có được đồ thị có hướng liên thông.

  ví dụ: hình 2

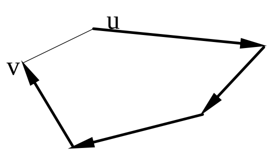


Có hướng lthông (lthông mạnh) | Có hướng kg lthông nhưng lthông yếu | Vô hướng lthông định hướng được | Vô hướng lthông Kg định hướng được

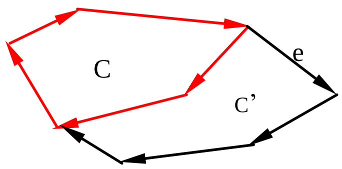
- **Định lý 3:** G là đồ thị vô hướng liên thông.

G định hướng được ⇔ mỗi cạnh của G nằm trên ít nhất một chu trình.

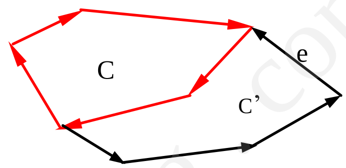
Chứng minh: hình 3
(⇒) G định hướng được ⇒ G liên thông mạnh ⇒ ∀ (u,v)∈ E, ∃ đường đi có hướng từ u đến v ⇒ ∃ đường đi vô hướng từ u đến v. Đường đi này kết hợp với cạnh (u,v) sẽ tạo một chu trình chứa cạnh (u,v) (xem hình 3a)
(⇐) Ta xây dựng một thuật toán xác định hướng các cạnh của G để G liên thông mạnh.
Giả sử C là một chu trình, định hướng các cạnh trên chu trình theo một hướng đi vòng theo chu trình.
Nếu tất cả các cạnh của đồ thị đã được định hướng thì kết thúc thuật toán. Ngược lại, chọn cạnh e chưa định hướng mà e có chung đỉnh với ít nhất một trong số các cạnh đã định hướng (e tồn tại vì G liên thông). Theo giả thiết tìm được chu trình C' chứa cạnh e. Định hướng các cạnh chưa được định hướng của C' theo một hướng dọc theo C'. Thuật toán lặp lại cho tới khi tất cả các cạnh của đồ thị được định hướng (xem hình 3b, 3c)



Hình 3a



Hình 3b



Hình 3c

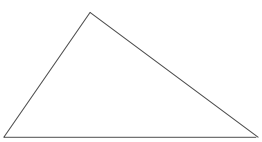
*** Đỉnh rẽ nhánh, cạnh cầu:**

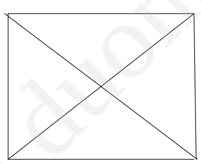
- Đỉnh v gọi là đỉnh rẽ nhánh (đỉnh trụ) nếu việc loại bỏ v cùng với các cạnh liên thuộc với nó làm tăng số thành phần liên thông.
- Cạnh e gọi là cầu nếu việc loại bỏ e làm tăng số thành phần liên thông.

4. Một số đồ thị đặc biệt.

a) Đồ thị đầy đủ:

Đồ thị đầy đủ n đỉnh, ký hiệu bởi K_n, là đơn đồ thị vô hướng mà giữa hai đỉnh bất kỳ của nó luôn có cạnh nối.


K_3

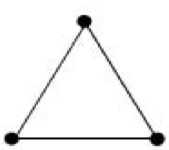

K_4

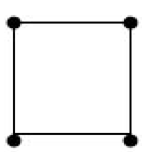
- **Định lý 4:**

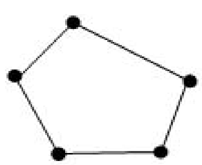
Đồ thị đầy đủ K_n có tất cả n(n-1)/2 cạnh, và là đơn đồ thị có nhiều cạnh nhất.

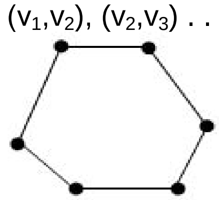
b) Đồ thị vòng

Đồ thị vòng C_n, n≥3. gồm n đỉnh v_1, v_2,. . . .v_n và các cạnh (v_1,v_2), (v_2,v_3) . . . (v_{n-1},v_n), (v_n,v_1).


C_3

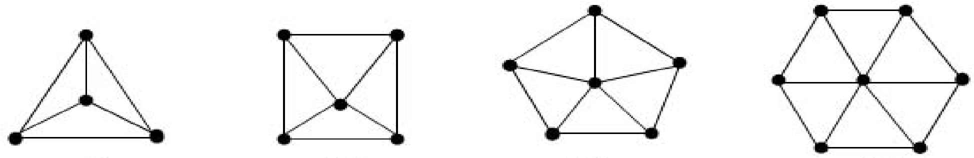

C_4


C_5


C_6

c) Đồ thị bánh xe

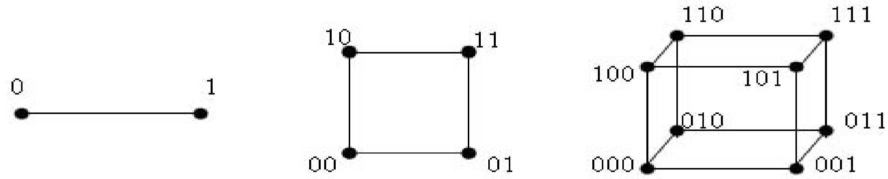
Đồ thị bánh xe W_n thu được từ đồ thị vòng C_n bằng cách bổ sung vào một đỉnh mới nối với tất cả các đỉnh của C_n



W_3 W_4 W_5 W_6

d) Đồ thị lập phương

Q_n là đơn đồ thị có 2^n đỉnh, các đỉnh đánh số từ 0 đến 2^{n-1} và hai đỉnh kề nhau chỉ khác nhau một bít.



Q_1 Q_2 Q_3

e) Đơn đồ thị hai phía

Đơn đồ thị G=(V,E) được gọi là hai phía nếu như tập đỉnh V của nó có thể phân hoạch thành hai tập X và Y sao cho X∪Y=V và X∩Y=∅ và mỗi cạnh của đồ thị chỉ được nối một đỉnh thuộc X với một đỉnh thuộc Y.

- **Định lý 5 (chấp nhận)**

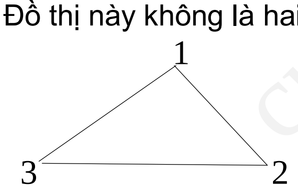
G là đồ thị hai phía ⇔ G không có chu trình độ dài lẻ.

- **Thuật toán kiểm tra đồ thị liên thông là hai phía:**

B0: Chọn v là một đỉnh bất kỳ của đồ thị. Đặt X={v}
B1: Tìm Y là tập các đỉnh kề của các đỉnh trong X. Nếu $X \cap Y \neq \phi$ thì đồ thị không phải là hai phía, kết thúc. Ngược lại xuống B2.
B2: Tìm T là tập các đỉnh kề của các đỉnh trong Y. Nếu $T \cap Y \neq \phi$ thì đồ thị không phải là hai phía, kết thúc. Nếu T=X thì đồ thị là hai phía, kết thúc. Ngược lại gán X=T và lặp lại B1.

Ví dụ:

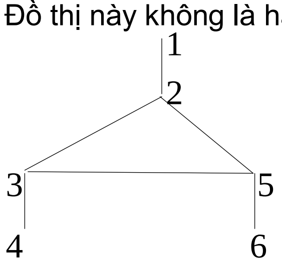
a/ Đồ thị này không là hai phía vì chứa chu trình độ dài lẻ (=3).



X	Y (Các đỉnh kề X)	T (Các đỉnh kề Y)
1	2,3	1,2,3

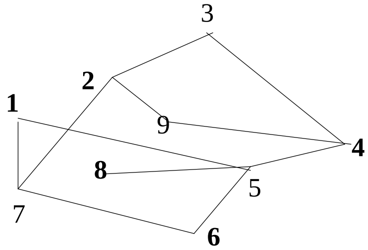
$T \cap Y \neq \phi$: đồ thị không phải là hai phía

b/ Đồ thị này không là hai phía vì chứa chu trình độ dài lẻ (=3).



X	Y (Các đỉnh kề X)	T (Các đỉnh kề Y)
1	2	1,3,5
1,3,5	2,3,4,5,6	

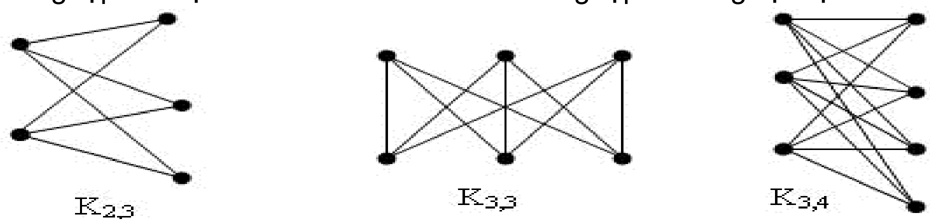
$X \cap Y \neq \phi$: đồ thị không phải là hai phía c/ đồ thị này là hai phía vì không có chu trình độ dài lẻ



X	Y (Các đỉnh kề X)	T (Các đỉnh kề Y)
1	5,7	1,2,4,6,8
1,2,4,6,8	3,5,7,9	1,2,4,6,8

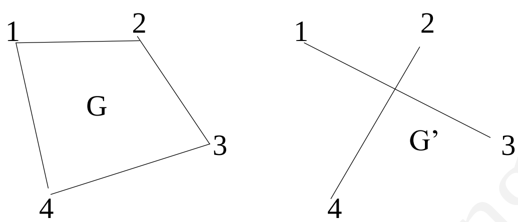
T=X : đồ thị là hai phía
X={1,2,4,6,8}; Y={3,5,7,9}

f) Đồ thị hai phía đầy đủ:
Đồ thị hai phía G=(X $\cup$ Y, E) với |X|= m,|Y| = n được gọi là đồ thị hai phía đầy đủ , ký hiệu là $K_{m,n}$ nếu mỗi đỉnh trong tập X được nối với tất cả các đỉnh trong tập Y và ngược lại.

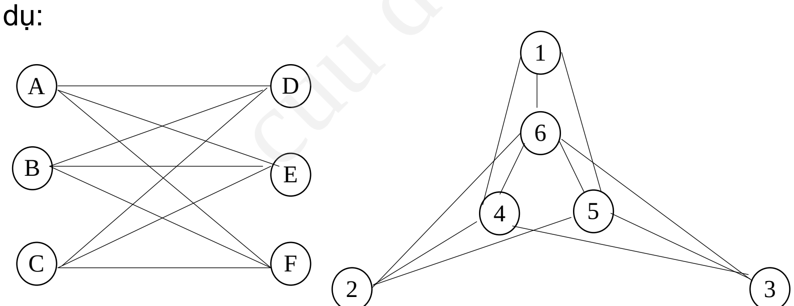


g) Đồ thị chính qui bậc k: có mọi đỉnh bậc k
Ví dụ K_n là chính qui bậc n-1, $K_{n,n}$ là chính qui bậc n.

h) Đồ thị bù:
G' gọi là bù của G nếu các đỉnh của nó là đỉnh của G và hai đỉnh của G' là kề nhau khi và chỉ khi chúng không kề nhau trên G.



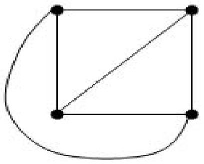
i) Hai đồ thị đẳng cấu:
G_1=(V_1, E_1) và G_2=(V_2, E_2) là hai đồ thị đơn vô hướng. G_1 và G_2 gọi là đẳng cấu nếu có một song ánh f: V_1 --> V_2 sao cho (u,v) $\in$ E_1 $\Leftrightarrow$ (f(u),f(v)) $\in$ E_2 .
Ví dụ:

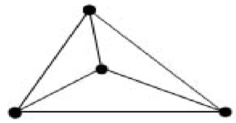


Song ánh f:
f(A)=1, f(B)=2,f(C)=3,
f(D)=4,f(E)=5,f(F)=6

Nhận xét:
Hai đồ thị đẳng cấu sẽ có cùng số đỉnh, cùng số đỉnh bậc k, cùng số cạnh, cùng số tplt

j) Đồ thị phẳng
Đồ thị gọi là đồ thị phẳng nếu có thể vẽ nó trên mặt phẳng sao cho các cạnh của nó không cắt nhau ngoài việc cắt nhau ở đỉnh. Cách vẽ như vậy gọi là biểu diễn phẳng của đồ thị.
Ví dụ: K_4 là phẳng



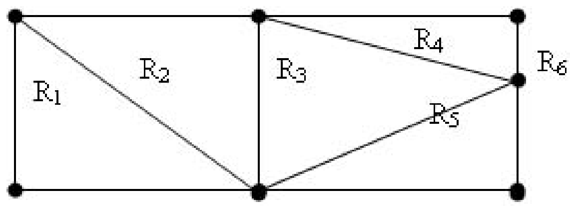


- **Định lý 7 (Công thức Euler):**

G là đồ thị phẳng liên thông, G có n đỉnh, m cạnh, r là số miền của mặt phẳng bị chia bởi biểu diễn phẳng của G. Ta có:

$$r = m-n + 2$$

Ví dụ: m=11, n=7 $\Rightarrow$ số miền r= m-n+2 = 6



5. Tô màu đồ thị: tô màu đồ thị sao cho hai đỉnh kề nhau có màu khác nhau và hãy sử dụng số màu ít nhất như có thể.

Sắp thứ tự danh sách các đỉnh theo bậc giảm dần.
Gọi m là số màu cần sử dụng, ban đầu m=0;
Trong khi còn đỉnh chưa tô {
    m=m+1;
    Tô màu m cho đỉnh chưa được tô màu đầu tiên trong danh sách.
    Tô màu m cho các đỉnh chưa tô màu trong danh sách và không kề với các đỉnh có màu m.
}

Chú ý:
Nếu không sắp xếp thì thường sử dụng số màu nhiều hơn khi sắp xếp nhưng không phải là luôn như vậy. Thuật toán thường cho kết quả với số màu tô ít nhất nhưng không phải luôn là như vậy.

Ví dụ:
a) Cho đơn đồ thị vô hướng 7 đỉnh, dạng ma trận kề như sau:

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	1	1	0	0	0	0
2	1	0	0	1	0	0	0
3	1	0	0	1	0	0	0
4	0	1	1	0	1	1	0
5	0	0	0	1	0	1	1
6	0	0	0	1	1	0	1
7	0	0	0	0	1	1	0

Trình bày kết quả tại mỗi bước khi áp dụng thuật toán tô màu

b) Có 7 môn học, các cặp môn thi sau có chung sinh viên thi:
(1,2);(1,3);(1,4);(1,7);(2,3);(2,4);(2,5);(2,7),(3,4);(3,7);(4,5);(4,6);(5,7);(6,7)
Hãy sử dụng thuật toán tô màu để tìm số buổi thi ít nhất cần tổ chức.

c) Có 7 đài truyền hình ở cách nhau như đã cho trong bảng dưới đây. Hỏi phải cần ít nhất bao nhiêu kênh khác nhau để phát sóng, nếu hai đài không thể dùng cùng một kênh khi chúng cách nhau không quá 15 km.

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	8.5	17.5	20	50	10	16
2	8.5	0	12.5	17.5	10	16	15
3	17.5	12.5	0	10	20	25	19
4	20	17.5	10	0	21	22	13
5	50	10	20	21	0	10	12
6	10	16	25	22	10	0	17
7	16	15	19	13	12	17	0

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	1	0	0	0	1	0
2	1	0	1	0	1	0	1
3	0	1	0	1	0	0	0
4	0	0	1	0	0	0	1
5	0	1	0	0	0	1	1
6	1	0	0	0	1	0	0
7	0	1	0	1	1	0	0

BÀI TẬP CHƯƠNG 1

Bài 1:
Đồ thị lập phương Q_n là đồ thị có 2^n đỉnh, đỉnh được đánh số từ 0 đến 2^n-1 . Hai đỉnh kề nhau nếu hai xâu nhị phân biểu diễn 2 đỉnh chỉ khác nhau 1 bit. Hãy lập trình tìm ma trận kề của Q_n .

Bài 2:
Cho hai đơn đồ thị vô hướng có mtk lưu trong hai file văn bản. Hãy kiểm tra hai đồ thị có đẳng cấu hay không?

Bài 3:
Viết chương trình kiểm tra một đơn đồ thị vô hướng có là hai phía hay không? Nếu có hai tìm một phân hoạch của tập đỉnh. Biết rằng MTK của đồ thị lưu trong file văn bản dạng sau:

```
6
0	1	0	0	0	0
1	0	1	0	1	0
0	1	0	1	1	0
0	0	1	0	0	0
0	1	1	0	0	1
0	0	0	0	1	0
```

Bài 4:
Viết chương trình quản lý kết quả thi đấu bóng đá. Biết rằng kết quả lưu trong file văn bản dạng sau:

```
4			//co 4 doi bong
1	2	2	3	//doi 1 da voi doi 2 ket qua 2/3, doi 1 thua, 2 thang
1	3	1	3
2	3	1	0
3	4	2	1
```

Hãy in ra kết quả dạng sau:

```
*Ma tran trong so:
  0  2  1 -1
  3  0  1 -1
  3  0  0  2
 -1 -1  1  0
```

**Ket qua thi dau:

Doi	Tong	Thang	Thua	Hieu	Hang
2	3	1	0	1	1
3	3	2	1	1	2
4	0	0	0	0	3
1	0	3	6	-3	4

Bài 5:
Hãy tô màu đồ thị với số màu ít nhất sao cho hai đỉnh kề nhau có màu khác nhau.

Bài 6:
Sắp lịch thi sao cho số buổi thi ít nhất và không có sinh viên nào bị trùng buổi thi. Dữ liệu vào là các cặp môn học mà có sinh viên thi cả hai môn được lưu trong file dạng sau:

```
10
1    2
1    3
1    5
2    3
2    4
2    6
3    6
3    8
3    9
3    10
4    7
4    10
5    8
5    9
5    10
6    8
6    9
6    10
7    8
7    10
```

*Kết quả

*Ma tran ke:

```
0 1 1 0 1 0 0 0 0 0
1 0 1 1 0 1 0 0 0 0
1 1 0 0 0 1 0 1 1 1
0 1 0 0 0 0 1 0 0 1
1 0 0 0 0 0 0 1 1 1
0 1 1 0 0 0 0 1 1 1
0 0 0 1 0 0 0 1 0 1
0 0 1 0 1 1 1 0 0 0
0 0 1 0 1 1 0 0 0 0
0 0 1 1 1 1 1 0 0 0
```

Sap lich khong uu tien:
Buoi 1: 1 4 6
Buoi 2: 2 5 7
Buoi 3: 3
Buoi 4: 8 9 10

Sap lich co uu tien:

Buoi 1: 3 5 7
Buoi 2: 6 4 1
Buoi 3: 10 2 8 9

- Hết -