Học viện Công nghệ Bưu chính Viễn thông
Khoa Công nghệ thông tin 1

Toán rời rạc 2

Bài toán luồng cực đại trong mạng

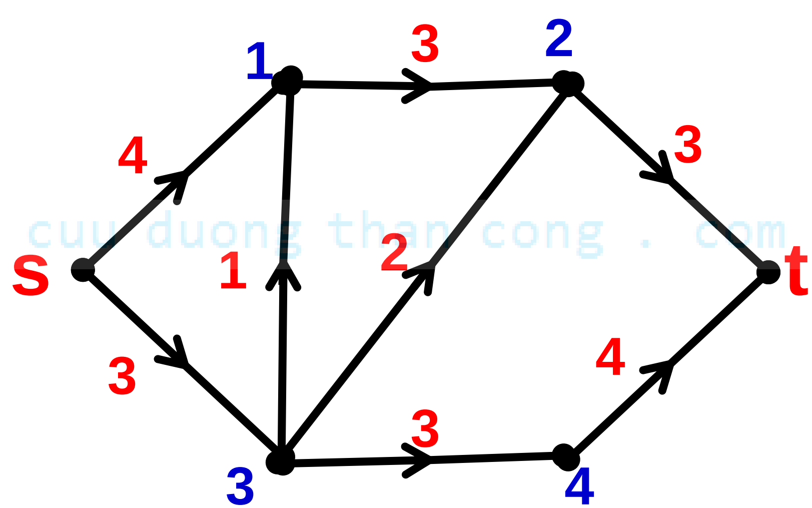
Ngô Xuân Bách

Nội dung

- Phát biểu bài toán
- Thuật toán Ford-Fulkerson

Mạng

- **Định nghĩa 1**: Mạng là đồ thị có hướng $G = < V, E >$ trong đó:
  - Có duy nhất một đỉnh s không có cung đi vào gọi là điểm phát
  - Có duy nhất một đỉnh t không có cung đi ra gọi là điểm thu
  - Mỗi cung $\mathrm{e} = (u, v) \in E$ được gán với một số thực không âm $\mathrm{c(e)} = c(u, v)$ gọi là khả năng thông qua (băng thông) của cung
  - **Quy ước**: Nếu không có cung (u, v) thì khả năng thông qua được gán bằng 0



Luồng trong mạng

- **Định nghĩa 2**: Giả sử cho mạng $G =< V, E >$. Ta gọi luồng f trong mạng $G =< V, E >$ là ánh xạ $f: E \to R_+$ gán cho mỗi cung $e = (u, v) \in E$ một số thực không âm $f(e) = f(u, v)$, gọi là luồng trên cung e, thỏa mãn các điều kiện sau:

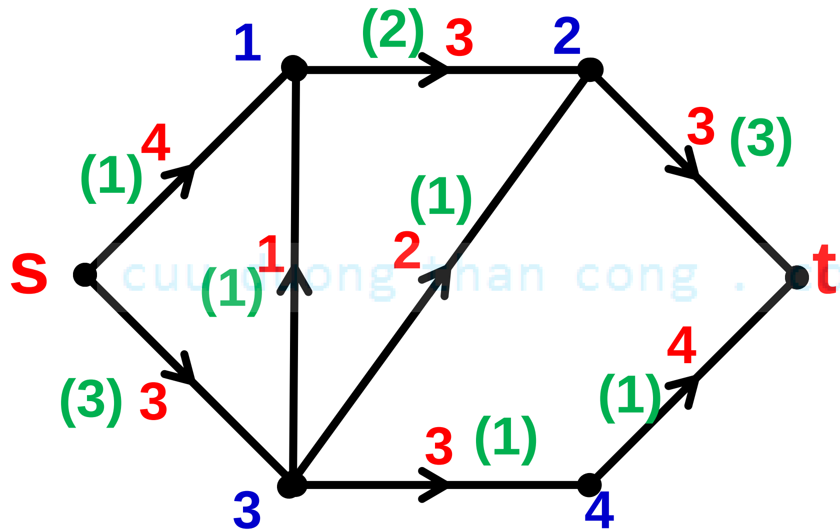
1) Luồng trên mỗi cung $\mathrm{e} \in E$ không vượt quá khả năng thông qua của nó: $0 \leq f(e) \leq c(e)$
2) Điều kiện cân bằng luồng trên mỗi đỉnh của mạng: Tổng luồng trên các cung đi vào đỉnh v bằng tổng luồng trên các cung đi ra khỏi đỉnh v với mọi $v \neq s, t$:

   $$\sum_{u\in\Gamma^-(v)} f(u, v) = \sum_{u\in\Gamma^+(v)} f(v, u),$$

   $$\Gamma^-(v) = \{u \in V: (u, v) \in E\}, \Gamma^+(v) = \{u \in V: (v, u) \in E\}$$
3) Ta gọi giá trị của luồng f là số:

   $$val(f) = \sum_{u\in\Gamma^+(s)} f(s, u) = \sum_{u\in\Gamma^-(t)} f(u, t)$$

Ví dụ: Luồng trong mạng



$$val(f) = 4$$

Bài toán luồng cực đại

- Phát biểu bài toán
  - Cho mạng $G =< V, E >$, hãy tìm luồng f^* trong mạng với giá trị luồng $val(f^*)$ lớn nhất

- Ví dụ
  - Xét đồ thị có hướng tương ứng với hệ thống đường ống dẫn dầu
  - Các ống dẫn dầu tương ứng với các cung của đồ thị
  - Điểm phát là tàu chở dầu, điểm thu là bể chứa dầu
  - Điểm nối giữa các ống tương ứng với các đỉnh của đồ thị
  - Khả năng thông qua của các cung tương ứng với tiết diện các ống
  - Cần tìm luồng dầu lớn nhất có thể bơm từ tàu chở dầu vào bể chứa?

Nội dung

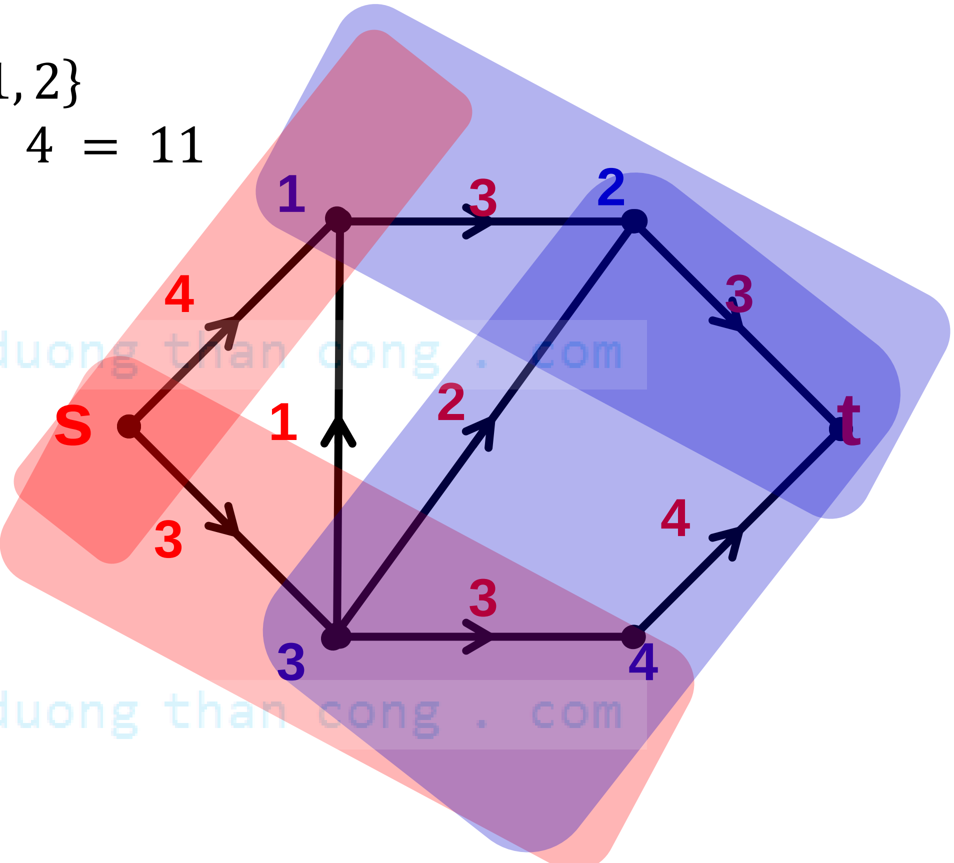
- Phát biểu bài toán
- Thuật toán Ford-Fulkerson

Lát cắt

- **Định nghĩa 3**: Lát cắt (X, X^*) là một cách phân hoạch tập đỉnh V của mạng thành hai tập X và X^*, trong đó $s \in X$ và $t \in X^*$.
  - Khả năng thông qua của lát cắt (X, X^*) được định nghĩa:
  $$c(X, X^*) = \sum_{v \in X, w \in X^*} c(v, w)$$
  - Lát cắt với khả năng thông qua nhỏ nhất được gọi là lát cắt hẹp nhất
- **Bổ đề 1**: Giá trị của mọi luồng f trong mạng luôn nhỏ hơn hoặc bằng khả năng thông qua của lát cắt (X, X^*) bất kỳ trong mạng: $val(f) \leq c(X, X^*)$
  - **Hệ quả**: Giá trị của luồng cực đại trong mạng không vượt quá khả năng thông qua của lát cắt hẹp nhất trong mạng

Ví dụ: Lát cắt

Xét lát cắt (X, X^*):
- với $X = \{S, 3, 4\}, X^* = \{t, 1, 2\}$
- c$(X, X^*) = 4 + 1 + 2 + 4 = 11$

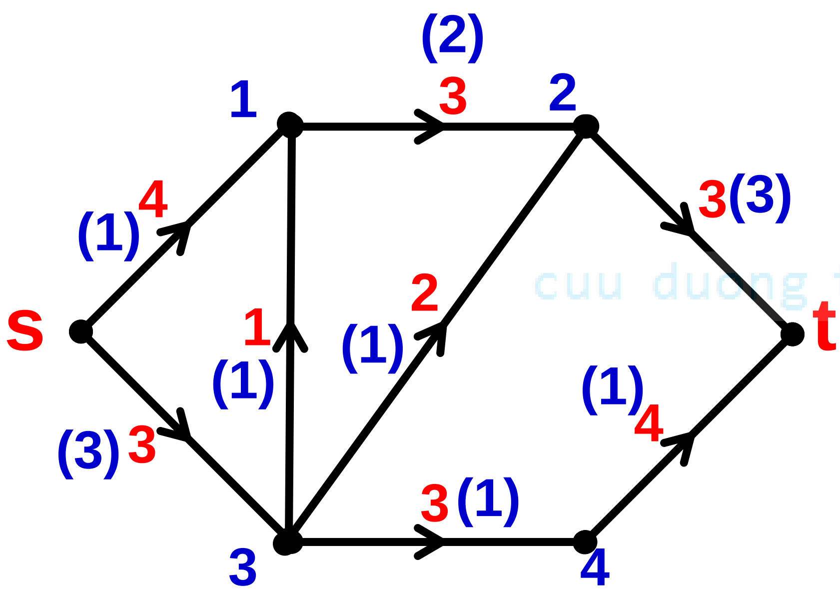


Đồ thị tăng luồng

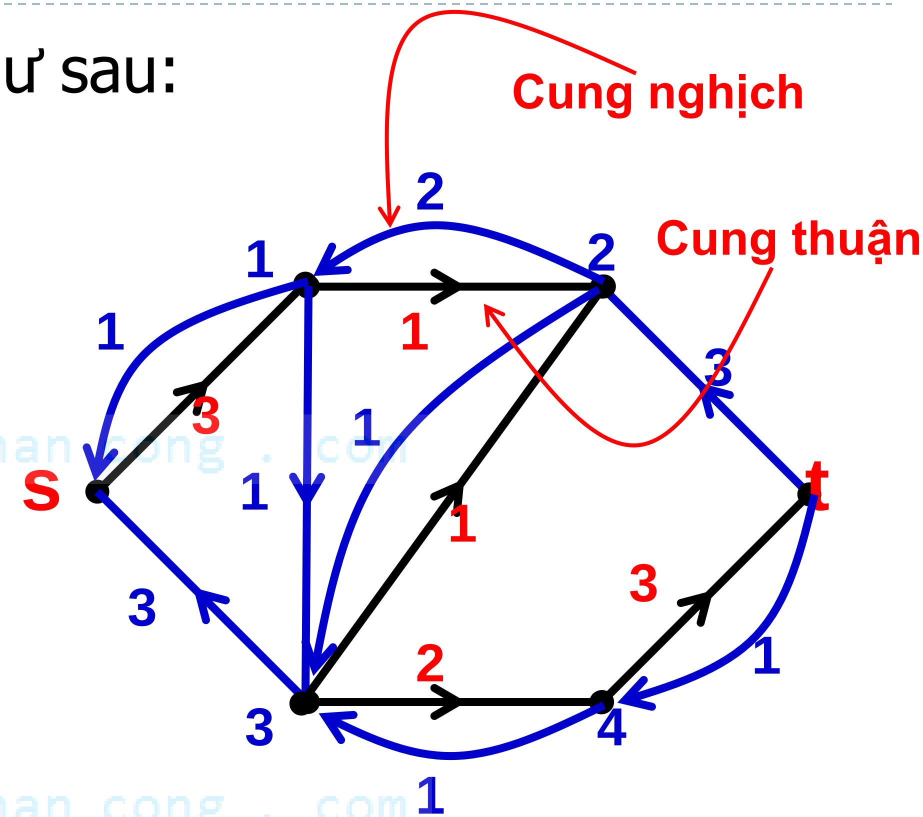
- Giả sử f là một luồng trong mạng $G =< V, E >$. Từ mạng này ta xây dựng đồ thị có trọng số $G_f =< V, E_f >$, với tập các cung E_f và trọng số trên các cung được xác định như sau:
  - Nếu $e = (v, w) \in E$ với $f(v, w) = 0$, thì $(v, w) \in E_f$ với trọng số $c(v, w)$
  - Nếu $e = (v, w) \in E$ với $f(v, w) = c(v, w)$, thì $(w, v) \in E_f$ với trọng số $c(v, w)$
  - Nếu $e = (v, w) \in E$ với $0 < f(v, w) < c(v, w)$, thì $(v, w) \in E_f$ với trọng số $c(v, w) - f(v, w)$ và $(w, v) \in E_f$ với trọng số $f(v, w)$
- Các cung của G_f đồng thời là cung của G được gọi là cung thuận, các cung còn lại được gọi là cung nghịch. Đồ thị G_f được gọi là đồ thị tăng luồng.

Ví dụ: Đồ thị tăng luồng

- Xét mạng G với luồng f như sau:



Mạng G và luồng f



Đồ thị tăng luồng G_f

Tăng luồng theo đường đi

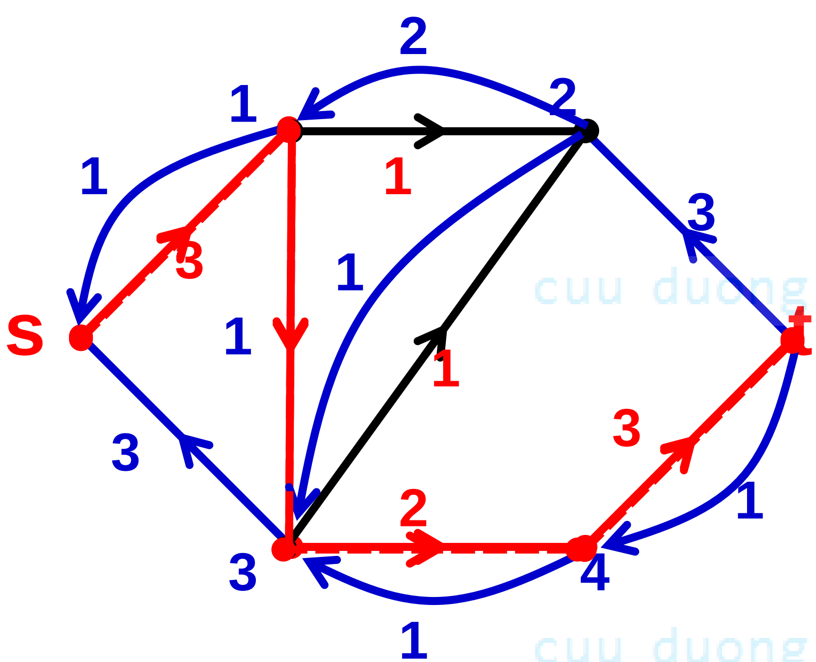
- Xét $P = (s = v_0, v_1, v_2, \ldots, v_k = t)$ là một đường đi từ s đến t trên đồ thị tăng luồng G_f
- Gọi δ là giá trị nhỏ nhất của các trọng số của các cung trên đường đi P
- Xây dựng luồng f' trên mạng G theo quy tắc sau

$$f'(u,v) = \begin{cases} f(u,v) + \delta & \text{, nếu } (u,v) \in P \text{ là cung thuận} \\ f(u,v) - \delta & \text{, nếu } (u,v) \in P \text{ là cung nghịch} \\ f(u,v) & \text{, nếu } (u,v) \notin P \end{cases}$$

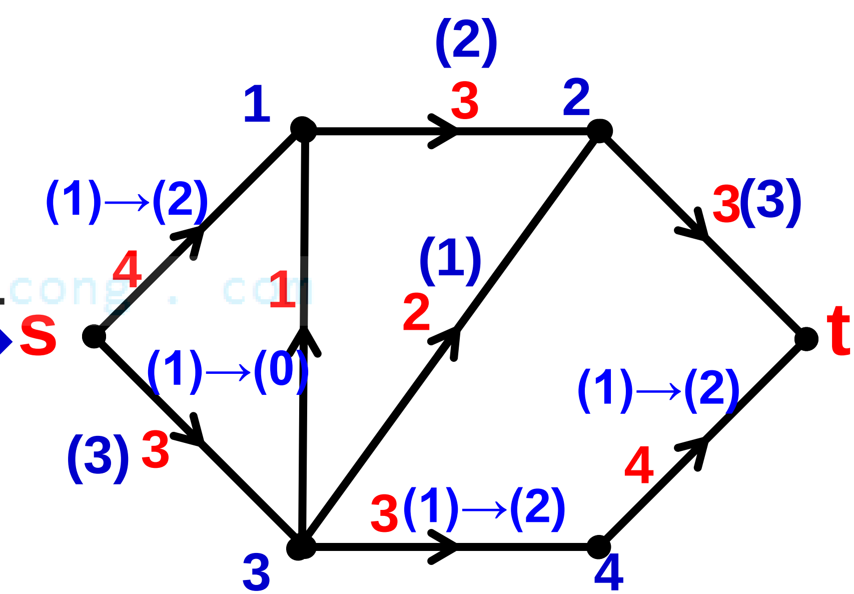
f' là luồng trong mạng và $\mathrm{val}(f') = val(f) + \delta$

Thủ tục biến đổi luồng như trên là tăng luồng dọc theo đường P

Ví dụ: Tăng luồng theo đường đi



δ= 1



Đồ thị tăng luồng G_f

Mạng G và luồng mới f'

$$Val(f') = 5$$

Đường tăng luồng

- **Định nghĩa 4:** Đường tăng luồng f là một đường đi bất kỳ từ s đến t trong đồ thị tăng luồng G_f

- **Định lý 1:** Các mệnh đề sau là tương đương:
  - f là luồng cực đại trong mạng
  - Không tìm được đường tăng luồng f
  - $val(f) = c(X, X^*)$ với một lát cắt (X, X^*) nào đó

Thuật toán Ford-Fulkerson

- Bắt đầu từ một luồng f bất kỳ - có thể là luồng 0
- Xây dựng đồ thị tăng luồng G_f
- Từ G_f, tìm đường tăng luồng P
  - Nếu không có đường tăng luồng nào thì kết thúc
  - Nếu có đường tăng luồng P thì xây dựng luồng mới f' và lặp lại quá trình trên cho đến khi không tìm thêm được đường tăng luồng mới

Để tìm đường tăng luồng trong G_f có thể sử dụng thuật toán tìm kiếm theo chiều rộng (hoặc theo chiều sâu) bắt đầu từ đỉnh s.

Một số kết quả lý thuyết

- **Định lý 2:** Luồng cực đại trong mạng bằng khả năng thông qua của lát cắt hẹp nhất
- **Định lý 3:** Nếu tất cả các khả năng thông qua là các số nguyên thì luôn tìm được luồng cực đại với luồng trên các cung là các số nguyên