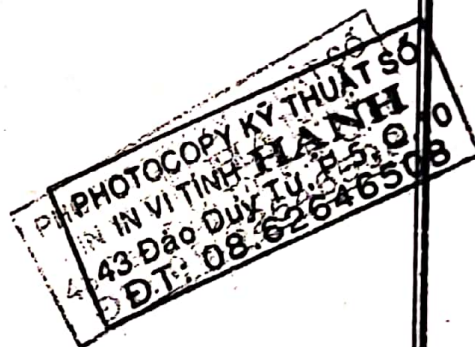


Đề thi toán cao cấp

Giải tích và đại số

Có giải



Đề thi môn giải tích khóa 22 (đề 1) tg 120'

Câu I:

Cho $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+2x)-2x}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ a & \text{khi } x = 0 \end{cases}$

1. Tìm a để $f(x)$ liên tục tại $x=0$.
2. Tìm $f'(0)$ nếu có ứng với a vừa tìm ở câu 1.

Câu II: Tính tích phân:

$$\int_0^{+\infty} \frac{x \cdot dx}{x^4 + 5x^2 + 6}$$

Câu III: Một xí nghiệp sx đq 2 loại hàng hóa. Biết hàm cầu của hàng cầu của xn về 2 loại:

$$Q_{D1} = 1/7(290 - 3P_1 + 2P_2)$$

$$Q_{D2} = 1/7(650 - 3P_2 + P_1)$$

1. Tìm mức sản lượng của xn về hai loại hàng hóa trên sao cho xn có lợi nhuận tối đa:

Nếu hàm tổng chi phí của xn: $C_{(Q1, Q2)} = Q_1^2 + Q_1 \cdot Q_2 + Q_2^2$

2. Vẫn hỏi như câu trên nếu thuế xuất trên mỗi sp là: $t_1 = 26$; $t_2 = 24$ và hàm sx là: $C_{(Q1, Q2)} = Q_1^2 + Q_1 \cdot Q_2 + Q_2^2$

Câu IV: Tìm cực trị có đk của hàm số: $f(x, y) = x + y$, với đk: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$

Câu V: Giải pt vi phân: $y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{e^x + 1}$

@@@@

Đề thi môn giải tích khóa 22 (đề 2) tg 120'

Câu I:

Cho $f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1 - x}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ a & \text{khi } x = 0 \end{cases}$

1. Tìm a để $f(x)$ liên tục tại $x=0$
2. Tìm $f'(0)$ nếu có ứng với a vừa tìm ở câu 1

Câu II: Tính tích phân: $\int_0^{+\infty} x^2 \cdot e^{-x} \cdot dx$

Câu III: Một xí nghiệp sx đq 1 loại hàng hóa và tiêu thụ trên 3 thị trường riêng biệt. Biết hàm cầu của xn trên các thị trường trên là: $Q_{D1} = 30 - 1/3 P_1$; $Q_{D2} = 47,5 - 1/4 P_2$; $Q_{D3} = 54 - 1/5 P_3$

Trong đó Q_i tương ứng là lượng hàng cầu trên thị trường thứ i ($i=1, 2, 3$). tương tự P_i là giá trên các thị trường.

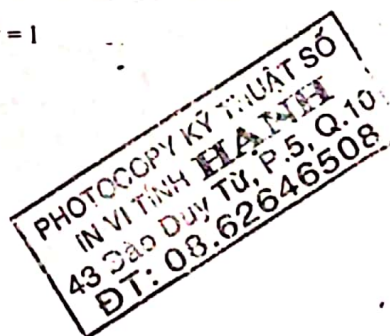
1. Tìm lượng hàng xn cung cấp cho thị trường trên để xn có lợi nhuận tối đa. biết hàm tổng chi phí của xí nghiệp là: $C(Q) = 15 + 30Q$
2. Vẫn câu hỏi trên nếu: $C(Q) = 15 + 30Q + Q^2$

Câu IV: Tìm cực trị có đk của hàm số: $f(x, y) = 2x + y$, với đk: $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$

Câu V: Giải pt vi phân: $y'' + y = \frac{1}{\sin x}$

@@@@

1



Đề thi môn giải tích khóa 23 (đề 1) tg 120'

Câu I: Cho hàm số cầu của một loại hàng hóa : $Q_D = 2500 - 3P$

1. Tìm hệ số co giãn của hàm cầu nói trên.
2. Xác định tại trạng thái co giãn.

Câu II: một người tiêu dùng định sử dụng hết 36 triệu đồng để mua 2 loại hàng hóa: đơn giá :

$$P_x = 2 \text{ triệu} ; P_y = 4 \text{ triệu} . \text{ Hàm hữu dụng } U = (2x+4)(y+2)$$

Tìm khối lượng mỗi loại hàng người đó sẽ mua có giá trị sử dụng lớn nhất.

Câu III: Tính các tích phân sau:

$$1. \int_0^{+\infty} x^2 \cdot e^{-x} \cdot dx$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x} (4+3\sqrt{x})}$$

Câu IV: Giải pt vi phân : $y'' - 5y' + 6y = x \cdot e^x$

@@@

Đề thi môn giải tích khóa 23 (đề 2) tg 120'

Câu I: cho hàm số cầu của một loại hàng hóa : $Q_D = 4200 - 2P$

1. Tìm hệ số co giãn của hàm cầu nói trên.
2. Xác định tại trạng thái co giãn.

Câu II: một người tiêu dùng định sử dụng hết 36 triệu đồng để mua 2 loại hàng hóa: đơn giá :

$$P_x = 1 \text{ triệu} ; P_y = 3 \text{ triệu} . \text{ Hàm hữu dụng } U = (3x+3)(y+2)$$

Tìm khối lượng mỗi loại hàng người đó sẽ mua có giá trị sử dụng lớn nhất.

Câu III: Tính các tích phân sau:

$$1. \int_0^{+\infty} x^2 \cdot e^{-x} \cdot dx$$

$$2. \int_0^1 \ln^2 x \cdot dx$$

Câu IV: Giải pt vi phân : $y'' + 2y' + 2y = x^2 + 1$

@@@

Đề thi môn giải tích khóa 24 (đề 1) tg 120'

Câu I.

Trong những mệnh đề nào sau đây mệnh đề nào đúng, mệnh đề nào sai, nếu sai giải thích vì sao ?

1. Mọi dãy số bị chặn đều có giới hạn.
2. Hàm số liên tục tại điểm nào thì có giới hạn tại điểm đó.
3. Hàm số liên tục tại x_0 thì có đạo hàm tại x_0 .
4. Hàm số f liên tục tại (a, b) thì bị chặn trên (a, b) .
5. Hàm số f có đạo hàm tại x_0 thì : $f(x_0) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.
6. Hàm số $f(x, y)$ có các đạo hàm hỗn hợp cấp 2 tại (x_0, y_0) .

$$\text{Thì } \frac{\partial^2 f}{\partial x \cdot \partial y} (x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \cdot \partial x} (x_0, y_0)$$

7. Nếu hàm (x, y) đạt cực đại tại (x_0, y_0) thì $f(x_0, y_0) > f(x, y) (x, y)$.
8. Nếu hàm $f(x)$ khả tích $[a, b]$ thì liên tục trên $[a, b]$.
9. Nếu y_1, y_2 là hai nghiệm của một chương trình vi phân tuyến cấp 2 thì : $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ cũng là nghiệm của phương trình đó.
10. Nếu hàm số $f(x, y)$ đạt cực trị tại (x_0, y_0) và khả vi tại điểm đó thì $df(x_0, y_0) = 0$

Câu II. Một công ty sản xuất độc quyền hai loại sản phẩm có hàm cầu và hàm tổng chi phí như sau $Q_{D1} = 40 - P_1 + \frac{1}{2} P_2$; $Q_{D2} = 35 + P_1 - P_2$
 $C = Q_1^2 + Q_1 Q_2 + Q_2^2 = 7Q_1 + Q_2 + 3$

1. Tìm mức sản lượng để công ty đạt lợi nhuận tối đa

2. Tìm mức sản lượng để công ty đạt lợi nhuận tối đa với điều kiện $Q_1 + Q_2 = 20$.

Câu III. Tính các tích phân sau: $\int_0^2 \frac{x^2 dx}{\sqrt{4-x^2}}$ $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+6x+8}$

Câu IV. Tìm nghiệm của phương trình sau: $y''+2y'+2y = 2x^2+8x+6$
 Thỏa điều kiện ban đầu: $y(0)=7$; $y'(0)=6$

@@@@@@@@@@@@@@@@

Đề thi môn giải tích khóa 24 (đề 1) tg 120'

Câu I. (Giống câu I đề 1-k24)

Câu II. Một công ty độc quyền sản xuất độc quyền hai sản phẩm có hàm cầu và hàm tổng chi phí như sau: $Q_{D1} = 70 - P_1 + P_2$; $Q_{D2} = 80 + \frac{1}{2} P_1 - P_2$; $C = Q_1^2 + Q_1 Q_2 + Q_2^2 + 76Q_1 + 14Q_2 + 3$

1. Tìm mức sản lượng để công ty đạt lợi nhuận tối đa.

2. Tìm mức sản lượng để công ty đạt lợi nhuận tối đa với điều kiện $Q_1 + Q_2 = 40$.

Câu III: Tính các tích phân sau: 1. $\int_0^{+\infty} x^2 \cdot e^{-x} \cdot dx$ $\int_{3/2}^1 \frac{dx}{x^2 \sqrt{9-x^2}}$

Câu IV: Tìm nghiệm của phương trình vi phân sau: $y''-3y'+2y=2e^x(x+1)$
 Thỏa đk ban đầu: $y(0)=2$; $y'(0)=-3$

@@@@@@@@@@@@@@@@

Đề thi môn giải tích khóa 24 (đề 2) tg 120'

Câu I: Các mệnh đề nào sau đây mệnh đề nào đúng, mệnh đề nào sai, giải thích vì sao?

1. Nếu hàm $f(x)$ xác định trên $[a,b]$ có $f(a) \cdot f(b) < 0$ thì có ít nhất 1 điểm $C \in (a,b)$ để $f(c) = 0$

2. Nếu hàm $f(x)$ liên tục tại x thì f khả vi tại x .

3. Nếu hàm f liên tục trên $[a,b]$ và $f(a) = f(b)$ thì có ít nhất 1 điểm C để $f'(c)=0$

4. Cho hai đại lượng x, y có $y = f(x)$ và f khả vi. Ta luôn có ϵ

5. Sản phẩm tại đó doanh thu biên chế bằng chi phí biên tế, lợi nhuận đạt cực đại.

6. Với $f(x,y)$ là hai hàm biến xác định tại (x_0, y_0) ta luôn có:

$$\lim_{x \rightarrow x_0, y \rightarrow y_0} f(x,y) = f(x_0, y_0)$$

7. Nếu $f(x,y)$ có đạo hàm riêng liên tục thì f liên tục.

8. Nếu f bị chặn trên $[a,b]$ thì f có tích phân xác định trên $[a,b]$.

9. Nếu phương trình vi phân: $y''+ay'+by=0$ có $b^2-4ac < 0$. Thì phương trình vô nghiệm

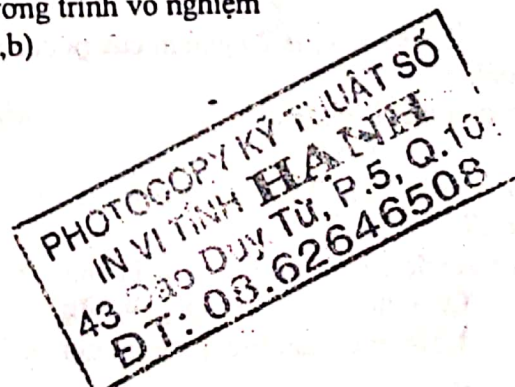
10. Nếu $f'(x) > g'(x)$ cho mọi $x \in (a,b)$ thì $f(x) > g(x)$ cho mọi $x \in (a,b)$

Câu II:

$$\text{Cho } f(x) = \begin{cases} \frac{e^{2x}-1}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ a & \text{khi } x = 0 \end{cases}$$

1. Với giá trị nào của a thì f liên tục tại $x = 0$

2. Tìm $f'(0)$ nếu có ứng với a vừa tìm ở câu 1.



Câu III: Một người định sử dụng hết 31 triệu đồng để mua hai loại hàng. Biết đơn giá của hai loại hàng trên là $P_1 = 3$ triệu, $P_2 = 4$ triệu và hàm hữu dụng $U = (x + 3)(2y + 4)$
 Tìm khối lượng mỗi loại hàng người đó sẽ mua có giá trị sử dụng lớn nhất

Câu IV: Tìm nghiệm của phương trình vi phân sau: $y'' - y/x = (x+1)y^2$. Thỏa đk $y(1) = -1$

@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@

Đề thi môn giải tích khóa 25 (đề 2) tg 90'

Câu I: Trong các mệnh đề nào sau đây mệnh đề nào đúng, mệnh đề nào sai, giải thích vì sao?

1. Tích một hàm số bị chặn ở lân cận x_0
2. Nếu hai hàm $f(x)$ và $g(x)$ khả vi trên (a, b) thì có ít nhất 1 điểm $C \in (a, b)$ để

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

3. Đạo hàm hỗn hợp của hàm 2 biến không phụ (hợp) thuộc vào lấy đạo hàm theo các biến.
4. Nếu $f(x)$ khả tích trên $[a, b]$ thì $f(x)$ liên tục trên $[a, b]$
5. Nếu $y_1(x)$ và $y_2(x)$ là 2 nghiệm của phương trình $y'' + ay' + by = 0$ thì nghiệm tổng quát của pt là:

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

1. Tính vi phân cấp 3 của hàm số $y = \tan x$.
2. Tìm giới hạn sau và giải thích tại sao $\lim_{x \rightarrow 0} \cos(1/x) \tan x$

Câu III: Một công ty sx đq một loại hàng hóa cả có hai loại thị trường tiêu thụ trên hai thị trường tách biệt
 Biết hàm cầu trên 2 thị trường và hàm tổng chi phí:

$$Q_{D1} = 200 - 1/2 P_1; \quad Q_{D2} = 180 - P_2; \quad C = 20 + 80Q + Q^2$$

1. Tìm mức sản lượng và lượng hàng phân phối trên các thị trường để xn có lợi nhuận tối đa
2. Tìm lượng hàng phân phối trên các thị trường để xí nghiệp có lợi nhuận tối đa nếu xí nghiệp có lợi nhuận tối đa.

Câu IV:

Tìm nghiệm của pt vi phân $y'' + 4y' + 5y = 2x + 3$. Thỏa đk ban đầu: $y(0) = 2, y'(0) = -1$

@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@

Đề thi môn giải tích khóa 26 (đề 1) tg 90'

Câu I: Trong các mệnh đề nào sau đây mệnh đề nào đúng, mệnh đề nào sai, giải thích vì sao?

1. Nếu hàm số $f(x)$ bị chặn trên $[a, b]$ thì f liên tục trên $[a, b]$
2. Nếu $\lim f(x, y)$ tồn tại và hữu hạn thì $f(x, y)$ liên tục tại (x_0, y_0) với $x \rightarrow x_0, y \rightarrow y_0$
3. Nếu hàm số $f(x)$ khả tích trên $[a, b]$ thì $f(x)$ khả vi trên $[a, b]$
4. Nếu $f(x)$ khả tích trên $[a, b]$ thì có ít nhất 1 điểm $c \in (a, b)$ để:

$$\int_a^b f(x) dx = f(c) (b - a)$$

5. Nếu y_1, y_2 là 2 nghiệm của pt của pt vi phân tuyến tính cấp 2 thì $y_1 + y_2$ cũng là nghiệm của pt nói trên

Câu II:

Tìm giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x$

Tìm vi phân toàn phần của hàm số:

$$Z = \frac{y}{x^2 + 2y^2}$$

Câu III:

Một xn sx đq 2 loại sản phẩm. Biết hàm cầu 2 loại sản phẩm và hàm tổng chi phí:

$$Q_{D1} = 70 - 2P_1 + P_2; \quad Q_{D2} = 90 + P_1 - P_2; \quad C(Q_1, Q_2) = 20Q_1 + 30Q_2 + 20$$

1. Tìm mức sản lượng để xn nghiệp đạt lợi nhuận tối đa

2'

2. Tìm mức sản lượng đạt lợi nhuận đạt lợi nhuận tối đa với dk $C=1320$
 Câu V: Tìm nghiệm tổng quát và thỏa mãn dk ban đầu của pt:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2\frac{dy}{dx} + 5y = 2x - 3 \quad \begin{cases} y(0) = -3 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$$

@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@

Đề thi môn giải tích khóa 26 (đề 2) tg 90'

Câu I: cho hàm số:

$$f = \begin{cases} \frac{\sqrt{1+2x}-1}{x} & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases}$$

1. Với giá trị nào của a thì f liên tục tại $x=0$
2. Tìm $f'(0)$ nếu có ứng với a vừa tìm ở câu 1.

Câu II: Tìm các giới hạn sau:

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{x^2} \quad 2. \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} \cdot \ln x$$

Câu III: Tính các tích phân sau:

$$1. \int_0^{\infty} x^2 \cdot e^{-x} dx \quad 2. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}(4+\sqrt[3]{x})}$$

Câu IV: Giải pt trình vi phân: $y'' - 5y' + 6y = x \cdot e^x$

Tìm nghiệm tổng quát của pt vi phân: $y' + y/2x = x \cdot y^3$

Câu V: Một xí nghiệp sx đq 2 loại sp. biết hàm cầu 2 loại sp và hàm tổng chi:

$$Q_{D1} = 120 - 2P_1; Q_{D2} = 150 + P_1 - P_2; C(Q_1, Q_2) = Q_1^2 + Q_1 Q_2 + Q_2^2 + 30Q_1 + 150Q_2 + 200$$

Tìm mức sản lượng xn đạt lợi nhuận tối đa

@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@

Đề thi môn giải tích khóa 27 tg 90'

Câu I: Các mệnh đề sau mệnh đề nào đúng mệnh đề nào sai vì sao?

1. Nếu $f(x)$ liên tục tại điểm nào thì khả vi tại điểm đó
2. Nếu U, V là 2 hàm khả vi thì $d(UV) = du \cdot dv$
3. Nếu $f(x)$ khả vi tại x_0 thì $f(x)$ liên tục tại x_0
4. Nếu $f(x)$ khả vi trên (a, b) và liên tục trên $[a, b]$ thì có ít nhất một điểm $C \in (a, b)$ để $f'(C) = 0$
5. Nếu $F(x)$ liên tục trên $[a, b]$ thì $f(x)$ khả tích $[a, b]$

Câu II: 1. Tìm giới hạn $\lim_{x \rightarrow \infty} x \arccot x$

$$2. \text{Tìm vi phân toàn phần của hàm số: } z = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

Câu III: một xn sx đq 2 loại sp. Biết hàm cầu 2 loại sp và tổng chi phí:

$$Q_{D1} = 40 - 2P_1 + P_2; Q_{D2} = 70 + P_1 - P_2; C = 10Q_1 + 20Q_2 + 10$$

1. Tìm mức sản lượng để xn có lợi nhuận tối đa
2. Tìm mức sản lượng để xn có lợi nhuận tối đa với dk $C=610$

Câu IV: Tìm nghiệm tổng quát và nghiệm thỏa mãn dk ban đầu của pt vi phân:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + 2y = 4x + 2 \quad \begin{cases} y(0) = 2 \\ y'(0) = -1 \end{cases}$$

@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@

Đề thi môn giải tích khóa 28 (đề 1) tg 90'

Câu I: các mệnh đề sau mệnh đề nào đúng mệnh đề nào sai giải thích vì sao?

1. Nếu hàm 2 biến có các (mệnh đề) đạo hàm riêng bằng không tại (x_0, y_0) thì đạt cực trị tại (x_0, y_0)
2. Nếu hàm $f(x)$ liên tục trên $[a, b]$ và có $f(a)=a$; $f(b)=b$ thì có ít nhất 1 điểm $C \in (a, b)$ để $f'(C)=1$
3. Nếu hàm số f bị chặn trên $[a, b]$ thì $f(x)$ liên tục trên $[a, b]$
4. Nếu hs $f(x, y)$ xác định tại (x_0, y_0) thì f liên tục tại (x_0, y_0)
5. Pt vi phân: $y'' + ay' + by = cx + d$ với a, b, c, d là hằng số luôn có 1 nghiệm dạng $y = kx + m$

Câu II:

1. Tìm vi phân toàn phần của hs sau:

$$u = \sqrt{1 + x^2 + y^2 + z^2}$$

2. tìm MPPK và MDP1 nếu biết hs sx:

$$Q = A[\delta \cdot K^{-P} + (1 - \delta)L^{-P}]^{1/P} \quad \text{trong đó } A > 0 \text{ và } \delta, P \text{ là những hằng số.}$$

Câu III: Một xn sx đq 1 loại sp. Biết hàm cầu và hàm chi phí sx là: $Q_D = 2800 - 1/2P$, $C = Q^2 + 2000Q + 100$

1. Xác định mức thuế t định trên 1 đơn vị sp để thu dc của xn nhiều thuế nhất.
2. Xác định mức sản lượng để chi phí trung bình nhỏ nhất.

Câu IV: Tính các tích phân sau:

$$1. \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} \cdot \arctan x \cdot dx \quad 2. \int_0^2 \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} dx$$

@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@

Đề thi môn giải tích khóa 28 (đề 2) tg 90'

Câu I: Các mệnh đề sau mệnh đề nào đúng mệnh đề nào sai, giải thích vì sao?

1. Nếu hàm hai biến biên có đạo hàm riêng bằng không tại (x_0, y_0) thì đạt cực trị tại (x_0, y_0) .
2. Nếu hàm $f(x)$ liên tục trên $[a, b]$ và có $f(a)=a$, $f(b)=b$ thì có ít nhất 1 điểm $C \in (a, b)$ để $f'(C) = 1$.
3. Nếu hs f bị chặn trên $[a, b]$ thì f liên tục trên $[a, b]$.
4. Nếu hs $f(x, y)$ xác định tại (x_0, y_0) thì f liên tục tại (x_0, y_0)
5. Nếu $f(x, y)$ đạt cực đại tại (x_0, y_0) thì:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = 0$$

Câu II:

1. Tìm vi phân toàn phần của hs sau: $u = \ln(1 + x^2 + y^2 + z^2)$
2. Tìm các hệ số cơ giản: ϵ_{CP} & ϵ_{CQ} : Nếu $C = \sqrt{A \cdot Q^2 + B}$ trong đó $A > 0$ và B là hằng số.

Câu III: Một xn sx đq 1 loại sp. Biết hàm cầu và hàm chi phí sx: $Q_D = 4800 - 1/3P$; $C = Q^2 + 4000Q + 225$

1. Xác định mức thuế t định trên một đơn vị sp để thu được của xn nhiều thuế nhất.
2. Xác định mức sản lượng để chi phí trung bình nhỏ nhất.

Câu IV: Tính các tích phân sau:

$$1. \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1) \cdot \sqrt{2x+1}} \quad 2. \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^4} \cdot \ln x \cdot dx$$

@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@

Đề thi môn giải tích khóa 29 tg 90'

Câu I: trong các mệnh đề sau mệnh đề nào đúng, mệnh đề sai, vì sao?

1. Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b$ thì $f(x_0) = b$.
2. Nếu hs f liên tục trên (a, b) thì f bị chặn trên (a, b) .
3. Nếu $f(x, y)$ đạt cực đại tại (x_0, y_0) thì $f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$ cho mọi điểm (x, y) .
4. Nếu $f(x)$ xác định trên $[a, b]$ và bị chặn trên $[a, b]$ thì khả tích trên $[a, b]$.
5. Nếu $F(x)$ xác định trên $[a, b]$ và $F'(x) > 0$ $x \in (a, b)$ thì $f(x) > f(a)$.

Câu II:

Cho $f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ ax + b & \text{khi } x = 0 \end{cases}$

1. Tìm b để f liên tục tại x=0.

2. Tìm a, b để f khả vi tại x=0.

Câu III: Một người định sử dụng hết 99 đơn vị tiền để mua hai loại hàng. Biết giá bán 2 loại hàng trên $P_x = 5$, $P_y = 3$, và hàm hữu dụng là $U(x, y) = (x+6)(y+7)$

Dùng phương pháp nhân tử Lagrange tìm khối lượng mỗi loại hàng trên người đó sẽ mua để có giá trị sử dụng lớn nhất

Câu IV: Tìm nghiệm tổng quát của pt vi phân $y'' + 3y' + 2y = (2x+4)e^{-x}$. Thỏa đk ban đầu: $y(0) = 2$, $y'(0) = -1$.

@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@

Đề thi môn giải tích khóa 30 tg 90'

Câu I: Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào đúng, mệnh đề sai, vì sao?

1. Nếu hàm số $f(x)$ bị chặn trên $[a, b]$ thì f liên tục trên $[a, b]$
2. Nếu hàm số $f(x)$ khả tích trên $[a, b]$ thì $f(x)$ khả vi trên $[a, b]$
3. Nếu $f(x, y)$ đạt cực đại tại (x_0, y_0) thì $f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$ cho mọi điểm (x, y) .
4. Nếu $f(x, y)$ có đạo hàm riêng liên tục thì f liên tục.
5. Nếu f bị chặn trên $[a, b]$ thì f có tích phân xác định trên $[a, b]$.

Câu II: Tính các tích phân sau:

1. $\int_0^{+\infty} e^{-x} \cdot x^3 dx$

2. $\int_1^2 x \ln^2 x dx$

Câu III: Một xn sx đq 1 loại sp. Biết hàm cầu và hàm chi phí sx: $Q_D = 3600 - 1/4P$; $C = Q^2 + 3000Q + 250$

1. Xác định mức thuế t định trên một đơn vị sp để thu được của xn nhiều thuế nhất.
2. Xác định mức sản lượng để chi phí trung bình nhỏ nhất.

Câu IV: Tính Pt vi phân sau: $y' + y \cdot \cot x = 5e^{\cos x}$. Với đk: $y(\pi/2) = -4$

@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@

Đề thi môn giải tích khóa 31 tg 90'

Câu I: Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào đúng, mệnh đề sai, vì sao?

1. Nếu hàm $f(x)$ xác định trên $[a, b]$ có $f(a) \cdot f(b) < 0$ thì có ít nhất 1 điểm $C \in (a, b)$ để $f(C) = 0$
2. Hàm số liên tục tại điểm nào thì có giới hạn tại điểm đó.
3. Hàm số liên tục tại x_0 thì có đạo hàm tại x_0 .
4. Nếu $f(x)$ khả tích trên $[a, b]$ thì $f(x)$ liên tục trên $[a, b]$
5. Nếu $y_1(x)$ và $y_2(x)$ là 2 nghiệm của phương trình: $y'' + ay' + by = 0$ thì nghiệm tổng quát của pt là:

$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$

Câu II: một người tiêu dùng định sử dụng hết 85 triệu đồng để mua 2 loại hàng hóa: đơn giá: $P_x = 7$ triệu; $P_y = 9$ triệu. Hàm hữu dụng $U = (2x+5)(y+3)$

Tìm khối lượng mỗi loại hàng người đó sẽ mua có giá trị sử dụng lớn nhất.

Câu III: 1. Tính các tích phân sau:

1. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 6x + 8}$

2. $\int_1^2 \frac{x^2 dx}{\sqrt{4-x^2}}$

2. Tìm vi phân toàn phần pt sau:

$f(x, y) = e^{x-y} + \cos(x^2 - y^2)$

Câu IV: Tính Pt vi phân sau: $y'' - (y')^2 + 9 = 0$

Đề thi môn đại số tuyến tính

Đề 1_K22

- Câu 1:** Các mệnh đề sau mệnh đề nào đúng, mệnh đề nào sai? Giải thích?
1. nếu $A_1, A_2, \dots, A_m$ là một hệ vectơ độc lập tuyến tính (dltt) trong R^n thì $m > n$
 2. số vectơ trong mọi hệ vectơ dltt trong R_n đều bằng nhau
 3. cho ma trận A thì $\det(A \cdot A^T) = \det A \cdot \det A^T$
 4. nếu A là ma trận vuông cấp m, n thì hạng $r(A) = \min(m, n)$
 5. nếu A, B là ma trận vuông cấp n thì $(A, B)^T = A^T \cdot B^T$

Câu 2: cho ma trận vuông A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 3 \\ -1 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & (m+2) & 2 \\ 0 & 1 & 7 & (m+2) \end{pmatrix}$$

1. biện luận theo m hạng của ma trận A
2. khi $m = 1$, hãy tìm A^{-1}

Câu 3: cho hệ hai phương trình

$$1 \begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 0 & (I) \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 4x_1 + 3x_2 + 7x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 - 4x_3 + 3x_4 = 1 \\ 7x_1 + 4x_2 - 6x_3 + 9x_4 = m \end{cases}$$

1. tìm một hệ nghiệm cơ bản của hệ phương trình (I)
2. với giá trị nào của m thì hệ phương trình trên có nghiệm chung.

Câu 4: trong hệ thống Input - Output mở có 3 ngành kinh tế. Biết ma trận hệ số đầu vào:

$$A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 & 0,4 \\ 0,3 & 0,2 & 0,3 \\ 0,4 & 0,3 & 0,1 \end{pmatrix}$$

$D =$

và yêu cầu của ngành kinh tế mở đối với ba ngành kinh tế trên là $(10, 2, 48)$

1. tính sản lượng 3 ngành kinh tế trên
2. nếu áp dụng kỹ thuật mới, ngành kinh tế thứ nhất tiết kiệm 50% nguyên vật liệu cho sản xuất, còn chi phí cho sản xuất một sản phẩm của hai ngành còn lại và yêu cầu của ngành kinh tế mở không thay đổi thì sản lượng của 3 ngành kinh tế trên sẽ là bao nhiêu.

Đề 2_K22

Câu 1: các mệnh đề sau mệnh đề nào đúng, mệnh đề nào sai, giải thích?

1. nếu A là ma trận vuông cấp 3 và $\det(A) = 2$ thì $\det(2A) = 4$
2. nếu hệ tuyến tính n ẩn có hạng của ma trận hệ số nhỏ hơn n ($r(A) < n$) thì hệ phương trình có vô số nghiệm.
3. nếu A là ma trận vuông cấp n có tất cả k giá trị riêng, khác nhau, với $k < n$, thì A không thể chéo hoá được

4. nếu $A = (a_{ij})$ là ma trận hệ số đầu vào trong mô hình Input – output mở thì $a_{11} + a_{12} + a_{13} < 1$
5. nếu một hệ vector có một hệ con đltt thì hệ vector đó đltt

Câu 2: cho các vector

$$A_1 = (2, 2, m-1)$$

$$A_2 = (-2, m-2, m)$$

$$A_3 = (m, 2, 1)$$

- với giá trị nào của m thì 3 vector trên tạo thành cơ sở của R^3
- với giá trị nào của m thì không gian con sinh bởi 3 vector có số chiều là 2

Câu 3: cho hai hệ phương trình

$$\begin{cases} 4x - 3x + x + 2x = 0 \\ 3x + 2x + 2x + 3x = 0 \\ 2x + 7x + 3x + 4x = 0 \end{cases} \quad (I)$$

$$\begin{cases} 3x - 4x + x + 2x = -2 \\ 9x - 6x + 4x + 7x = m \end{cases}$$

- tìm một hệ nghiệm cơ bản của hệ phương trình (I)
- với giá trị nào của m thì 2 hệ phương trình trên có nghiệm chung?

Câu 4: trong hệ thống input – output mở có 3 ngành kinh tế. Biết ma trận đầu vào

$$\begin{bmatrix} 0,1 & 0,4 & 0,3 \\ 0,4 & 0,2 & 0,3 \\ 0,3 & 0,2 & 0,1 \end{bmatrix}$$

và yêu cầu ngành kinh tế mở đối với 3 ngành kinh tế trên là $(49; 3; 55)$

- tính sản lượng 3 ngành kinh tế trên
- nếu như nhờ áp dụng kĩ thuật mới, ngành kinh tế thứ 2 tiết kiệm được 50% nguyên vật cho sản xuất, còn chi phí cho sản xuất một sản phẩm của hai ngành còn lại và yêu cầu của ngành kinh tế mở không thay đổi thì sản lượng của 3 ngành kinh tế trên sẽ là bao nhiêu

Đề 1_K23

Câu 1: các mệnh đề sau đề nào đúng, mệnh đề nào sai, giải thích?

- nếu $A_1, A_2, \dots, A_m$ là hệ vector trong R^n và tồn tại m số thực $x_1, x_2, \dots, x_m$ để $x_1 A_1 + x_2 A_2 + \dots + x_m A_m = 0$ thì hệ vector trên phụ thuộc tuyến tính.
- nếu hệ vector gồm m vector trong R^n có hạng bằng m thì hệ phụ thuộc tuyến tính
- 0_{ST} là ma trận không cấp ST và A là ma trận cấp $m.n$ thì $0_{km} A = A; 0_{km} = 0$
- ma trận A có nghịch đảo khi và chỉ khi A là ma trận vuông
- nếu A, B là ma trận cùng cấp và không suy biến thì $(A.B)^{-1} = A^{-1} . B^{-1}$

Câu 2: cho hệ vector $A_1 = (1; 2; -1; 2; 0); A_2 = (2; 3; 4; 1; 2); A_3 = (0; 2; -12; 6; -4)$
 $A_4 = (-1; 1; m; 7; n)$ trong R^5

- tìm hệ vector độc lập tuyến tính cực đại cùng hệ A_1, A_2, A_3
- tìm m, n để $r(A_1, A_2, A_3) = r(A_1, A_2, A_3, A_4)$

Câu 3: cho 2 ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

- tìm A^{-1}

2. tìm X, Y để $A^T(X + Y) = B^T$
 $(X - Y)A = A$

Câu 4: xét thị trường 3 loại hàng. Biết hàm cung và hàm cầu là.

$$\begin{aligned} Q_{S1} &= 9P_1 - P_3 - 170 \\ Q_{S2} &= 12P_2 - P_3 - 500 \\ Q_{S3} &= -P_1 - P_2 + 10P_3 - 510 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_{D1} &= 1880 - 8P_1 + P_2 + P_3 \\ Q_{D2} &= 2070 + P_1 - 10P_2 + P_3 \\ Q_{D3} &= 2140 + P_2 - 8P_3 \end{aligned}$$

1 tìm điểm cân bằng thị trường

2. nếu cứ trong 1 đơn vị thời gian, người ta xuất đi 990 đơn vị loại hàng thứ nhất; 740 đơn vị loại hàng thứ 2 và nhập về 1170 đơn vị loại hàng thứ 3 thì giá các mặt hàng tại điểm cân bằng sẽ là bao nhiêu.

Đề 1_K24

Câu 1: Mệnh đề nào đúng, mệnh đề nào sai, giải thích?

1. Nếu một hệ vectơ phụ thuộc tuyến tính thì mọi hệ con của nó cũng phụ thuộc tuyến tính
2. Mọi không gian con của R^n đều có ít nhất một cơ sở
3. Hạng của hệ vectơ trong R^n bằng số chiều của không gian con sinh bởi hệ vectơ đó
4. Cho A, B là 2 ma trận vuông đồng dạng. Nếu $\det A = 0$ thì $\det B = 0$
5. Mọi hệ phương trình tuyến tính có hạng của ma trận hệ số bằng hạng của ma trận mở rộng là hệ Cramer

Câu 2: cho hệ vectơ $A_1 = (2; 1; 3; 4); A_2 = (-1; -1; 4; 2); A_3 = (1; -1; 18; 14)$
 $A_4 = (-1; -3; 26; m)$ trong R^4

1. hệ vectơ A_1, A_2, A_3 độc lập hay phụ thuộc tuyến tính?
2. với giá trị nào của m thì A_4 là tổ hợp tuyến tính của A_1, A_2, A_3 . Hãy biểu diễn A_4 là tổ hợp tuyến tính của A_1, A_2, A_3 . Hãy biểu diễn A_4 qua A_1, A_2, A_3 ứng với giá trị của m vừa tìm được cách biểu diễn trên có duy nhất hay không.

Câu 3: xét 1 thị trường 3 loại hàng có các hàm cung và hàm cầu như sau.

$$Q_{S1} = 8P_1 - P_2 - 35$$

$$Q_{D1} = -4P_1 + P_2 + 155$$

$$Q_{S2} = 6P_2 - P_3 - 20$$

$$Q_{D2} = -5P_2 + P_3 + 195$$

$$Q_{S3} = -P_2 + 5P_3 - 25$$

$$Q_{D3} = -2P_3 + 160$$

Hãy xác định giá các mặt hàng tại điểm cân bằng thị trường

Câu 4: chéo hoá ma trận sau

$$\begin{pmatrix} -5 & -5 & 7 \\ 4 & 5 & -4 \\ -4 & -3 & 6 \end{pmatrix}$$

Đề 2_K24

Câu 1: mệnh đề đúng, sai? giải thích?

1. nếu hệ phương trình tuyến tính có hạng của ma trận hệ số n thì hệ có nghiệm duy nhất
2. nếu ma trận A có nghịch đảo thì A có trị riêng bằng không
3. nếu A, B là 2 ma trận vuông cùng cấp không suy biến thì $(B \cdot A \cdot B \cdot A) = \det(A)$

4. nếu A là ma trận vuông và không có số thực nào là giá trị riêng của A thì A không suy biến
5. nếu một hệ vector phụ thuộc tuyến tính thì hạng của hệ vector bằng số vector trong hệ

Câu 2: cho hệ vector $A_1 = (1, 2, 3, -1)$; $A_2 = (1, -3, -2, 4)$; $A_3 = (-1, 2, 1, -3)$; $A_4 = (-1, 2, 1, m)$ trong hệ $\mathbb{R}^4$

1. hệ vector A_1, A_2, A_3 độc lập hay phụ thuộc tuyến tính
2. với giá trị nào của m thì A_4 là tổ hợp tuyến tính của A_1, A_2, A_3 . Hãy biểu diễn A_4 qua A_1, A_2, A_3 ứng với giá trị m vừa tìm. Cách biểu diễn trên có duy nhất không.

Câu 3: xét 1 thị trường 3 loại hàng có các hàm cung và hàm cầu như :

$$Q_{S1} = 16P_1 - 2P_2 - P_3 - 40$$

$$Q_{D1} = -5P_1 + P_2 + P_3 + 195$$

$$Q_{S2} = -2P_1 + 11P_2 - P_3 - 30$$

$$Q_{D2} = 2P_1 - 5P_2 + 220$$

$$Q_{S3} = -P_1 - 2P_2 + 18P_3 - 25$$

$$Q_{D3} = 2P_1 + P_2 - 9P_3 + 140$$

Hãy xác định giá các mặt hàng tại điểm cân bằng thị trường

Câu 4 : chéo hoá ma trận sau

$$\begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Đề 1_K25

Câu 1: mệnh đề nào đúng; sai? Giải thích?

1. hạng của 1 hệ vector đltt cực đại của 1 hệ vector luôn luôn nhỏ hơn hạng của hệ vector đó.
2. cho U, V, Z là 3 cơ sở trong $\mathbb{R}^n$, T_1, T_2, T_3 lần lượt là những ma trận đổi cơ sở từ $U \rightarrow V$; từ $V \rightarrow Z$; từ $Z \rightarrow U$. Nếu $\det T_1 = 6$; $\det T_2 = 3$; thì $\det T_3 = 18$.
3. mọi ma trận vuông cấp n đều có thể chéo hoá được
4. nếu ma trận đường chéo có định thức bằng 1 thì ma trận đó là ma trận đơn vị
5. nếu hệ phương trình tuyến tính n ẩn có hạng của ma trận hệ số bằng hạng của ma trận hệ số mở rộng và bằng n thì là hệ Cramer

Câu 2: cho ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & m & 0 \\ 3 & 3 & m \end{pmatrix}$$

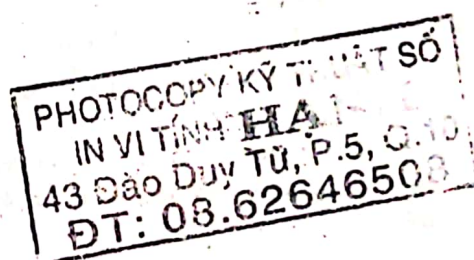
$$B = A \cdot A^T$$

1. tìm nghịch đảo của B khi $m = 5$
2. với giá trị nào của m thì B không có nghịch đảo

Câu 3: trong mô hình input_output mở biết ma trận hệ số đầu vào là

$$A = \begin{pmatrix} 0,2 & m & 0,3 \\ 0,3 & 0,1 & 0,2 \\ 0,2 & 0,3 & 0,2 \end{pmatrix}$$

1. tìm yêu cầu của ngành kinh tế mở khi $m = 0,3$ biết sản lượng của 3 ngành kinh tế là $(300; 250; 220)$



2. tìm m biết rằng khi sản lượng của 3 ngành (400; 400; 300) thì ngành kinh tế thứ nhất cung cấp cho ngành kinh tế mở là 130

Câu 4: chéo hoá ma trận sau

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -3 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Đề 26:

Câu 1: cho các vector: $A_1 = (m, 1, 1)$; $A_2 = (1, m, 1)$; $A_3 = (1, 1, m)$ trong R^3

1. với giá trị nào của m thì 3 vector trên tạo thành cơ sở của R^3
2. với giá trị nào của m thì không gian con sinh bởi 3 vector trên có số chiều bằng 2.

Câu 2: cho ma trận vuông

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & m \\ 0 & 1 & m & 1 \\ -1 & 0 & m-1 & 1-m \\ 0 & -1 & 1-m & m-1 \end{pmatrix}$$

1. biện luận theo m hạng của ma trận A
2. khi $m = 2$ hãy tìm A^{-1}

Câu 3: cho hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y + (m+1)z = 2 \\ x + my + 2z = a \\ x + (m+1)y + (m+3)z = b \end{cases}$$

1. với giá trị nào của m thì hệ phương trình trên có 1 nghiệm duy nhất
2. tìm a, b để hệ trên có nghiệm với mọi m

Câu 4: xét mô hình input-output mở gồm 3 ngành kinh tế với hệ số đầu vào:

$$A = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,3 & 0,2 \\ 0,4 & 0,2 & 0,1 \\ 0,2 & 0,3 & 0,3 \end{pmatrix}$$

1. tìm mức sản lượng của 3 ngành kinh tế mở đối với 3 ngành kinh tế trên là (110, 52, 90)

2. Do cải tiến kỹ thuật ở ngành 1 tiết kiệm được 25% nguyên liệu của ngành 2; còn yêu cầu của ngành kinh tế trên là (124; 66; 100). Tìm mức sản lượng của 3 ngành.

Đề 27:

Câu 1: cho hệ vector $A_1 = (3, 1, 0, 2, 3)$; $A_2 = (1, 2, 3, 2, 3)$; $A_3 = (3, -4, -9, 0, -5)$; $A_4 = (4, -2, -6, 2, -2)$ trong R^5

1. gọi X là không gian vector sinh bởi hệ vector trên. Tìm 1 cơ sở và số chiều X
2. tìm tọa độ của A_1, A_2, A_3, A_4 theo cơ sở mình tìm được

Câu 2: cho ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. tìm A^{-1}

2. tìm $A^{-1} \cdot (A^T)^3 \cdot (A^{-1})^T \cdot (A^{-1})^T$

Câu 3: cho 4 phương trình

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \quad (1)$$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \quad (2)$$

$$7x_1 + 12x_2 + 11x_3 + x_4 = 0 \quad (3)$$

$$4x_1 + mx_2 - 3x_3 + mx_4 = 0 \quad (4)$$

1. tìm 1 cơ sở của không gian nghiệm của hệ phương trình gồm 3 phương trình (1, 2, 3)
2. với giá trị nào của m, n; cơ sở tìm được trong câu 1 cũng là cơ sở của không gian nghiệm của hệ (1), (2), (3), (4).

Câu 4: xét mô hình input-output mở gồm 3 ngành kinh tế. Biết ma trận hệ số đầu vào

$$A = \begin{bmatrix} 0,2 & 0,4 & 0,3 \\ 0,3 & 0,2 & 0,2 \\ 0,2 & 0,2 & 0,1 \end{bmatrix}$$

yêu cầu của ngành kinh tế mở đối với 3 ngành trên là d_1, d_2, d_3 với $d_j > 0$.

1. tìm mức sản lượng của 3 ngành kinh tế trên nếu $q_1 = 22, q_2 = 58, q_3 = 32$
2. nếu ngành kinh tế mở yêu cầu ngành kinh tế thứ 2 cung cấp tăng thêm khối lượng sản phẩm trị giá 1 đơn vị tiền tệ, khi đó sản lượng (tính ra tiền) các ngành kinh tế thứ 1, 2, 3 phải tăng thêm bao nhiêu?

Đề 28:

Câu 1: mệnh đề nào đúng, sai? Giải thích?

1. nếu một hệ vector trong R^n có 1 hệ con đltt thì hệ vector đó đltt.
2. cho 1 hệ vector trong R^n . một hệ con được gọi là hệ vector đltt cực đại của hệ vector đã cho nếu mọi vector đã cho là tổ hợp tuyến tính của hệ con
3. nếu A là ma trận vuông cấp n thì hạng của A bằng n
4. mọi hệ phương trình tuyến tính có số ẩn lớn hơn số phương trình đều có vô số nghiệm
5. nếu ma trận vuông cấp n, A chéo hoá được thì A có giá trị riêng khác nhau.

Câu 2: cho hệ vector U gồm : $a = (1, 1, 2, 1); b = (2, 5, 1, 3); c = (5, 8, 7, 6); d = (3, 2, 2, 3)$ trong R^4 . Tìm 1 hệ vector đltt cực đại của hệ vector trên và biểu diễn các vector còn lại của hệ qua hệ vector đltt cực đại đó.

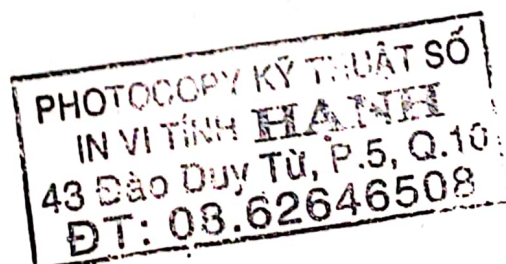
Câu 3: trong mô hình input-output biết ma trận hệ số đầu vào

$$A = \begin{bmatrix} 0,1 & 0,2 & 0,2 \\ 0,2 & 0,1 & 0,1 \\ 0,2 & 0,2 & 0,1 \end{bmatrix}$$

1. tìm nghịch đảo của ma trận $I_3 - A$
2. tìm sản lượng của 3 ngành kinh tế nếu biết yêu cầu của ngành kinh tế mở là $D = (204; 202; 226)$

Câu 4: chéo hoá ma trận sau

$$\begin{bmatrix} -2 & -8 & -1 \\ 1 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$



Đề 29

Câu 1: mệnh đề nào đúng, sai? giải thích?

1. nếu A, B là 2 ma trận vuông cấp n thì $(AB)^T = A^T \cdot B^T$
2. nếu A là ma trận của một phép biến đổi tuyến tính của R^n thì A là ma trận vuông không suy biến
3. trong một hệ vectơ phụ thuộc tuyến tính mọi hệ vectơ là tổ hợp tuyến tính của những vectơ còn lại
4. nếu A là ma trận vuông chéo hoá được thì A có n giá trị riêng đôi 1 khác nhau
5. mọi hệ n vectơ trong R^n đều là một cơ sở của R^n

Câu 2: cho $V = \{ X = (a, b, 2a - b, -3a + 2b) \mid a, b \in R \}$

1. chứng minh rằng V là 1 không gian con của R^4
2. tìm 1 cơ sở và số chiều của V

Câu 3: trong mô hình input-output biết ma trận hệ số đầu vào và yêu cầu của ngành kinh tế mở

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0,1 & 0,3 \\ 0,2 & 0 & 0,1 \\ 0,2 & 0,3 & 0 \end{bmatrix}; \quad D1 = \begin{bmatrix} 127 \\ 111 \\ 152 \end{bmatrix}$$

1. tìm nghịch đảo của ma trận $I_3 - A$
2. tìm sản lượng của 3 ngành kinh tế sản xuất

Câu 4: tìm hệ vectơ đltt cực đại của hệ

$$U_1 = (1, -3, -1)$$

$$U_2 = (-2, 1, 7)$$

$$U_3 = (-1, 9, -5)$$

Một số đề tham khảo

Hướng Dẫn Giải Đề Thi

Giai đề số 2 - K22

Câu I.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1 - x}{x} & , x \neq 0 \\ a & , x = 0 \end{cases}$$

1. Tìm a để $f(x)$ liên tục tại $x = 0$

Để $f(x)$ liên tục tại x_0 thì $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ xác định hữu hạn

$$\text{C} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{e^x - 1 - x}{x} - a}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x - ax}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - a}{2x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2} \quad (\text{hoàn toàn xác định hữu hạn})$$

Để $f(x)$ liên tục $x = 0$ thì $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x_0)$

$$\ast \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{1} = 0 \quad \text{mà } f(x) = a$$

Vậy $a = 0$ thì $f(x)$ liên tục tại $x = 0$

2. Tìm $f'(0)$ ứng với a vừa tìm được

$$\text{với } a = 0 \Rightarrow f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1 - x}{x} & ; x \neq 0 \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$$

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2}$$

Vậy với $a = 0$ thì $f(x)$ liên tục và $f'(0) = \frac{1}{2}$

Câu II. Tính các tích phân

$$I = \int_0^{+\infty} x^2 \cdot e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b x^2 \cdot e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} I' \quad \text{Ta phải tính } I'$$

$$I' = \int_0^b x^2 e^{-x} dx \quad \text{Đặt } \begin{cases} u = x^2 \\ du = 2x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2x dx \\ u = -e^{-x} \end{cases}$$

$$\Rightarrow I' = -x^2 e^{-x} + \int e^{-x} \cdot 2x dx = -x^2 e^{-x} + 2J \quad \text{Ta phải tính } J$$

$$J = \int_0^b x e^{-x} dx \quad \text{Đặt } \begin{cases} u = x \\ du = dx \end{cases} \rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -e^{-x} \end{cases}$$

$$J = -x e^{-x} \Big|_0^b - \int_0^b e^{-x} dx = [-x e^{-x} - e^{-x}] \Big|_0^b$$

$$\Rightarrow I' = [-x^2 e^{-x} - 2x e^{-x} - 2e^{-x} + C] \Big|_0^b = -b^2 e^{-b} - 2b e^{-b} - 2e^{-b} - 2$$

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} I' = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[-\frac{b^2}{e^b} - \frac{2b}{e^b} - \frac{2}{e^b} - 2 \right] = -2$$

Vậy $\int_0^{+\infty} -x^2 \cdot e^{-x} dx = -2$

Câu III: $Q_1 = 30 - \frac{1}{3} P_1$ (1); $Q_2 = 47.5 - \frac{1}{2} P_2$ (2); $Q_3 = 54 - \frac{1}{5} P_3$ (3)
 Tìm mức sản lượng để xí nghiệp đạt lợi nhuận tối đa

1. $C(Q) = 15 - 30Q$

Để π_{max} thì $\pi' = 0$, mà $\pi = R - C$ (I)

Doanh thu $R = \frac{P_1 Q_1}{R_1} + \frac{P_2 Q_2}{R_2} + \frac{P_3 Q_3}{R_3}$ (II)

Từ (1) $P_1 = 90 - 3Q_1$, từ (2) $P_2 = 190 - 4Q_2$, $P_3 = 270 - 5Q_3$

Thế P_1, P_2, P_3 vào (II) vào doanh thu theo từng thị trường (R1, R2, R3)

$\rightarrow \pi_1, \pi_2, \pi_3$. Với điều kiện (I). Ta có: $Q_1 = 20, Q_2 = 27.5, Q_3 = 30$

Và $P_1 = 30, P_2 = 80, P_3 = 120$

2. $C(x) = 15 + 30x + x^2$

Giải tổng từ câu (1)

Câu IV: Giải PTV $y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{e^x + 1}$ (1)

Ta có PT đặc trưng: $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -2 \\ \lambda_2 = -1 \end{cases} \rightarrow \bar{y} = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x}$ (với C_1, C_2 là nghiệm của hệ PT)

$\begin{cases} C_1' e^{-2x} + C_2' e^{-x} = 0 \\ -C_1' e^{-2x} - 2C_2' e^{-x} = \frac{1}{e^x + 1} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} C_1' = \frac{e^x}{e^x + 1} \\ C_2' = \frac{-e^{2x}}{e^x + 1} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} C_1 = \ln|e^x + 1| + \bar{C}_1 \\ C_2 = \ln|e^x + 1| - e^x + \bar{C}_2 \end{cases}$

Vậy nghiệm của PTV $y(x) = e^{2x} \ln|e^x + 1| - e^2 + e^{-x} \ln|e^x + 1| + \bar{C}_1 e^{-2x} + \bar{C}_2 e^{-x}$

Câu Đề Số 1 - K22

Câu I. Tương tự đề số 2 (các bạn tự giải)

Đáp số: 1/ $a = 0$; 2/ $f'(0) = -2$

Câu II. Tính tích phân

$I = \int_0^{+\infty} \frac{x dx}{x^4 + 5x^2 + 6}$

$I = \int_0^{+\infty} \frac{x dx}{(x^2 + 3)(x^2 + 2)} = \int_0^{+\infty} \left(\frac{x}{x^2 + 2} - \frac{x}{x^2 + 3} \right) dx = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{x dx}{x^2 + 2}$

$- \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{x dx}{x^2 + 3}$. Tính $\int_0^x \frac{x dx}{x^2 + 2} = \frac{1}{2} \int_0^x \frac{2x dx}{x^2 + 2} = \frac{1}{2} \ln|x^2 + 2| \Big|_0^x = \frac{1}{2} \ln|x^2 + 2|$

* Tính $\int_0^\beta \frac{x dx}{x^2 + 3} = \frac{1}{2} \int_0^\beta \frac{2x dx}{x^2 + 3} = \frac{1}{2} \ln|x^2 + 3| \Big|_0^\beta = \frac{1}{2} \ln|\beta^2 + 3| - \frac{1}{2} \ln 3$

Thay vào ta có: $\int_0^{+\infty} \frac{x dx}{x^4 + 5x^2 + 6} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\ln \left| \frac{x^2 + 2}{x^2 + 3} \right| \right] = \frac{1}{2} \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\ln \frac{x^2 + 2}{x^2 + 3} \right]$

$= -\ln \frac{2}{3} = -\frac{1}{2} \ln \frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \left[1 - \ln \frac{2}{3} \right]$

Câu III: $Q_1 = \frac{1}{7} (29C - 3P_1 + 2P_2)$; $Q_2 = \frac{1}{7} (E5C - 3P_2 + P_1)$

$$C(Q_1, Q_2) = Q_1^2 + Q_1 Q_2 + Q_2^2$$

1. Tìm mức sản lượng để công ty có π max

Từ Q_1, Q_2 ta có:

$$\begin{cases} 2P_1 + P_2 = 940 - 7Q_1 - 7Q_2 \\ 4P_1 - 5P_2 = 360 - 7Q_1 + 7Q_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_1 = 310 - 3Q_1 - 2Q_2 \\ P_2 = 320 - Q_1 - 3Q_2 \end{cases} \quad (1)$$

Tổng doanh thu: $R = P_1 Q_1 + P_2 Q_2$. Từ (1) ta có:

$$R = 310 Q_1 - 3Q_1^2 - 3Q_1 Q_2 + 320 Q_2 - 3Q_2^2$$

$$\text{Vậy } \begin{cases} R'_1 = 310 - 6Q_1 - 3Q_2 \\ C'_1 = 2Q_1 + Q_2 \end{cases} ; \begin{cases} R'_2 = -3Q_1 + 320 - 6Q_2 \\ C'_2 = Q_1 + 2Q_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \pi'_1 = 310 - 8Q_1 - 4Q_2 ; \pi'_2 = 320 - 4Q_1 - 8Q_2$$

Để lợi nhuận đạt cực đại:

$$\begin{cases} \pi'_1 = 0 \\ \pi'_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 310 - 8Q_1 - 4Q_2 = 0 \\ 320 - 4Q_1 - 8Q_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Q_1 = 25 \\ Q_2 = 27.5 \end{cases}$$

Vậy công ty muốn đạt lợi nhuận tối đa cho 2 thị trường thì mức sản lượng trên mỗi thị trường là:

$$\begin{cases} Q_1 = 25 \\ Q_2 = 27.5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_1 = 180 \\ P_2 = 212.5 \end{cases}$$

2. Thuế suất định thêm 1 sản phẩm của loại hàng hóa thứ I, $t_1 = 26$ và loại hàng hóa thứ II: $t_2 = 24$

Vậy lúc này tổng chi phí là: $C(Q_1, Q_2) = Q_1^2 + Q_1 Q_2 + Q_2^2 + 26Q_1 + 24Q_2$

Câu D. Bài toán tìm cực trị sẽ được hướng dẫn rõ ở những bài sau:

Ticù ðề số 1 - K23

Câu I. Cho hàm cầu $Q_D = 2500 - 3P$

1. Tìm hệ số co giãn của hàm cầu trên:

$$\text{Ta có hệ số co giãn: } \epsilon_D = \frac{dQ}{dP} \cdot \frac{P}{Q} = \frac{-3P}{2500 - 3P}$$

2. Xác định giá trị tại hàng hoá có giãn.

$$\text{Tại hàng hoá có giãn thì } |\epsilon_D| > 1 \Rightarrow \begin{cases} \epsilon_D > 1 \quad (\text{Loại}) \\ \epsilon_D < -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3P}{3P - 2500} < -1 \Rightarrow P < 416$$

Câu II Cách 1: Bài toán đưa về dạng tìm cực trị của hàm $U = (2x+4)(y+2)$

$$\text{Với điều kiện: } x^2 + y^2 = 36 \Rightarrow y = 9 - \frac{1}{2}x \quad (1)$$

$$U = (2x+4)(9 - \frac{1}{2}x + 2) = (2x+4)(11 - \frac{1}{2}x) \Rightarrow U = -x^2 + 20x + 44$$

$$\Rightarrow \begin{cases} U' = -2x + 20 = 0 \\ U'' = -2 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 10 \\ U_{\max} \end{cases}$$

Vậy khối lượng mỗi loại hàng hoá người đó sẽ mua để có giá trị sử dụng là: $x = 10$ và $y = 4$

Cách 2: Dùng phương pháp nhân tử Lagrange:

Tìm cực trị của hàm $Z = f(x, y)$ với điều kiện $\epsilon(x, y) = 0$

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda \epsilon(x, y) \Rightarrow \begin{cases} F'_x = 0 \\ F'_y = 0 \\ F'_\lambda = 0 \end{cases} \Rightarrow M(x_0, y_0, \lambda)$$

* Lập ma trận Hessian (điều kiện đủ)

Câu III. Tích tích phân

$$1. I = \int_0^{\infty} x^2 \cdot e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b x^2 \cdot e^{-x} dx \quad \text{Đặt } I' = \int_0^b x^2 \cdot e^{-x} dx$$

$$\text{Tính } I' = \int_0^b x^2 \cdot e^{-x} dx \quad \text{Đặt } \begin{cases} u = x^2 \\ dv = e^{-x} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2x \cdot dx \\ v = -e^{-x} \end{cases}$$

$$I' = -x^2 \cdot e^{-x} + 2 \int_0^b e^{-x} \cdot x \cdot dx = -x^2 \cdot e^{-x} + 2J$$

$$\text{Tính } J = \int_0^b e^{-x} \cdot x \cdot dx \quad \text{Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = e^{-x} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -e^{-x} \end{cases}$$

$$J = -x \cdot e^{-x} + \int_0^b e^{-x} dx = [-x \cdot e^{-x} - e^{-x} + C]_0^b$$

$$\text{Vậy } I' = [-x^2 \cdot e^{-x} + 2(-x \cdot e^{-x} - e^{-x})]_0^b \rightarrow I' = -b^2 \cdot e^{-b} - 2b \cdot e^{-b} - 2 \cdot e^{-b} + 2$$

$$\text{Do đó: } I = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b x^2 \cdot e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} [-b^2 \cdot e^{-b} - 2b \cdot e^{-b} - 2 \cdot e^{-b} + 2] = 2 \dots$$

$$2. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})} \quad \text{HD - Phân tích mẫu}$$

- Rút gọn tích phân từng phần.

Câu IV. Giải PTVP. $y'' - 5y' + 6y = x \cdot e^x$

$$\text{PT đặc trưng: } k^2 - 5k + 6 = 0 \rightarrow \begin{cases} k_1 = 3 \\ k_2 = 2 \end{cases}$$

$$\text{Nghiem riêng: } y_1 = e^{3x}; y_2 = e^{2x}$$

$$y = y_1 + y_2 = C_1 \cdot e^{3x} + C_2 \cdot e^{2x}$$

Chai thông tự để $2 - k \cdot 2$.

(Giải đề số 2 - K 23.

Câu I. Cho hàm cầu: $Q_D = 4200 - 2P$

$$1. \text{ Tìm hệ số co giãn: } \epsilon_D = \frac{dQ}{dP} \cdot \frac{P}{Q} = \frac{-2P}{4200 - 2P} \rightarrow \epsilon_D = \frac{-P}{2100 - P}$$

$$2. \text{ Xác định giá trị thì: } |\epsilon_D| > 1$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{-P}{2100 - P} > 1 \text{ (loại)} \right. \\ \left. \frac{-P}{2100 - P} < -1 \rightarrow P > 1050 \right]$$

Câu II. Bài toán đưa về dạng:

Tìm cực trị của $U = (3x+3)(y+2)$ với điều kiện $x+1+y+3=33$

$$\Rightarrow y = \frac{33-x}{3} = 11 - \frac{1}{3}x$$

$$U = (3x+3)(11 - \frac{1}{3}x + 2) = -x^2 + 38x + 39 \rightarrow U' = -2x + 38 \Leftrightarrow x = 19$$

$$U'' = -2 < 0 \Rightarrow U_{\max} \Leftrightarrow x = 19 \text{ và } y = \frac{14}{3}$$

$$\text{Vậy } U_{\max} = (19, \frac{14}{3})$$

Câu III. Tính các tích phân.

$$1. I = \int_0^{\infty} x^2 \cdot e^x \cdot dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b x^2 \cdot e^x \cdot dx$$

$$\text{Tính } I = \int_0^b x^2 \cdot e^x \cdot dx \quad \text{Đặt } \begin{cases} u = x^2 \\ dv = e^x dx \end{cases} \rightarrow \begin{cases} du = 2x \cdot dx \\ v = e^x \end{cases}$$

$$I' = -x^2 \cdot e^{-x} + 2 \int_0^b e^{-x} \cdot x \cdot dx \quad \text{Đặt } J = \int_0^b e^{-x} \cdot x \cdot dx$$

Tính $J = \int_0^b e^{-x} x dx$. Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = e^{-x} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -e^{-x} \end{cases}$

$$J = -x \cdot e^{-x} + \int_0^b e^{-x} dx = [-x \cdot e^{-x} - e^{-x} + C]_0^b$$

$$\rightarrow I' = [x^2 \cdot e^{-x} + 2[-x \cdot e^{-x} - e^{-x} + C]]_0^b = -b^2 \cdot e^{-b} - 2b \cdot e^{-b} - 2e^{-b} + 2$$

$$\cdot \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b x^2 \cdot e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} [-b^2 \cdot e^{-b} - 2b \cdot e^{-b} - 2e^{-b} + 2] = 2$$

2. $K = \int_0^1 \ln^2 x \cdot dx$

110. Tính Tích phân từng phần

Câu IV - Giải PTV

$$y'' + 2y' + 2y = x^2 + 1 \quad (*)$$

e) $y'' + 2y' + 2y = e^{ax} (x^2 + 1)$

PT đặc trưng: $k^2 + 2k + 2 = 0$, $\Delta' = 1 - 2 = -1 = -1^2$

$$k_{1,2} = -1 \pm i$$

Nghiệm riêng $y_1 = e^{-x} \cos x$, $y_2 = e^{-x} \sin x$

$$\bar{y} = y_1 + y_2 = e^{-x} (C_1 \cos x + C_2 \sin x)$$

Giải Đề số 1 - 2024.

Câu I. 1. Sai, vì dãy đơn điệu và bị chặn thì mới có giới hạn.

2. Đúng.

3. Sai. Ví dụ: Hàm $f(x) = |x|$, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$

$$\left[\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1 \end{aligned} \right\} \text{ vì } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \Rightarrow f(x) = |x| \text{ không có đạo hàm tại } x=0$$

4. Sai. Ví dụ $f(x) = y = \frac{1}{x-1}$ là hàm số cấp và xác định trên (1;4)

$\Rightarrow f(x)$ xác định liên tục trên (1;4). Nhưng $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty$

Nên $f(x)$ không bị chặn trên (1;4)

5. Sai. Vì nếu hàm số có đạo hàm tại x_0 thì $f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$. vd: $f(x) = y = \frac{1}{x}$ có đạo hàm tại $x=3$. Khi $f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ $\forall x \neq 3 \Leftrightarrow \frac{1}{x} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{9}(x-3) \Leftrightarrow \frac{3-x}{3x} = \frac{3-x}{9} \Leftrightarrow 3 \neq 9$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{3}, \forall x \neq 3$$

Câu II. $Q_1 = 40 - P_1 + \frac{1}{2} P_2 \quad (*)$

$$Q_2 = 35 + P_1 - P_2 \quad (**)$$

$$C = Q_1^2 + Q_1 Q_2 + Q_2^2 + 7Q_1 + 38Q_2 + 3$$

1. Tìm mức sản lượng để công ty có lợi nhuận

Mức giá được xác định từ hàm cầu $\Rightarrow \begin{cases} P_1 = 115 - 2Q_1 - Q_2 \\ P_2 = 150 - 2Q_1 - 2Q_2 \end{cases}$

$$\text{Doanh thu } R = P_1 Q_1 + P_2 Q_2 = 115Q_1 - 2Q_1^2 - 3Q_1 Q_2 + 150Q_2 - 2Q_2^2$$

$$\text{Lợi nhuận } \pi = R - C; \quad R'_1 = 115 - 4Q_1 - 3Q_2; \quad R'_2 = 150 - 4Q_2 - 3Q_1 \quad S$$

$$C_1' = 2Q_1 + Q_2 + 7; \quad C_2' = Q_1 + 2Q_2 + 38$$

$$\rightarrow \pi_1' = R_1' - C_1' = 108 - 6Q_1 - 4Q_2$$

$$\pi_2' = R_2' - C_2' = 112 - 6Q_2 - 4Q_1$$

$$\begin{cases} \pi_1' = 0 \\ \pi_2' = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 108 - 6Q_1 - 4Q_2 = 0 \\ 112 - 6Q_2 - 4Q_1 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} Q_1 = 10 \\ Q_2 = 12 \end{cases}$$

$$\text{Điều kiện đủ} \begin{cases} \pi_{11}' = -6 \\ \pi_{22}' = -6 \end{cases}; \quad \pi_{12}' = -4$$

Vậy đề có lợi nhuận lớn nhất thì công ty sản xuất ở thị trường 1
là $Q_1 = 10 \rightarrow P_1 = 93$; Thị trường 2 là $Q_2 = 12 \rightarrow P_2 = 106$.

e. $G(Q) = 0 \Rightarrow Q_1 + Q_2 - 20 = 0$. Lập hàm phụ Lagrange.

$$F_2(Q_1, Q_2, \lambda) = \pi + \lambda(Q_1 + Q_2 - 20) \text{ (cố)}$$

$$F_1' = \pi_1' + \lambda = 108 - 6Q_1 - 4Q_2 + \lambda$$

$$F_2' = \pi_2' + \lambda = 112 - 6Q_2 - 4Q_1 + \lambda$$

$$F_\lambda' = Q_1 + Q_2 - 20$$

$$\rightarrow \begin{cases} F_1' = 0 \\ F_2' = 0 \\ F_\lambda' = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Q_1 = 9 \\ Q_2 = 11 \\ \lambda = -10 \end{cases}$$

$$\ast \text{ Lập ma trận Hessian: } H_b = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -6 & -4 \\ 1 & -4 & -6 \end{vmatrix} = 4 > 0$$

$\rightarrow$ Hàm $F(Q_1, Q_2, \lambda)$. Đạt cực đại tại $(9, 11)$

Câu III Tính các tích phân.

$$1. I = \int_0^2 \frac{x^2 \cdot dx}{\sqrt{4-x^2}}; \quad f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} \text{ không xác định tại } x=2$$

$$\Rightarrow \int_0^2 \frac{x^2 \cdot dx}{\sqrt{4-x^2}} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^{2-\epsilon} \frac{x^2 \cdot dx}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$\text{Tính } \int \frac{x^2 \cdot dx}{\sqrt{4-x^2}} \text{ Đặt } x = 2 \sin t \Rightarrow \sin t = \frac{x}{2} \rightarrow t = \arcsin \frac{x}{2}$$

$$\Rightarrow \int \frac{x^2 \cdot dx}{\sqrt{4-x^2}} = \int \frac{4 \sin^2 t \cdot 2 \cos t \cdot dt}{\sqrt{4-4 \sin^2 t}} = \int \frac{4 \sin^2 t \cdot 2 \cos t \cdot dt}{2 |\cos t|}$$

$$= 4 \int \sin^2 t \cdot dt = 4 \int \frac{1 - \cos 2t}{2} dt$$

$$= 2t - \sin 2t + C = 2 \arcsin \frac{x}{2} - 2 \sin t \sqrt{1 - \sin^2 t}$$

$$= 2 \arcsin \frac{x}{2} - 2 \cdot \frac{x}{2} \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} + C$$

$$\Rightarrow \int_0^{2-\epsilon} \frac{x^2 \cdot dx}{\sqrt{4-x^2}} = 2 \arcsin \frac{2-\epsilon}{2} - \frac{2-\epsilon}{2} \cdot \sqrt{4\epsilon - \epsilon^2} + C$$

$$\int_0^2 \frac{x^2 \cdot dx}{\sqrt{4-x^2}} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^{2-\epsilon} \frac{x^2 \cdot dx}{\sqrt{4-x^2}} = 2 \arcsin 1 - 0 = 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi$$

$$2. K = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 6x + 8} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \frac{dx}{(x+2)(x+4)}$$

$$\text{Tính } \int \frac{dx}{(x+2)(x+4)} \text{ Ta có: } \frac{1}{(x+2)(x+4)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+4}$$

$$= \frac{A(x+4) + B(x+2)}{(x+2)(x+4)} = \frac{(A+B)x + 4A + 2B}{(x+2)(x+4)}$$

$$\rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ 4A+2B=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=\frac{1}{2} \\ B=-\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{dx}{(x+2)(x+4)} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x+2} - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x+4}$$

$$= \frac{1}{2} \ln|x+2| - \frac{1}{2} \ln|x+4| + C = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x+2}{x+4} \right| + C$$

$$\text{Vậy } K = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 6x + 8} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \frac{dx}{(x+2)(x+4)} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \ln \left| \frac{b+2}{b+4} \right|$$

$$= -\ln \sqrt{2} + \ln 2 = \ln \sqrt{2}$$

Câu IV. Tìm nghiệm của PTVP.

$$y'' + 2y' + 2y = 2x^2 + 8x + 6 \quad (1). \text{ Thaco } y(0) = 7, y'(0) = 6$$

$$(1) \Leftrightarrow y'' + 2y' + 2y = e^{2x}(2x^2 + 8x + 6)$$

$$\text{PT đặc trưng } k^2 + 2k + 2 = 0, \Delta = 1 - 2 = -1 = i^2$$

$$k_{1,2} = -1 \pm i$$

$$\text{Nghiệm riêng: } y_1 = e^{-x} \cos x; y_2 = e^{-x} \sin x$$

$$\bar{y} = y_1 + y_2 = e^{-x} (C_1 \cos x + C_2 \sin x)$$

$x=0$ không là nghiệm của PT đặc trưng nên:

$$y_0 = e^{2x} Q_n(x) = Ax^2 + Bx + C$$

$$y_0' = 2Ax + B; y_0'' = 2A$$

$$y_0'' + 2y_0' + 2y_0 = 2A + 4Ax + 2B + 2Ax^2 + 2Bx + 2C = 2Ax^2 + (2B + 4A)x + 2(A+B+C) = 2x^2 + 8x + 6$$

$$\rightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=2 \\ C=0 \end{cases} \Rightarrow y = \bar{y} + y_0 = e^{-x} (C_1 \cos x + C_2 \sin x) + x^2 + 2x$$

$$y(0) = C_1 - 7; y'(x) = e^{-x} (C_1 \cos x + C_2 \sin x)$$

$$+ e^{-x} (-C_1 \sin x + C_2 \cos x)x + 2$$

$$y'(0) = -(C_1 + C_2 0) + C_2 + 2 = C_2 - C_1 + 2 = 6 \Rightarrow C_2 = 11$$

$$\text{Vậy nghiệm PT (1) } y = e^{-x} (7 \cos x + 11 \sin x + x^2 + 2x)$$

(Giải Đề số 2 - K24.

$$\text{Câu II } Q_0 = 70 - P_1 + P_2$$

$$Q_0 = 80 + \frac{1}{2} P_1 - P_2$$

$$C = Q_1^2 + Q_1 Q_2 + Q_2^2 + 76 Q_1 + 14 Q_2 + 3$$

1. Tìm Q để $\pi_{\max}$ (Giải tương tự đề 1 - K24).

$$\text{Tính } R = P_1 Q_1 + P_2 Q_2$$

$$\pi = R - C, \pi'_1 = R'_1 - C'_1, \pi'_2 = R'_2 - C'_2$$

$$\begin{cases} \pi'_1 = 0 \\ \pi'_2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} Q_1 = ? \\ Q_2 = ? \end{cases} \text{ và điều kiện } \begin{cases} \pi'_1 = 0 \\ \pi'_2 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Q_1 = ? \\ Q_2 = ? \end{cases} \text{ để } \pi_{\max}$$

2. $Q_1 + Q_2 = 40$. Lập hàm phụ Lagrange.

$$F(Q_1, Q_2, \lambda) = \pi + \lambda(Q_1 + Q_2 - 40)$$

$$\begin{cases} F'_1 = 0 \\ F'_2 = 0 \\ F'_\lambda = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} Q_1 = ? \\ Q_2 = ? \\ \lambda = ? \end{cases} \rightarrow \text{Điểm dừng: } M(Q_1, Q_2)$$

* Điều kiện đủ: lập ma trận Hessian $H > 0$

Câu III: $\therefore I = \int_{3/2}^3 \frac{dx}{x^2 \sqrt{9-x^2}} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{3/2}^{3-\epsilon} \frac{dx}{x^2 \sqrt{9-x^2}}$

Tính $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{9-x^2}}$. Đặt $x = 3 \sin t \rightarrow dx = 3 \cos t \cdot dt$
 $\rightarrow \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{9-x^2}} = \int \frac{3 \cos t \cdot dt}{9 \sin^2 t \sqrt{9-9 \sin^2 t}} = \int \frac{dt}{9 \sin^2 t} = \frac{1}{9} \cot t$

$= -\frac{1}{9} \cot t (\arcsin \frac{x}{3})$
 Vậy $\int_{3/2}^3 \frac{dx}{x^2 \sqrt{9-x^2}} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[-\frac{1}{9} \cot t (\arcsin \frac{3-\epsilon}{3}) \right] + \frac{1}{9} \cot t (\arcsin \frac{1}{2}) = -\frac{1}{9} \cot t \frac{\pi}{2} + \frac{1}{9} \cot t (\arcsin \frac{1}{2}) = \frac{1}{9} \sqrt{3}$

2. $K = \int_0^{+\infty} x \cdot e^{-2x} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b x \cdot e^{-2x} dx$

Tính: $\int x \cdot e^{-2x} dx = -\frac{x}{2} \cdot e^{-2x} - \frac{1}{4} e^{-2x} + C$; Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = e^{-2x} dx \end{cases}$

$\Rightarrow \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b x \cdot e^{-2x} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{2} b \cdot e^{-2b} - \frac{1}{4} e^{-2b} \right) + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

Câu IV: Tìm nghiệm PTVP: $y'' - 3y' + 2y = 2 \cdot e^x(-x+1) = e^x(-2x+2)$

với điều kiện $y(0) = 2$; $y'(0) = -3$

PT đặc trưng: $k^2 - 3k + 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} k=1 \\ k=2 \end{cases}$

$\rightarrow \bar{y} = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$

Với $\alpha=1 \rightarrow x_1$ là nghiệm của phương trình đặc trưng

Duấy: $y_0 = x \cdot e^x (Ax+B) = e^x (Ax^2 + Bx)$

$y_0' = e^x (Ax^2 + Bx) + (2Ax+B)e^x$

$y_0'' = e^x (Ax^2 + Bx) + (2Ax+B)e^x + (2Ax+B)e^x + 2Ae^x$

Thay vào (1) ta được $e^x(-2Ax-B) = e^x(-2x+2)$

$\Rightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=-2 \end{cases} \rightarrow y_0 = e^x(-2x+2)$

Nghiem TD: $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + e^x(x^2 - 2x)$

$\rightarrow C_1 = 5, C_2 = -3$

Giải đề số 2 - K25

Câu I: (Các bạn tham khảo ở Phần Lý Thuyết)

Câu II: 1. Tính vi phân cấp 3 của hàm $y = \tan x$

$$y = \tan x \Rightarrow dy = d(\tan x) = \frac{1}{\cos^2 x} dx \quad ; \quad dy^2 = \frac{-2 \sin x \cos x}{\cos^4 x} dx = \frac{-2 \sin x}{\cos^3 x} dx$$

$$dy^3 = \frac{2(\cos x \cdot \cos^3 x - 3 \sin x \cdot \sin x \cdot \cos^2 x)}{\cos^6 x} dx$$

$$= \frac{2(\cos^4 x - 3 \sin^2 x \cdot \cos^2 x)}{\cos^6 x} dx = \frac{2\cos^2 x - 6 \sin^2 x}{\cos^4 x} dx$$

Câu III. $Q_1 = 200 - \frac{1}{2}P_1 \quad ; \quad P_1 = 400 - 2Q_1$

$Q_2 = 180 - P_2 \quad \rightarrow \quad P_2 = 180 - Q_2$

Doanh Thu $R = P_1 Q_1 + P_2 Q_2 \rightarrow R = (400 - 2Q_1)Q_1 + (180 - Q_2)Q_2$

$= -2Q_1^2 + 400Q_1 + 180Q_2 - Q_2^2$

Chi phí: $C = 20 + 80(Q_1 + Q_2) + Q_1^2 + 2Q_1 Q_2 + Q_2^2$

$\Pi = R - C \rightarrow \Pi' = R' - C' \quad (\text{Tỉ giá})$

Câu IV. Tìm nghiệm PTVP: $y'' + 4y' + 5y = 2x + 3$ ($y(0) = 2; y'(0) = -1$)

(1) $y'' + 4y' + 5y = e^{2x}(2x + 3)$

Nghiệm PT đặc trưng là $\lambda = -2 \pm i$

Nghiệm riêng $y_1 = e^{-2x} \cos x; y_2 = e^{-2x} \sin x$

Nghiệm tổng $y = y_1 + y_2 = e^{-2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$

Vì $\alpha = 0$ nên $y_p = e^{2x}(Ax + B) = Ax + B$

Giải PT ta được $\begin{cases} A = \frac{2}{5} \\ B = \frac{7}{25} \end{cases} \Rightarrow$ Nghiệm tổng: $y(x) = \frac{2}{5}x + \frac{7}{25} + C_1 e^{-2x} \cos x + C_2 e^{-2x} \sin x$

$y(0) = \frac{7}{25} + C_1 = 2 \Rightarrow C_1 = \frac{43}{25}$

Giải đề số 1 - K26

Câu I. Tìm giới hạn.

$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\ln x}{1/x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0$

Câu II: 1. Tính vi phân toàn phần của hàm số.

$z = \frac{y}{x^2 + 2y^2}$. Ta tìm $\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}$, Ta có $dz = \frac{dz}{dx} dx + \frac{dz}{dy} dy = \frac{-2xy \cdot dx}{(x^2 + 2y^2)^2} + \frac{x^2 - 2y^2}{(x^2 + 2y^2)^2} dy$

Câu III. $Q_1 = 70 - 2P_1 + 3P_2$

$Q_2 = 90 + P_1 - P_2$

$C = 20Q_1 + 30Q_2 + 20$

1. Tìm Q để Π max.

$\begin{cases} Q_1 = ? \\ Q_2 = ? \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_1 = 160 - Q_1 - 2Q_2 \\ P_2 = 250 - Q_1 - 2Q_2 \end{cases}$

Doanh Thu $R = P_1 Q_1 + P_2 Q_2 = 160Q_1 - Q_1^2 - 2Q_1 Q_2 + 250Q_2 - 2Q_2^2$

Lợi nhuận $\Pi = R - C$; $R'_1 = 160 - 2Q_1 - 2Q_2$; $R'_2 = 250 - 2Q_1 - 4Q_2$

$C'_1 = 20$; $C'_2 = 30$

$$\begin{cases} \pi_1' = R_1' - C_1' \\ \pi_2' = R_2' - C_2' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \pi_1' = 0 \\ \pi_2' = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Q_1 = 30 \\ Q_2 = 40 \end{cases} \quad \left| \quad \begin{cases} \pi_1'' = -2 < 0 \\ \pi_2'' = -4 < 0 \end{cases} \Rightarrow \text{điểm dừng}$$

là $M(30, 40)$

Câu IV: Tìm nghiệm của phương trình vi phân:

$$y'' - 2y' + 5y = 2x - 3 = e^{0x} \cdot e^{0x} \cdot (2x - 3) \quad \begin{cases} y(0) = -3 \\ y'(0) = -2 \end{cases}$$

Giải phương trình đặc trưng: $k = 1 \pm 2i$

$$\Rightarrow \bar{y} = e^{-2x} \cdot (C_1 \cos x + C_2 \sin x)$$

$$\text{Vì } \alpha = 0 \Rightarrow y_0 = e^{\alpha x} (Ax + B) \quad (\text{tự giải tiếp})$$

Đề 2. K26

Câu I: Tìm các giới hạn:

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} \ln x = \lim_{x \rightarrow 0} \ln x / \frac{1}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} (-2\sqrt{x}) = 0$$

B. Hàm

$$\text{Câu III: } \begin{cases} Q_1 = 120 - 2P_1 + P_2 \\ Q_2 = 150 + P_1 - P_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} P_1 = 270 - Q_1 - Q_2 \\ P_2 = 420 - Q_1 - 2Q_2 \end{cases}$$

$$R = P_1 Q_1 + P_2 Q_2 = 270 Q_1 - Q_1^2 - 2 Q_1 Q_2 + 420 Q_2 - 2 Q_2^2$$

Tìm Q để π max.

$$\pi = R - C, \quad \pi' = R' - C'$$

$$\begin{cases} \pi_1' = 0 \\ \pi_2' = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Q_1 = ? \\ Q_2 = ? \end{cases}$$

Câu IV: Cho pt vi phân $y' + 1/2x^4 y = x y^3$

1. Tìm nghiệm tổng quát: Chia 2 vế cho y^3

Các Đề Còn Lại Bường Rồi

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ THI ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

* Câu I: Phân ly thuyết các bài tự đọc sách & trả lời

* Câu II: Cho matri trận vuông: $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 & 3 \\ -1 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & m+2 & 2 \\ 0 & 1 & 7 & m+2 \end{bmatrix}$

Đ biến luận theo m hạng của matri trận A:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 & 3 \\ -1 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & m+2 & 2 \\ 0 & 1 & 7 & m+2 \end{bmatrix} \xrightarrow[d_3-d_1]{d_1+d_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & 3 & 9 & 6 \\ 0 & -1 & m-3 & -1 \\ 0 & 1 & 7 & m+2 \end{bmatrix} \xrightarrow{1/3 d_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & m-3 & -1 \\ 0 & 1 & 7 & m+2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[d_2+d_3]{d_2+d_4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & m & 1 \\ 0 & 0 & 4 & m \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & m & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4-m \end{bmatrix}$$

Biến luận: Khi $4-m^2=0 \Leftrightarrow m=\pm 2 \rightarrow \lambda(A)=3$
 • $4-m^2 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 2 \rightarrow \lambda(A)=4$

2) Khi $m=1$. Tính A^{-1}

Khi $m=1$, matri trận trở thành: $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 & 3 \\ -1 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 7 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{đổi}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

Tính:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} & A_{41} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} & A_{42} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & A_{43} \\ A_{14} & A_{24} & A_{34} & A_{44} \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 3 & -3 & -6 & 1 \\ 0 & 3 & -9 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A)=3$$

* Câu III: Cho 2 hệ phương trình:

$$(I) \begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 4x_1 + 3x_2 + 7x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

$$(II) \begin{cases} 2x_1 + x_2 - 4x_3 + 3x_4 = 1 \\ 7x_1 + 4x_2 - 6x_3 + 9x_4 = m \end{cases}$$

1) Tìm hệ nghiệm vô hạn của hpt (I):

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 & 4 \\ 3 & 2 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 7 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[2d_1-d_2]{3d_1-2d_2} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & -15 & 6 \\ 0 & -1 & -13 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{d_2-d_3} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & -13 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Hệ trở thành: } \begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ -x_2 - 13x_3 + 6x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = -13x_3 + 6x_4 \\ x_1 = 8x_3 - 5x_4 \end{cases}$$

Cho $\begin{cases} x_3 = 1 \\ x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow u_1 = (8, 13, 1, 0) \in \begin{cases} x_3 = 0 \\ x_4 = 1 \end{cases} \Rightarrow u_2 = (-5, 6, 0, 1)$
 Vậy (u_1, u_2) là hệ nghiệm cơ bản.
 2) Với qtrị nào của m thì hệ trên có nghiệm chung?
 Ta đặt hệ nghiệm của pt (x) là: $\begin{cases} x_1 = 8t_1 - 5t_2 \\ x_2 = -13t_1 + 6t_2 \\ x_3 = t_1 \\ x_4 = t_2 \end{cases}$

Thay vào (2) ta được:
 $\begin{cases} 2(8t_1 - 5t_2) + (-13t_1 + 6t_2) - 4t_1 + 3t_2 = 1 \\ 7(8t_1 - 5t_2) + 4(-13t_1 + 6t_2) - 6t_1 + 9t_2 = m \end{cases} \Leftrightarrow (*) \begin{cases} t_1 + t_2 = 1 \\ -2t_1 - 2t_2 = m \end{cases}$
 Để thỏa mãn (*) thì $m = -2$. Vậy $m = -2$ thì 2 hpt trên có nghiệm chung.
 * Câu IV: Trong hệ thống Input-output có 3 ngành Kinh tế, liệt kê ma trận đầu vào và yêu cầu của ngành Kinh tế mà đưa với 3 ngành Kt' trên là:
 10, 2, 48. $\begin{bmatrix} 0,2 & 0,3 & 0,4 \\ 0,3 & 0,2 & 0,3 \\ 0,4 & 0,3 & 0,1 \end{bmatrix}$

1) Tính sản lượng của 3 ngành Kt' trên:
 Gọi x là sản lượng 3 ngành Kinh tế: $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$
 Ta có: $(I - A)x = D$.

$$\begin{bmatrix} 0,8 & -0,3 & -0,4 \\ -0,3 & 0,8 & -0,3 \\ -0,4 & -0,3 & 0,9 \end{bmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 48 \end{pmatrix}$$

Chọn B^{-1} : Ta có $\det(B) = 0,223 \Rightarrow B^{-1} = \frac{1}{0,223} \begin{bmatrix} 0,63 & 0,39 & 0,41 \\ 0,39 & 0,56 & 0,36 \\ 0,41 & 0,36 & 0,55 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow x = B^{-1} \cdot D = \begin{bmatrix} 120 \\ 100 \\ 140 \end{bmatrix}$. Vậy sản lượng 3 ngành Kt' :
 $x_1 = 120; x_2 = 100; x_3 = 140$

2) Sản lượng 3 ngành Kt' nhờ áp dụng kỹ thuật:

Do cải tiến kỹ thuật ngành thứ I nên theo điều kiện nguyên liệu ngành thứ II, thứ III giảm 25%.

Sau khi cải tiến: $A = \begin{bmatrix} 0,2 & 0,3 & 0,4 \\ 0,225 & 0,2 & 0,3 \\ 0,3 & 0,3 & 0,1 \end{bmatrix}$

Ta lại có: $(I - A') \cdot x' = D \Leftrightarrow x' = B^{-1} \cdot D = \frac{1}{0,223} \begin{bmatrix} 0,63 & 0,39 & 0,42 \\ 0,2925 & 0,6 & 0,33 \\ 0,3475 & 0,33 & 0,5725 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 48 \end{pmatrix}$
 $\Rightarrow x' = \begin{bmatrix} 91,25 \\ 68,08 \\ 106,45 \end{bmatrix}$ Vậy sản lượng KT sau khi đổi kỹ thuật:
 $x_1 = 91,25; x_2 = 68,08; x_3 = 106,45$.

ĐỀ SỐ 2 - K22

Câu II

Cho các vectơ: $A_1 = (2; 2; m-1)$, $A_2 = (-2; m-2; m)$
 $A_3 = (m; 2; 1)$ trong $\mathbb{R}^3$.

1. Với $m = ?$ thì 3 vectơ trên tạo thành cơ sở của $\mathbb{R}^3$
 Nhận xét: Vì mọi cơ sở nào của $\mathbb{R}^3$ đều có số vectơ là 3. Vậy để chứng minh 3 vectơ trên tạo thành cơ sở của $\mathbb{R}^3$ thì hệ vectơ trên phải độc lập tuyến tính trong $\mathbb{R}^3$.

Xét ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & m-1 \\ -2 & m-2 & m \\ m & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Định $\det(A)$ theo m

Hệ vectơ độc lập tuyến tính $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0 \rightarrow m$

2. Với $m = ?$ thì không gian con sinh bởi 3 vectơ trên có số chiều bằng 2

Ta có:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & m-1 \\ -2 & m-2 & m \\ m & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[d_3 - d_1]{d_2 + d_1} \begin{pmatrix} 2 & 2 & m-1 \\ 0 & m & 2m-1 \\ m-2 & 0 & 2-m \end{pmatrix}$$

Đu thấy: khi $m-2=0 \Leftrightarrow m=2$ thì $\text{h}(A)=2$
 $\Rightarrow$ K^o gian con sinh bởi 3 vectơ trên có số chiều là 2

Câu III

Cho 2 hệ phương trình

$$(I) \begin{cases} 4x_1 - 5x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases} \quad \& \quad (II) \begin{cases} 3x_1 - 4x_2 + x_3 + 2x_4 = -2 \\ 9x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 7x_4 = m \end{cases}$$

1. Tìm một nghiệm cơ bản của hệ pt (I): Xét ma trận A

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 7 & 3 & 4 \end{pmatrix} \text{ Biến đổi } A \text{ về dạng } \begin{cases} x_1 = a'x_3 + b'x_4 \\ x_2 = a''x_3 + b''x_4 \end{cases}$$

Sau đó chọn $x_3, x_4 \Rightarrow x_1, x_2$ vậy $\eta \begin{cases} u_1 = (x_1; \dots; x_4) \\ u_2 = (x'_1; \dots; x'_4) \end{cases}$

2. Để hệ có η chung: có 2 cách.

C₁: Giải như đề 1 K22.

C₂: Xét ma trận hệ số liên kết của 2 hệ sau đó đưa về dạng như câu 1 $\rightarrow$ tìm m .

Câu IV

$$A = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,4 & 0,5 \\ 0,4 & 0,2 & 0,5 \\ 0,5 & 0,2 & 0,1 \end{pmatrix} \text{ và } D = \begin{pmatrix} 4,9 \\ 3 \\ 5,5 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,4 & 0,5 \\ 0,4 & 0,2 & 0,5 \\ 0,5 & 0,2 & 0,1 \end{pmatrix} \text{ và } D = \begin{pmatrix} 4,9 \\ 3 \\ 5,5 \end{pmatrix}$$

1. Định sẵn lượng $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$, ta có $(I - A)x = D$

2. Giải lượng tử để 1... TK22

Câu II: Cho hệ vectơ: $A_1(1, 2, -1, 2, 0)$; $A_2(2, 3, 4, 1, 2)$
 $A_3(0, 2, -12, 6, -4)$; $A_4(-1, 1, m, 7, n)$ trong R^5

1. Tìm hệ vectơ độc lập tuyến tính của tập của hệ A_1, A_2, A_3

Giải ma trận A:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -12 & 6 & -4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 6 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -12 & 6 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 6 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Khi đó: $\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3 = 0$ (1) có số phương trình bé hơn số ẩn
 $\Rightarrow$ có vô số nghiệm duy nhất, do vậy hệ (A_1, A_2, A_3) phụ thuộc tuyến tính khi $\alpha_3 = 0$ thì

$$\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \end{cases}$$

Hệ (A_1, A_2) độc lập tuyến tính của hệ (A_1, A_2, A_3) phụ thuộc tuyến tính của hệ (A_1, A_2, A_3) khi hệ độc lập tuyến tính của tập

2. Tìm m, n để $\lambda(A_1, A_2, A_3) = \lambda(A_1, A_2, A_3, A_4)$

Giải ma trận B:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -12 & 6 & -4 \\ -1 & 1 & m & 7 & n \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 6 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -12 & 6 & -4 \\ 0 & 3 & m-1 & 9 & n \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 6 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m+n & 0 & n+b \end{bmatrix} \quad \text{Đưa về: } \lambda(A_1, A_2, A_3, A_4) = \lambda(B) \\ \text{Vậy để } \lambda(A_1, A_2, A_3, A_4) = \lambda(A_1, A_2, A_3) = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -17 \\ n = -6 \end{cases}$$

Câu III Cho 2 ma trận:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{mà } \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 3 \end{bmatrix} = B$$

1. Tìm A^{-1}

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}; \det A = 1 \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

2. Tìm X, Y để:

$$\begin{cases} A^T(X+Y) = B \\ (X-Y)A = B \end{cases}$$

$$\text{Ta có: } A^T = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{và } (A^{-1})^T = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B^T = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\text{Vậy để } A^T(X+Y) = B^T \Leftrightarrow X+Y = (A^{-1})^T \cdot B^T$$

$$\Leftrightarrow X+Y = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 5 & 5 \\ 2 & 1 & -2 & 2 \\ 4 & 2 & -6 & 6 \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$(X-Y)A = B \Leftrightarrow X-Y = B \cdot A^{-1}$$

$$\Leftrightarrow X-Y = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 5 & -2 & -6 & 6 \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\text{Mê } \begin{cases} A^T(X+Y) = B^T \\ (X-Y)A = B \end{cases} \quad \text{trở thành}$$

$$\begin{cases} X+Y = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 5 & 5 \\ 2 & 1 & -2 & 2 \\ 4 & 2 & -6 & 6 \end{bmatrix} & (I) \\ X-Y = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 5 & -2 & -6 & 6 \end{bmatrix} & (II) \end{cases}$$

$$(I) - (II) \Rightarrow X = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 9/2 & -2 & -6 & 6 \end{bmatrix}; (I) - (II) \Rightarrow Y = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 & -5 & -5 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

26 A

Câu III: Xét thị trường có 3 loại hàng liên hoàn cùng 1 câu
3 loại hàng trên là:

$$\begin{cases} Q_{S1} = 9P_1 + P_3 - 170 \\ Q_{S2} = 12P_2 - P_3 - 500 \end{cases}$$

$$Q_{S3} = -P_1 - P_2 + 10P_3 - 510$$

$$Q_{D1} = 1880 - 8P_1 + P_2 + P_3$$

$$Q_{D2} = 2070 + P_1 - 10P_2 + P_3$$

$$Q_{D3} = 2140 + P_2 - 8P_3$$

1. Tìm điểm cân bằng trên thị trường ($Q_S = Q_D$)

$$\begin{cases} Q_{S1} = Q_{D1} \\ Q_{S2} = Q_{D2} \\ Q_{S3} = Q_{D3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_1 = 148,884 \\ P_2 = 159,127 \\ P_3 = 170,962 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Q_{S1} = Q_{D1} \\ Q_{S2} = Q_{D2} \\ Q_{S3} = Q_{D3} \end{cases}$$

2. Tìm điểm cân bằng thị trường với điều kiện bổ sung:

- Xuất khẩu 990 đơn vị hàng thứ I: $Q_{S1} = Q_{S1} - 990$

$$= 9P_1 - P_3 - 1160$$

- Xuất khẩu 740 đơn vị hàng thứ II: $Q_{S2} = Q_{S2} - 740 = 12P_2 - P_3 - 1240$

- Nhập về 1170 đơn vị hàng thứ III: $Q_{D3} = Q_{D3} + 1170 = P_2 - 8P_3 + 3310$

$\Rightarrow$ Tìm cân bằng mới trên thị trường.

$$\begin{cases} Q_{S1} = Q_{D1} \\ Q_{S2} = Q_{D2} \\ Q_{S3} = Q_{D3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9P_1 - P_3 - 1160 = -8P_1 + P_2 + P_3 + 1880 \\ 12P_2 - P_3 - 1240 = P_1 - 10P_2 + P_3 + 2070 \\ -P_1 - P_2 + 10P_3 - 510 = P_2 - 8P_3 + 3310 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 17P_1 - P_2 - 3P_3 = 3040 \\ -P_1 + 22P_2 - 2P_3 = 3310 \\ -P_1 - 2P_2 + 18P_3 = 3820 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P_1 = 218,347 \\ P_2 = 182,02 \\ P_3 = 244,644 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Q_1 = 560,5 \\ Q_2 = 699,6 \\ Q_3 = 1536,073 \end{cases}$$

GIẢI ĐỀ THI ĐẠI SỐ TUYỂN TÍNH (đề 2) K 23.

Câu I.

Cho

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{và } B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

1) Tìm A^{-1} .

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A) = 1 \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

2) Tìm X, Y :

$$\text{Ta có: } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow (A^{-1})^T = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow B^T = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} A(X+Y) = B \\ (X-Y)A^T = B^T \end{cases} \quad \text{trở thành}$$

$$\begin{cases} X+Y = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 5 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (I) \\ X-Y = B^T (A^T)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 5 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (II) \end{cases}$$

(I) + (II) ta được:

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 5/2 & 1/2 \\ 5/2 & -2 & -5/2 \\ 1/2 & -5/2 & 1 \end{pmatrix} \quad (I)-(II) \text{ ta được} \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 5/2 & 1/2 \\ -5/2 & 0 & -5/2 \\ -1/2 & -5/2 & 0 \end{pmatrix}$$

Câu III: Cho hpt:
$$\begin{cases} x + y + mz = 1 \\ x + my + z = a \\ x + (m+1)y + (m+1)z = b \end{cases}$$

1) Với giá trị nào của m thì hpt trên có 1 nghiệm duy nhất:

Xét định thức: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & m & 1 \\ 1 & m+1 & m+1 \end{pmatrix} \rightarrow \det(A) = m^2 - 1$

Hệ có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0 \Leftrightarrow (m^2 - 1) \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 1$

2) Tìm a, b để hệ trên có nghiệm với $\forall m$

Xét ma trận mở rộng của hệ:

$$\bar{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m & 1 \\ 1 & m & 1 & a \\ 1 & m+1 & m+1 & b \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m & 1 \\ 0 & m-1 & 1-m & a-1 \\ 0 & m & 1 & (b-1)(m-1) - m(a-1) \end{array} \right]$$

Nhận xét: khi $m \neq \pm 1$ thì hệ luôn luôn có nghiệm duy nhất $\forall a, b$.

Do vậy khi $m = \pm 1$ thì hệ có nghiệm hoặc hệ vô nghiệm

- khi $m = 1$, hệ có nghiệm $\Leftrightarrow a = 1$.

- khi $m = -1$ hệ trở thành:

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ x - y + z = a \\ x = b \end{cases} \quad \text{Ta có } D_x = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ a & -1 & 1 \\ b & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$D_y = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & b & -0 \end{pmatrix} = 1 + a - 2b = 0 \Leftrightarrow b = \frac{a+1}{2}$$

$$D_z = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & a \\ 1 & 0 & b \end{pmatrix} = 1 + a - 2b = 0 \Leftrightarrow b = \frac{a+1}{2}$$

Vậy để hệ có nghiệm với $\forall m$ thì ta giải có $a = 1$ hay $b = \frac{a+1}{2}$
Câu IV: Xét thị trường 3 loại hàng. Biết hàm cung và hàm cầu 3 loại hàng

thì là:

$$\begin{aligned} Q_{S1} &= 10P_1 - P_2 - 750 & Q_{D1} &= 2050 - 9P_1 + P_2 + P_3 \\ Q_{S2} &= 12P_2 - P_3 - 1200 & Q_{D2} &= 3800 + P_1 - 10P_2 \\ Q_{S3} &= -P_1 + 9P_3 - 900 & Q_{D3} &= 3500 + P_2 - 8P_3 \end{aligned}$$

1) Tìm điểm cân bằng trên thị trường.

Cân bằng thị trường xảy ra khi cung-cầu gặp nhau:

$$\begin{cases} Q_{S1} = Q_{D1} \\ Q_{S2} = Q_{D2} \\ Q_{S3} = Q_{D3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_1 = 198,84 \\ P_2 = 249,486 \\ P_3 = 299,315 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Q_1 = 894,354 \\ Q_2 = 1494,517 \\ Q_3 = 1604,451 \end{cases}$$

2) Tìm điểm cân bằng thị trường với điều kiện bổ sung:

- Xuất đi 1000 đơn vị loại hàng thứ I: $Q'_{S1} = Q_{S1} - 1000 = 10P_1 - P_2 - 1750$
- Nhập về 1200 $\quad \quad \quad \text{II: } Q'_{D2} = Q_{D2} + 1200 = 5000 + P_1 - 10P_2$
- Xuất đi 800 $\quad \quad \quad \text{III: } Q'_{S3} = Q_{S3} - 800 = P_1 + 9P_3 - 1700$

Lúc này điểm cân bằng mới:

$$\begin{cases} Q'_{S1} = Q_{D1} \\ Q_{S2} = Q'_{D2} \\ Q'_{S3} = Q_{D3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_1 = 251,37 \\ P_2 = 309,475 \\ P_3 = 357,078 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Q_1 = 454,225 \\ Q_2 = 2156,62 \\ Q_3 = 1765,072 \end{cases}$$

GIẢI ĐỀ THI MÔN ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH (đề 1 - k 24)

Câu I: Cho hệ véc: $A_1 = (2, 1, 3, 4)$; $A_2 = (-1, -1, 4, 2)$;

$A_3 = (1, -1, 18, 14)$; $A_4 = (-1, -3, 26, m)$ trong $\mathbb{R}^4$

1) Hệ véc A_1, A_2, A_3 phụ thuộc hay độc lập tuyến tính.

Ta đặt $\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \lambda_3 A_3 = 0$

Ta có ma trận:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 18 & 0 \\ 4 & 2 & 14 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 18 & 0 \\ 4 & 2 & 14 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} d_2 - 2d_1 \rightarrow d'_2 \\ d_3 - 3d_1 \rightarrow d'_3 \\ d_4 - 4d_1 \rightarrow d'_4 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 13 & 0 \\ 0 & 7 & 21 & 0 \\ 0 & 6 & 18 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{array} \right]$$

Vậy hệ A_1, A_2, A_3 phụ thuộc tuyến tính.

2) Với giá trị nào của m thì A_4 là tổ hợp tuyến tính của (A_1, A_2, A_3) .

Ta có: $\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \lambda_3 A_3 = A_4$

Xét ma trận hệ số mở rộng:

$$A = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -3 \\ 3 & 4 & 18 & 26 \\ 4 & 2 & 14 & m \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -3 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & 18 & 26 \\ 4 & 2 & 14 & m \end{array} \right] \begin{array}{l} \\ d_2 - 2d_1 \rightarrow d'_2 \\ d_3 - 3d_1 \rightarrow d'_3 \\ d_4 - 4d_1 \rightarrow d'_4 \end{array}$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 7 & 21 & 35 \\ 0 & 6 & 18 & m+12 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 6 & 18 & m+12 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & m-18 \end{array} \right]$$

Vậy khi $m-18=0 \Leftrightarrow m=18$ thì A_4 là tổ hợp tuyến tính của (A_1, A_2, A_3)

Từ đó suy ra: $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \end{array} \right]$ cho: $\begin{cases} \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 = 5 \\ \lambda_1 = 2 \end{cases}$

Vậy $A_4 = 2A_1 + 5A_2 + 0A_3$.

* Nhận xét: Cách biểu diễn không phải là duy nhất bởi vì khi ta cho

λ_3 các giá trị khác nhau $\Rightarrow \lambda_1, \lambda_2$ ứng với các giá trị khác.

Câu III: Xét thị trường 3 loại hàng có các hàm cung và hàm cầu sau:

$$Q_{s1} = 8P_1 - P_2 - 35$$

$$Q_{D1} = -4P_1 + P_2 + 155$$

$$Q_{s2} = P_2 - P_3 - 20$$

$$Q_{D2} = -5P_2 + P_3 + 195$$

$$Q_{s3} = -P_2 + 5P_3 - 25$$

$$Q_{D3} = -2P_3 + 160$$

Xác định điểm cân bằng thị trường (các bạn giải không thì bài giải rồi)

Câu IV: Cho ma trận:

$$A = \begin{bmatrix} -5 & -5 & 7 \\ 4 & 5 & -4 \\ -4 & -3 & 6 \end{bmatrix}$$

Giải pt đặc trưng: $(A - \lambda I) = 0$

$$A = \begin{bmatrix} -5-\lambda & -5 & 7 \\ 4 & 5-\lambda & -4 \\ -4 & -3 & 6-\lambda \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow (\lambda-2)(\lambda^2-4\lambda+3)=0$$

Các giá trị riêng: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$.

* Với $\lambda = 1$, giải phương trình: $(A - I)x = 0$.

$$\begin{bmatrix} -6 & -5 & 7 \\ 4 & 4 & -4 \\ -4 & -3 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -6 & -5 & 7 \\ -4 & -3 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow X_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

* Với $\lambda = 2$, Giải pt: $(A - 2I)X = 0$.

$$\begin{bmatrix} -2 & -5 & 7 \\ 4 & 3 & -4 \\ -4 & -3 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -2 & -5 & 7 \\ 4 & 3 & -4 \\ 0 & 5 & -4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 8 & 6 & -8 \\ 0 & 5 & -4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow X_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

* Với $\lambda = 3$, Giải pt: $(A - 3I)X = 0$.

$$\begin{bmatrix} -8 & -5 & 7 \\ 4 & 2 & -4 \\ -4 & -3 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & -1 \\ -8 & -5 & 7 \\ -4 & -3 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & -1 \\ -8 & -5 & 7 \\ -4 & -3 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow X_3 = \begin{bmatrix} 3/2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$S = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3/2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow S^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow S^{-1} A S = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -5 & -5 & 7 \\ 4 & 5 & -4 \\ -4 & -3 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3/2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(Nhân vào với nhau theo từng ma trận một)

GIẢI ĐỀ THI ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH (đề 2 - K24)

Câu II: Cho hệ véc: $A_1 = (1, 2, 3, -1)$, $A_2 = (1, -3, -2, 4)$

$A_3 = (-1, 2, 1, -3)$, $A_4 = (-1, 2, 1, m)$ trong $\mathbb{R}^4$.

1) Để xác định A_1, A_2, A_3 phụ thuộc hay đltt

Ta đặt: $\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \lambda_3 A_3 = 0$.

Ta có ma trận

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & -3 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{d_2 - 2d_1 \rightarrow d_2' \\ d_3 - 3d_1 \rightarrow d_3' \\ d_4 - 4d_1 \rightarrow d_4'}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 4 & 0 \\ 0 & -5 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 4 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 4 & 0 \end{bmatrix}, r(A) = 2 < 3.$$

Vậy hệ véc A_1, A_2, A_3 phụ thuộc tuyến tính.

2) $m = ?$ Khi đó A_4 là tổ hợp tuyến tính A_1, A_2, A_3 .

Biểu diễn A_4 theo A_1, A_2, A_3 .

* Xét ma trận hệ số mở rộng:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -3 & 2 & 2 \\ 3 & -2 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & -3 & m \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -5 & 4 & 4 \\ 0 & -5 & 4 & 4 \\ 0 & 5 & -4 & m-1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -5 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & m+3 \end{array} \right]$$

Vậy khi $m+3=0 \Leftrightarrow m=-3$ thì A_4 là tổ hợp tuyến tính của A_1, A_2, A_3 .

Từ đó suy ra: $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -5 & 4 & 4 \end{array} \right]$ cho $\begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 1 \end{cases}$

Vậy $A_4 = 0A_1 + 0A_2 + A_3$. (Cách biểu diễn này là duy nhất)

Câu III, IV: tương tự đề 1-K24.

GIẢI ĐỀ THI MÔN ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH-K25

Câu I: 1. Sai (dựa vào định nghĩa của hệ vơ).

2. Sai vì theo công thức đổi tọa độ ta có:

$$X_w = T_w \rightarrow u X_u, \text{ mặt khác cũng có}$$

$$X_w = T_w \rightarrow u \cdot X_u = T_w \rightarrow v \cdot T_v \rightarrow u \cdot X_u$$

Nên suy ra $T_w \rightarrow u = T_w \rightarrow v \cdot T_v \rightarrow u = T_v^{-1} \rightarrow w \cdot T_u \rightarrow v$

Theo đề bài ta có: $T_3 = T_2^{-1} \cdot T_1^{-1}$

Ta lại có tính chất: $A \cdot A^{-1} = I_n \rightarrow \det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$

Nên phải có: $\det T_3 = \det (T_2^{-1} \cdot T_1^{-1})$

$$= \det T_2^{-1} \cdot \det T_1^{-1} = \frac{1}{\det T_2} \cdot \frac{1}{\det T_1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{18}$$

Vậy $\det T_3 = \frac{1}{18}$ nên mệnh đề phát biểu sai.

3, sai (dựa vào chly ở trang 185)

4, Sai. VD: $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix} \rightarrow |A| = 1$

Câu II: 1) khi $m=5$ thì $A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 25 & 7 & 5 \\ 10 & 2 & 2 \\ -9 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

Nên $B^{-1} = (A^T)^{-1} \cdot A^{-1} = (\bar{A}^{-1})^T \bar{A}^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 806 & -222 & 154 \\ -222 & 62 & 42 \\ -154 & 42 & 30 \end{pmatrix}$

2) Ta có: $|B| = |A| \cdot |A^T|$

mà: $|A| = (m-1)(m-6)$

nên: $|B| = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m=1 \\ m=6 \end{cases}$

Câu III : 1) $D = \begin{pmatrix} 15 & 4 \\ 8 & 8 \end{pmatrix}$, 2) $m = 0,25$.

Câu IV : Ma trận A có 3 giá trị riêng: $x_1 = 2, x_2 = 1, x_3 = -1$

Hệ $(A - 2I)X = 0$ có hệ no có bán: $X_1 = (1, 1, 1)^T$

Hệ $(A - I)X = 0$: $X_2 = (1, 0, 1)^T$

Hệ $(A + I)X = 0$: $X_3 = (1, 1, 0)^T$

Nên: $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\rightarrow S^{-1} \cdot A \cdot S = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

GIẢI ĐỀ THI MÔN ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH - K 26

Câu I: Cho các véc: $A_1 = (m, 1, 1), A_2 = (1, m, 1)$

$A_3 = (1, 1, m)$ trong R^3 .

1) Với giá trị nào của m thì 3 véc trên tạo thành cơ sở của R^3 .

Nhận xét: Vì mọi cơ sở của R^3 đều có số véc là 3. Nên ta chỉ cần chứng minh hệ véc đã lập tuyến tính trong R^3 thì nó là cơ sở của R^3 .

Xét ma trận: $A = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix} \rightarrow \det(A) = (m-1)^2(m+2)$

Hệ 3 véc tạo thành cơ sở $\Leftrightarrow$ hệ 3 véc dltt.

$$\Leftrightarrow \det(A) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -2 \end{cases}$$

2) Với giá trị nào của m thì không gian con sinh bởi 3 véc trên có số chiều bằng 2.

Ta có $A = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & m & 1 \\ m & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ 0 & 1-m & m-1 \\ 1-m & 0 & m-1 \end{pmatrix}$

$\rightarrow m = 1 \Leftrightarrow r(A) = 1$. Do vậy không gian sinh bởi 3 véc có số chiều bằng 1.

Câu II: Cho ma trận vuông: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & m \\ 0 & 1 & m & 1 \\ -1 & 0 & m-1 & 1-m \\ 0 & -1 & 1-m & m-1 \end{pmatrix}$

1) Biến luận hạng của A theo m :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & m \\ -1 & 1 & m-1 & 1-m \\ -1 & 0 & m-1 & 1-m \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & m \\ -1 & 1 & m-1 & 1-m \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_4+C_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & m+1 \\ -1 & 1 & m-1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vậy $m = -1 \Rightarrow r(A) = 3$ (biến đổi theo cột).
 $m \neq -1 \Rightarrow r(A) = 4$

2) Khi $m = 2$. Tìm A^{-1}

Khi $m = 2$: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A) = 3$

Ta có: $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} & A_{41} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} & A_{42} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & A_{43} \\ A_{14} & A_{24} & A_{34} & A_{44} \end{pmatrix}$

Câu III: Cho hpt:
$$\begin{cases} x + y + (m+1)z = 2 \\ x + my + 2z = a \\ x + (m+1)y + (m+3)z = b \end{cases}$$

1/ Với giá trị nào của m thì hpt có nghiệm duy nhất:

Xét định thức: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & m+1 \\ 1 & m & 2 \\ 1 & m+1 & m+3 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A) = m^2 + m - 2$

Hệ có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0 \Rightarrow m^2 + m - 2 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m \neq -2 \end{cases}$

2/ Tìm a, b để hệ trên có nghiệm với $\forall m$:

Nhận xét: Khi $m \neq 1$ và $m \neq -2$ thì hệ có vô số nghiệm hoặc hệ vô nghiệm.

Khi đó: Xét $m = 1$. Hệ trở thành:
$$\begin{cases} x + y + 2z = 2 \\ x + y + 2z = a \\ x + 2y + 4z = b \end{cases}$$
 Hệ có nghiệm $\Leftrightarrow a = 2$.

Xét $m = -2$, hệ trở thành:
$$\begin{cases} x + y - z = 2 \\ x - 2y + 2z = a \\ x - y + z = b \end{cases}$$

Ta có: $D_x = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ a & -2 & 2 \\ b & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$, $D_y = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & a & 2 \\ 1 & b & 1 \end{vmatrix} = 2a - 3b + 2$

$D_z = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & 1 & b \end{vmatrix} = 2a - 3b + 2$

Để thỏa mãn đề bài thì: $2a - 3b + 2 = 0 \Leftrightarrow b = \frac{2a+2}{3}$

Vậy đề hệ có nghiệm thì: $a = 2$ hay $b = \frac{2a+2}{3}$

Câu IV: Mô hình Input - Output mà gồm 3 ngành kinh tế với ma trận hệ số đầu vào:

$$A = \begin{bmatrix} 0,1 & 0,3 & 0,2 \\ 0,4 & 0,2 & 0,1 \\ 0,2 & 0,3 & 0,3 \end{bmatrix}$$

1) Gọi x là véc-tơ sản lượng của 3 ngành kinh tế viết theo cột ta có:

$$(I - A)x = D \Rightarrow x = D \cdot B^{-1}$$

Ta có: $D = \begin{pmatrix} 110 \\ 52 \\ 90 \end{pmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0,9 & -0,3 & -0,2 \\ -0,4 & 0,8 & -0,1 \\ -0,2 & -0,3 & 0,7 \end{bmatrix}$

2) Do cải tiến kỹ thuật ngành 1 nên nguyên liệu ngành thứ 2 giảm 25%. Như vậy: $a_{21} = 0,4$, sau khi cải tiến: $a_{21} = 0,3$

Ta có ma trận hệ số đầu vào:

$$A = \begin{bmatrix} 0,1 & 0,3 & 0,2 \\ 0,3 & 0,2 & 0,1 \\ 0,2 & 0,3 & 0,3 \end{bmatrix}$$

Áp dụng cách như câu (v) để tìm x .

Phương Trình Vi Phân

1) Phương trình vi phân cấp 1:
 $F(x, y, y') = 0$

2) Phương trình vi phân tách biến:
 $f(x) \cdot dx = g(y) \cdot dy \Leftrightarrow \int f(x) \cdot dx = \int g(y) \cdot dy$

* $y' = f(x, y)$ với $f(tx, ty) = f(x, y)$; đặt: $y = tx$

* $y' = \left(\frac{ax + by + c}{a'x + b'y + c'} \right)$

$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = 0$ đặt: $z = ax + by$

$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \neq 0$ đặt: $\begin{cases} x = u + x_0 \\ y = v + y_0 \end{cases}$

Với x_0, y_0 là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$

3) Phương trình vi phân tuyến tính cấp 1:

$y' + P(x)y = Q(x)$

• Giải phương trình thuần nhất tương ứng: $y' + P(x)y = 0$

Tìm nghiệm tổng quát của phương trình

• Biến thiên hằng số:

Ta tìm nghiệm của phương trình có dạng: $y = \square$ cũng dạng với nghiệm của pt thuần nhất với c thay bằng $C(x)$

4) Phương trình Bernoulli:

$y' + P(x)y = Q(x)y^n$ ($y=0$ là nghiệm)

Chia 2 vế cho $y^n \Rightarrow y' \cdot y^{-n} + P(x) \cdot y^{1-n} = Q(x)$ (*)

Đặt: $z = y^{1-n} \Rightarrow dz = (1-n) y^{-n} \cdot dy = (1-n) y^{-n} \cdot y'$

Phương trình (*) thành: $\frac{1}{1-n} z' + P(x)z = Q(x)$

(Đt không thuần nhất cấp 1)

5) Phương trình vi phân cấp 2 :

- $y'' = f(x)$: lấy tích phân 2 lần
- Dạng $F(x, y', y'') = 0$ (không có y)
Đặt $z = y' \Rightarrow z' = y''$
- Dạng $F(y, y'', y''') = 0$ (không có x)
Đặt : $y'(x) = z(y)$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{đặt } y \rightarrow z \\ \text{biến } x \rightarrow y \end{array} \right.$

6) Phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 (hệ số hằng) :

$y'' + ay' + by = 0$; $y = e^{\lambda x}$
giải phương trình đặc trưng : $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ có 3 trường hợp

a) Dt đặc trưng có 2 nghiệm thực :

$y_1 = e^{\lambda_1 x}$; $y_2 = e^{\lambda_2 x}$ là 2 nghiệm độc lập tuyến tính
 $\Rightarrow$ nghiệm tổng quát : $y = C_1 \cdot e^{\lambda_1 x} + C_2 \cdot e^{\lambda_2 x}$

b) Dt đặc trưng có nghiệm kép :

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \Rightarrow$ nghiệm tổng quát : $y = C_1 \cdot e^{\lambda x} + C_2 \cdot e^{\lambda x}$

c) Dt đặc trưng có 2 nghiệm phức : ($\Delta < 0$; $i^2 = -1$)

$\lambda = a \pm ib \Rightarrow$ Nghiệm riêng : $\left\{ \begin{array}{l} y_1 = e^{ax} \cdot \cos bx \\ y_2 = e^{ax} \cdot \sin bx \end{array} \right.$

7) Dt vi phân tuyến tính không thuần nhất cấp 2 hệ số hằng :

$$y'' + ay' + by = f(x) \quad (1)$$

• Xét phương trình thuần nhất tương ứng : $y'' + ay' + by = 0 \quad (2)$

• Nghiệm tổng quát (2) : $y = C_1 \cdot y_1 + C_2 \cdot y_2$

• Ta tìm nghiệm riêng của pt (1) bằng phương pháp biến thiên hằng số

$$\bar{y} = C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2$$

Giải $C_1(x_1)$, $C_2(x_2)$ bằng cách giải hệ pt :

$$\left\{ \begin{array}{l} C_1' y_1 + C_2' y_2 = 0 \\ C_1' y_1' + C_2' y_2' = f(x) \end{array} \right.$$

• Nghiệm tổng quát (1) = nghiệm tổng quát (2) + nghiệm riêng (1)

TRƯỜNG HỢP ĐẶC BIỆT

- * $f(x) = e^{\lambda x} \cdot P(x)$ (λ không là nghiệm của phương trình đặc trưng)
Ta tìm 1 nghiệm riêng của pt không-thuần nhất dạng: $y = e^{\lambda x} \cdot Q(x)$
- * $f(x) = e^{\lambda x} \cdot P(x)$ (λ là nghiệm đơn của phương trình đặc trưng)
Nghiệm riêng của pt không-thuần nhất dạng: $y = e^{\lambda x} \cdot x \cdot Q(x)$
- * $f(x) = e^{\lambda x} \cdot P(x)$ (λ là nghiệm kép của pt đặc trưng)
Nghiệm riêng của pt không-thuần nhất: $y = e^{\lambda x} \cdot x^2 \cdot Q(x)$

Quy tắc: Bậc Q = Bậc P

Bài tập

I Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng, mệnh đề nào sai.

- 1) Hàm bị chặn trên (a, b) thì khả vi trên (a, b)
- 2) Đạo hàm hỗn hợp của hàm nhiều biến không phụ thuộc vào thứ tự lấy đạo hàm.
- 3) $Cy \cdot x = 2$ có nghĩa là khi x tăng lên một đơn vị thì y tăng lên hai đơn vị.
- 4) Hàm khả vi trên (a, b) thì bị chặn trên (a, b)
- 5) Nếu $f(x)$ đạt cực đại tại x_0 thì $f'(x_0) = 0$
- 6) $MC = 200$ (C là chi phí) có nghĩa là khi Q tăng lên 1 đơn vị sản phẩm thì C tăng lên 200 đơn vị sản phẩm
- 7) Nếu hàm số khả vi trên (a, b) thì :

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x$$
- 8) Nếu $y_1(x)$; $y_2(x)$ là 2 nghiệm riêng của pt vi phân
 $y'' + ay' + by = 0$ thì nghiệm tổng quát của nó là :
 $y(x) = C_1 \cdot y_1(x) + C_2 \cdot y_2(x)$ trong đó C_1, C_2 là hằng số
- 9) Nếu hàm số $f(x)$ xác định trên $[a, b]$ và $f(a) \cdot f(b) < 0$ thì tồn tại $x_0 \in (a, b)$ sao cho $f(x_0) = 0$
- 10) Nếu hàm số $f(x)$ bị chặn trên $[a, b]$ thì $f(x)$ liên tục trên $[a, b]$
- 11) Nếu $f(x, y)$ đạt cực tiểu tại (x_0, y_0) thì $f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$ cho mọi điểm (x, y)
- 12) Nếu hàm số $f(x)$ đạt cực trị tại x_0 thì $f'(x_0) = 0$
- 13) Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a, b]$ và có đạo hàm trong (a, b) thì tồn tại số $c \in (a, b)$ sao cho $f'(c) = 0$
- 14) Nếu $f(x)$ xác định trên $[a, b]$ và $f'(x) > 0$; $\forall x \in (a, b)$ thì $f(x) > f(a)$ cho mọi $x \in (a, b)$

(II) Giải các phương trình sau:

1) $y' - \frac{1}{x}y = 3x$

2) $y' - \frac{1}{x}y = \left(\frac{x}{y}\right)^2$

3) $y' - \frac{y}{x} - \frac{x}{y} = 0$

4) $y' - \frac{4}{x}y = x\sqrt{y}$

5) $y' + 2xy = e^x \cdot y^2$

6) $\frac{dy}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + 2y = 4x + 2$; $y(0) = -3$; $y'(0) = -1$

7) $y'' - 5y' + 6y = 13 \sin 3x$

8) $y'' - 2y' = 2e^x$; $y(1) = -1$; $y'(1) = 0$

9) $y'' - 4y' + 4y = x \cdot e^{2x}$

10) $y'' + y' - 2y = 2(1+x-x^2)$

(III) Mô hình Input - output:

1) Cho ma trận: $A = \begin{pmatrix} 0.13 & 0.11 & 0.11 \\ 0.11 & 0.12 & 0.13 \\ 0.12 & 0.13 & 0.12 \end{pmatrix}$

a) Nêu ý nghĩa kinh tế của hệ số $a_{23} = 0.13$

b) Tìm mức sản lượng của 3 nền kinh tế nếu nền kinh tế mở yêu cầu 3 ngành trên cung cấp cho nó những sản lượng tương ứng

(35, 45, 15)

2) Cho mô hình Input - output mới biết ma trận hệ số đầu vào:

$$A = \begin{pmatrix} 0.11 & 0.12 & 0.12 \\ 0.13 & 0.12 & 0.12 \\ 0.11 & 0.13 & 0.11 \end{pmatrix}$$

- a) Nếu sản lượng mỗi ngành kinh tế bằng 2000 thì ngành kinh tế thứ I, III phải cung cấp cho ngành thứ II bao nhiêu
- b) Tìm sản lượng của 3 ngành trên nếu yêu cầu của 3 ngành kinh tế mở là (250, 250, 130)

IV) Tích phân :

$$1) I_1 = \int_{-1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 4x + 5}$$

$$2) I_2 = \int_5^{+\infty} \frac{dx}{x \sqrt{x+4}}$$

$$3) I_3 = \int_0^{+\infty} (2x+1) e^{-x} \cdot dx$$

$$4) I_4 = \int_0^{+\infty} (3x+6) e^{-3x} \cdot dx$$

$$5) I_5 = \int_0^{1/e} \frac{dx}{x \cdot \ln^2 x}$$

$$6) I_6 = \int_0^{+\infty} (2x+3) e^{-x} \cdot dx$$

$$7) I_7 = \int_1^4 \frac{dx}{x \sqrt{x-1}}$$

$$8) I_8 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1}$$

$$9) I_9 = \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$10) I_{10} = \int_{-1}^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$$

CÂU HỎI ÔN TẬP MÔN TOÁN CAO CẤP ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

1) Nếu $A_1, A_2, \dots, A_m$ là 1 hệ vectơ độc lập tuyến tính (dltt) thì $m > n$ (trong R^n)

→ Sai! Những hệ vectơ n chiều có số vectơ m lớn hơn số chiều n thì pttt

2) Số vectơ trong mọi hệ vectơ dltt trong R^n đều bằng nhau

→ Sai!

VĐ: Trong R^3 : Lấy $A = \{(1; 0; 0); (0; 1; 0)\}$
 $B = \{(1; 0; 0); (0; 1; 0); (0; 0; 1)\}$

A, B đều là hệ vectơ (dltt) nhưng số vectơ của chúng không bằng nhau

3) Cho A là 1 ma trận thì $\det(A \cdot A^T) = \det A \det A^T$

→ Sai! Vì A phải là ma trận vuông thì biểu thức mới xảy ra

4) Nếu A là ma trận cấp $m \times n$ thì hạng $r(A) = \min(n, m)$

→ Đúng!

5) Nếu A, B là ma trận vuông cấp $n \times m$ thì $(A \cdot B)^T = A^T \cdot B^T$

→ Sai! Vì $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T \neq A^T \cdot B^T$

6) Nếu A là ma trận vuông cấp 3 và $\det A = 2$ thì $\det 2A = 4$

→ Sai!

VĐ: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = 1(-1)$

$2A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \det 2A = 2(-2)(-4) = 16$

7) Nếu hpt tuyến tính n ẩn có hạng của ma trận, hệ số mở rộng nhỏ hơn n ($r(A) < n$) thì hpt có vô số nghiệm:

→ Sai! Nếu $r(A) < r(\tilde{A})$: pt VN

Nếu $r(\tilde{A}) < n$ thì $r(A) < n \rightarrow$ pt vô nghiệm

8) Nếu $A = (a_{ij})_{3,3}$ là ma trận hệ số đều vào trong một phương trình input - output mở thì: $a_{11} + a_{12} + a_{13} < 1$
 → Đúng!

9) Nếu 1 hệ vectơ có 1 hệ con (đлт) thì hệ vectơ đó (đлт)
 → Sai! Vì hệ đлт khi tất cả hệ con đều (đлт)

10) Nếu $A_1, A_2, \dots, A_m$ hệ vectơ trong R^n và tồn tại m số thực $x_1, x_2, \dots, x_m$ để $x_1 A_1 + x_2 A_2 + \dots + x_m A_m = 0$ thì hệ vectơ trên pттт
 → Sai! Vì muốn hệ $\{A_1, A_2, \dots, A_m\}$ (ptтт) thì m số thực $x_1, x_2, \dots, x_m$ không đồng thời $= 0$. Nghĩa là:
 $\exists x_j \neq 0$ với $j = \overline{1, m}$

11) Nếu hệ vectơ gồm m vectơ trong R^n có hạng $= m$ thì hệ pттт
 → Sai! Theo đк của đề bài thì hệ đó giải (đлт)

12) Ma trận A có nghịch đảo khi và chỉ khi A là ma trận vuông
 → Sai! Không phải ma trận vuông lúc nào cũng nghịch đảo

VD: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ không có MT nghịch đảo A^{-1} vì $\det A = 0$
 $\Rightarrow A$ là MT suy biến
 $\Rightarrow A$ không có MT nghịch đảo

13) Nếu $O_{s,t}$ là ma trận không cấp $s \times t$ và A là ma trận cấp $m \times n$ thì:

$$\begin{cases} O_{k,m} A = A \\ O_{m,k} = O \end{cases}$$

→ Sai! Vì $O_{k,m} \neq O_{m,k}$

14) Nếu A, B là 2 ma trận cùng cấp và không suy biến thì $(A.B)^{-1} = A^{-1}.B^{-1}$
 → Sai! Vì $(A.B)^{-1} = B^{-1}.A^{-1} \neq A^{-1}.B^{-1}$

VD: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = \det A = 2$

15) Hệ pt tuyến tính thuần nhất luôn luôn có VSVN ?

→ Sai ! Vì hpt tuyến tính thuần nhất có VSVN khi hạng của MT < số ẩn của hpt

16) Hệ pt tuyến tính là hệ Cramer khi và chỉ khi hệ có nghiệm duy nhất

→ Sai ! Vì hpt Cramer có số pt = số ẩn và ma trận hệ số $\neq 0$

17) Nếu A, B là 2 MTV cùng cấp $n > 1$ thì $\det(A+B) = \det A + \det B$

→ Sai !

VD : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow (A+B) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$$\left. \begin{array}{l} \det A = 1 \\ \det B = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \det A + \det B = 3 \neq \det(A+B) = 6$$

18) Nếu 1 hệ vectơ pttt thì mọi hệ con của nó cũng pttt

→ Sai ! chỉ cần 1 hệ con pttt thì hệ vectơ đó pttt

19) Mọi Kgc của $\mathbb{R}^n$ đều có ít nhất 1 cơ sở

→ Đúng !

20) Hạng của vectơ trong $\mathbb{R}^n$ bằng số chiều của Kgc sinh bởi hệ vectơ đó

→ Đúng !

21) Mọi hpt tuyến tính có hạng của ma trận hệ số = hạng ma trận hệ số mở rộng là hệ Cramer

→ Sai ! Hệ đó là Cramer khi $\kappa(A) = \kappa(\tilde{A})$ và $\kappa = n$ (số pt)

22) Cho A, B là 2 MTV đồng dạng. Nếu $\det A = 0$ thì $\det B = 0$

→ Đúng !

23) Nếu hpt tuyến tính có hạng của ma trận hệ số = số ẩn của hệ thì hpt có nghiệm đn

→ Đúng !

24) Nếu A, B là 2 MTV cùng cấp không suy biến thì $\det(B^{-1}ABA) = \det(A)$

→ Đúng !

25) Nếu 1 hệ vectơ ptt thì hạng của hệ vectơ bằng số vectơ trong hệ.
 → Sai! Ví dụ hạng của hệ = số vectơ trong hệ → hệ (đtt)

VĐ: Cho các vectơ: $u_1 = (1, 3, 4)$; $u_2 = (0, 0, 2)$; $u_3 = (0, 0, 5)$
 Hệ $\{u_1, u_2, u_3\}$ là ptt vì $u_3 = \frac{5}{2} u_2$

Xét MT liên kết

$$A \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_3 \rightarrow 2d_3 - 5d_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

→ $r(A) = 2 \neq 3$: số vectơ

Hay: Hạng của 1 hệ vectơ bằng số vectơ trong hệ → hệ (đtt)

26) Mọi Kgc của $\mathbb{R}^n$ có vô số vectơ

→ Sai! VĐ: vectơ 0 cũng là Kgc của $\mathbb{R}^n$

27) Hai hệ vectơ trong Kq $\mathbb{R}^n$ có số vectơ bằng nhau thì hạng của 2 hệ bằng nhau

→ Sai! VĐ: Xét 2 MT liên kết của 2 hệ vectơ có cùng số vectơ = 3

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow r(A_1) = 2$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow r(A_2) = 3$$

28) Cho A, B là 2 MT vuông cùng cấp. Nếu $A \cdot B = 0$ thì $\det A = \det B = 0$
 → Đúng!

29) Mọi hpt tuyến tính có số ẩn bằng số pt $\Rightarrow$ hệ Cramer

→ Sai! Mọi hpt tuyến tính có số ẩn = số pt và MT hệ số không suy biến $\Rightarrow$ đó là hệ Cramer

30) Mọi hpt tuyến tính có số pt lớn hơn số ẩn thì hệ VN

→ Sai! VĐ:

$$\begin{cases} 2x + y = 4 \\ x + y = 3 \\ \frac{3}{2}x + \frac{1}{4}y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

21) Nếu MTA có nghịch đảo và $\det A = \det A^{-1}$ thì $A = 1$

→ Sai! A là MTA thì chưa chắc tồn tại A^{-1}

32) Nếu A là MT thì $\det(A^T \cdot A) = \det(A \cdot A^T)$

→ Sai! A là MT thì chưa chắc tồn tại $\det A$

33) Nếu hệ vectơ gồm m vectơ trong $\mathbb{R}^n$ có hạng = m thì hệ pttt

→ Sai! Theo điều kiện của đề bài thì hệ đó phải (dltt)

34) Hạng của 1 hệ vectơ dltt cực đại của 1 hệ vectơ luôn luôn nhỏ hơn hạng của hệ vectơ đó

→ Sai! Hạng của hệ vectơ dltt cực đại cũng chính là hạng của hệ vectơ đó

35) Nếu ma trận đường chéo (có định thức = 1) thì ma trận đó là MT đơn vị

→ Sai! VD: $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \rightarrow \det A = 1$ nhưng A không phải là MT đơn vị

36) Trong hpttt hạng của MT = hạng của MT hệ số mở rộng thì hệ có nghiệm

→ Đúng

37) Cho V là Kgc của $\mathbb{R}^4$ thì mọi cơ sở của V đều có 4 vectơ

→ Sai! VD: Cho $V = \{x(x, x, 0, 0), x \in \mathbb{R}\}$ là 1 Kgc của $\mathbb{R}^4$ nhưng cơ sở chỉ gồm 1 vectơ là $A = (1, 1, 0, 0)$

38) Ma trận của 1 phép biến đổi tuyến tính trong $\mathbb{R}^n$ theo cơ sở đơn vị là 1 MTV cấp n không suy biến

→ Sai! VD: $f(x) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = A \cdot x$

với: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ có $|A| = 0 \Rightarrow$ MT suy biến

39) Nếu 1 hệ vectơ trong $\mathbb{R}^n$ pttt thì mọi vectơ của hệ là tổ hợp tuyến tính của những vectơ còn lại

→ Sai! VD: $\begin{cases} A_1 = (1, 1) \\ A_2 = (0, 0) \end{cases}$ pttt vì chứa vectơ 0 nhưng vectơ A_1 không được sinh ra từ vectơ A_2 của hệ

40) Mọi hệ vectơ pttt trong $\mathbb{R}^n$ đều có số vectơ lớn hơn n
 $\rightarrow$ Sai! VD: $\begin{cases} A_1 = (1, 1, 1) \\ A_2 = (2, 2, 2) \end{cases}$ là hệ pttt vì $A_2 = 2A_1$
 $(\mathbb{R}^3)$ gồm 2 vectơ A_1, A_2

41) Hàng của hệ vectơ luôn luôn nhỏ hơn số vectơ trong hệ
 $\rightarrow$ Sai! VD: $\begin{cases} A_1 = (1, 0) \\ A_2 = (0, 1) \end{cases}$ có $\text{rank}(A_1, A_2) = 2 =$ số vectơ trong hệ



Ghi chú:

- M là tập sinh của $V \Leftrightarrow \forall \text{ vectơ } \in V$ đều là tổ hợp tt của các vectơ trong M ($M \subset P$)
- $V \ni B = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$ (cơ sở) của $(V) \Leftrightarrow B$ (đлтт) (B sinh ra V)
- Số vectơ đлтт cực đại của 1 hệ vectơ = hạng của hệ vectơ đó
- A^T : Ma trận chuyển vị có tử A bằng cách đổi các dòng thành các cột ($A_{\min} \rightarrow A^T_{\min}$)
- A^{-1} : MT nghịch đảo ($A \cdot A^{-1} = I$; với I : Ma trận đơn vị)
- $\tilde{A}$: MT phụ hợp

Giải Tích

1) Mọi dãy số bị chặn đều có giới hạn.

→ Sai! Vì dãy đơn điệu và bị chặn thì có giới hạn

2) Hàm số liên tục tại x_0 thì có đạo hàm tại x_0

→ Sai! Chỉ có hàm số cấp thì mới thỏa yêu cầu đề bài

3) VD: $y = f(x) = |x|$ với $x_0 = 0 \rightarrow f(x)$ liên tục tại $x_0 = 0$

• $f(0) = 0$

• $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x} = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1 \end{cases}$

$\rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} \rightarrow$ Hàm số $y = f(x)$ không có đạo hàm tại $x_0 = 0$

3) Hàm số liên tục tại điểm nào thì có giới hạn tại điểm đó

→ Đúng

4) Hàm số liên tục trên $[a, b]$ thì bị chặn trên (a, b)

→ Sai! VD: $f(x) = \frac{1}{x-1}$ liên tục trên $(1, 4)$

nhưng $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty$

$\Rightarrow f(x)$ không bị chặn trên $(1, 4)$

5) Nếu hàm số $f(x, y)$ có đạo hàm hỗn hợp cấp 2 tại (x_0, y_0)

thì: $\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \cdot \partial y} = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y \cdot \partial x}$

→ Sai!

VD: $f(x, y) = \frac{1}{x-y} = z$ có đạo hàm cấp 2 tại điểm $(1, 2)$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-1}{(x-y)^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x \cdot \partial y} = \frac{2}{(x-y)^3}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{(x-y)^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial y \cdot \partial x} = \frac{-2}{(x-y)^3}$$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \cdot \partial y} &= -2 \\ \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y \cdot \partial x} &= 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x \cdot \partial y} \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \cdot \partial x} \text{ (trái gt)}$$

6) Nếu hàm số đạt cực đại tại (x_0, y_0) thì: $f(x_0, y_0) \geq f(x, y) \forall x, y$
 $\rightarrow$ Sai! Điều này chỉ đúng trên 1 lân cận của (x_0, y_0)

7) Nếu hàm số $f(x)$ khả tích trên $[a, b]$ thì $f(x)$ liên tục trên $[a, b]$
 $\rightarrow$ Sai! Vì nếu $f(x)$ liên tục hay gián đoạn tại 1 số hữu hạn thì $f(x)$ vẫn khả tích trên $[a, b]$

8) Nếu y_1, y_2 là nghiệm của phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 thì $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ cũng là nghiệm phải độc lập tuyến tính với nhau

9) Nếu hàm số $f(x, y)$ đạt cực trị tại (x_0, y_0) và khả vi tại điểm đó thì $df(x_0, y_0) = 0$

$\rightarrow$ Đúng

10) Mọi dãy số tăng và bị chặn đều có giới hạn hữu hạn

$\rightarrow$ Đúng

11) Nếu $\lim f(x)$ tồn tại và hữu hạn thì $f(x)$ liên tục tại x_0

$\rightarrow$ Sai! Vì chưa chắc $\lim f(x) = f(x_0)$

12) Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a, b]$ và $f(a) = f(b)$ thì $\exists$ ít nhất $c \in (a, b)$ sao cho $f(c) = 0$

$\rightarrow$ Sai! Vì thiếu tính khả vi (ĐL Rolle)

13) Nếu hàm số tại 1 điểm không có giá trị thì doanh thu giảm khi giá cả tăng

$\rightarrow$ Sai! Tại điểm không có giá trị thì giá tăng nên doanh thu tăng

14) Nếu $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = 0$ thì $f(x, y)$ cực đại tại (x_0, y_0)

→ Sai! Ví dụ (x_0, y_0) chỉ là điểm nghi ngờ, giả thiết lại bằng
MT Heral

15) Nếu $h_x f(x)$ bị chặn trên $[a, b]$ thì $f(x)$ có tích phân xác định

→ Sai! $f(x)$ có tích phân xác định thì $f(x)$ bị chặn trên $[a, b]$ và liên tục trên $[a, b]$ tại 1 số hữu hạn điểm

16) Nếu f và G là 2 nguyên hàm của f trên $[a, b]$ thì $F(x) = G(x)$ $\forall x \in (a, b)$

→ Sai! VD: $f = 0$; $F = 1$; $G = 2$. Ta thấy F và G là 2 nguyên hàm của $f(x)$ trên (a, b) bất kỳ nhưng $F \neq G \forall x \in (a, b)$

17) Nếu $f(x, y)$ có các đạo hàm liên tục thì $f(x)$ liên tục

→ Đúng!

18) Nếu $f'(x) > g'(x)$ với $\forall x \in (a, b)$ thì $f(x) > g(x) \forall x \in [a, b]$

→ Sai!

$$\text{VD: } \begin{cases} f(x) = 2x & \forall x \in (-1, 1) \Rightarrow f(-\frac{1}{2}) = -1 \\ g(x) = x & \forall x \in (-1, 1) \Rightarrow g(-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow f(-\frac{1}{2}) < g(-\frac{1}{2})$$

$$\rightarrow \begin{cases} f'(x) = 2 \\ g'(x) = 1 \end{cases} \Rightarrow f'(x) > g'(x)$$

$\Rightarrow$ giả thiết sai

19) Với $f(x, y)$ là hàm hai biến xác định tại (x_0, y_0) ta luôn có:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0)$$

→ Sai! VD: $f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{nếu } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

$$\begin{cases} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) = 1 \\ f(0, 0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) \neq f(0, 0)$$

20) Cho 2 đại lượng x, y có $y = f(x)$ và f khả vi. Ta luôn có:

$$E_{yx} = y^{-1} \left(\frac{dy}{dx} \right)$$

→ Sai! Vì: $E_{yx} = \frac{x}{y} \cdot \frac{dy}{dx}$

21) Nếu phương trình vi phân $y'' + ay' + by = 0$ có $b^2 - 4ac < 0$ thì ptVN
→ Đúng sai vì trong đề không có c

22) Nếu hàm 2 biến có các đạo hàm riêng $= 0$ tại (x_0, y_0) thì đạt cực
đại tại (x_0, y_0)

→ Sai! Vì khi đó (x_0, y_0) chỉ là điểm nghi ngờ

23) Nếu hàm $f(x)$ (l) $[a, b]$ có $f(a) = a$; $f(b) = b$; $\exists c \in [a, b]$:

$$f(c) = 1$$

→ Sai! VD: $f(x) = x + x \in [2, 3]$. Dễ dàng thấy:

$f(x)$ l $[2, 3]$ nhưng không t $c \in [2, 3]$ để $f(c) = 1$

24) Nếu hàm $f(x)$ bị chặn trên $[a, b]$ thì $f(x)$ l trên $[a, b]$

→ Sai! VD: $f: [0, 1]$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } x < 1 \\ 1 & \text{nếu } x \geq 1 \end{cases} \Rightarrow f(x) \text{ không l tại } x_0 = 1$$

25) Nếu hàm số $f(x, y)$ xác định tại (x_0, y_0) thì $f(x)$ l tại (x_0, y_0)

→ Giả thuyết giống câu 20

26) Dt vi phân $y'' + ay' + by = cx + d$ với a, b, c, d là hằng số' luôn
luôn có 1 nghiệm dạng $y = kx + m$

→ Sai! Ta có: $y = kx + m \Rightarrow y' = k \Rightarrow y'' = 0$

$$\Rightarrow ak + b(kx + m) = cx + d$$

$$\Rightarrow bkx + ak + bm = cx + d \quad \forall x$$

Đồng nhất 2 vế pt ta được $\begin{cases} bk = c \\ ak + bm = d \end{cases}$

Nếu $\begin{cases} c = 1 \\ b = 0 \end{cases}$ thì hệ

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \cdot k = 1 \\ ak + 0 \cdot m = d \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ hpt VN

27) Tích của 1 hàm số' vô cùng bé khi $x \rightarrow x_0$ là 1 vô cùng bé khi $x \rightarrow x_0$

→ Sai! Tích của 1 hàm số' vô cùng bé với 1 đại lượng vô hướng thì mới thỏa ycđb

vđ: $f(x) = x \quad \forall x \in (0,1) ; \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \Rightarrow f(x) : (VCB) (0,1)$
 $g(x) = \frac{1}{x} \quad x \in (0,1) ; \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \infty \Rightarrow g(x) : (VCL) (0,1)$

→ $f(x) \cdot g(x) = x \cdot \frac{1}{x} = 1$ không là 1 VCB ($x \rightarrow 0$)

28) Đạo hàm hỗn hợp của hàm 2 biến không phụ thuộc vào thứ tự lấy đạo hàm theo các biến

→ Sai! Điều này chỉ đúng khi hs có đạo hàm riêng cấp 2 và tất cả các đạo hàm riêng này phải liên tục

29) Nếu hàm 2 biến có đạo hàm riêng = 0 tại (x_0, y_0) thì đạt cực đại tại (x_0, y_0)

→ Câu 20

30) Nếu y_1, y_2 là 2 nghiệm của pt. vi phân tuyến tính cấp 2 thì $y_1 + y_2$ cũng là nghiệm của pt nói trên

→ Sai! vđ: $y'' + y' + 1 = 0 \quad (*)$

Nếu y_1, y_2 là 2 nghiệm của pt (*) thì:

$$\begin{cases} y_1'' + y_1' + 1 = 0 & (1) \\ y_2'' + y_2' + 1 = 0 & (2) \end{cases}$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow y_1'' + y_2'' + y_1' + y_2' + 2 = 0$

$\Leftrightarrow (y_1 + y_2)'' + (y_1 + y_2)' + 2 = 0$

Do đó: $(y_1 + y_2)' + (y_1 + y_2) + 1 \neq 0$

→ $(y_1 + y_2)$ không là nghiệm của pt (*)

Nếu $f(x)$ khả tích trên $[a, b]$ thì có ít nhất 1 điểm $c \in (a, b)$ để: $\int_a^b f(x) \cdot dx = f(c)(b-a)$

→ Sai! Chỉ chắc chắn đúng khi f liên tục trên $[a, b]$

Nếu $f(x)$ liên tục tại điểm nào thì khả vi tại điểm đó

→ Sai! Hàm số chỉ khả vi khi $f(x)$ có đạo hàm và $df(x) = f'(x_0) \cdot \Delta x$ và $f(x)$ liên tục tại điểm nào thì chưa chắc có đạo hàm tại điểm đó

Nếu $f(x, y)$ đạt cực đại tại (x_0, y_0) thì:

$$\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \cdot \partial y}(x_0, y_0) = 0$$

→ Sai! VD: $f(x, y) = -x^2 - y^2 + 2x + 2y + 6$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -2x + 2 \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -2y + 4$$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 2 = 0 \\ -2y + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

Đúng. Nếu $f(x)$ liên tục $[a, b]$ thì $f(x)$ khả tích trên $[a, b]$

1. Nếu $f(x)$ khả tích $[a, b]$ thì $f(x)$ khả vi $[a, b]$

→ Sai! Vì $f(x)$ khả tích thì chưa chắc $f(x)$ liên tục $[a, b]$ mà không liên tục thì $f(x)$ không khả vi trên $[a, b]$

Một số phương pháp tính nhanh

① Phương pháp tính nhanh ma trận nghịch đảo trên máy tính:

VD: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & 0 \end{pmatrix}$. Tính A^{-1}

Giải: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Sau đó ta giải hệ 3 ẩn:

$$\begin{array}{lll} a_1 = 1 & b_1 = 1 & c_1 = -3 \\ a_2 = -1 & b_2 = 0 & c_2 = 2 \\ a_3 = 3 & b_3 = 5 & c_3 = 0 \end{array}$$

Lần lượt thay thế bộ $d_1, d_2, d_3 = (1, 0, 0) \vee (0, 1, 0) \vee (0, 0, 1)$

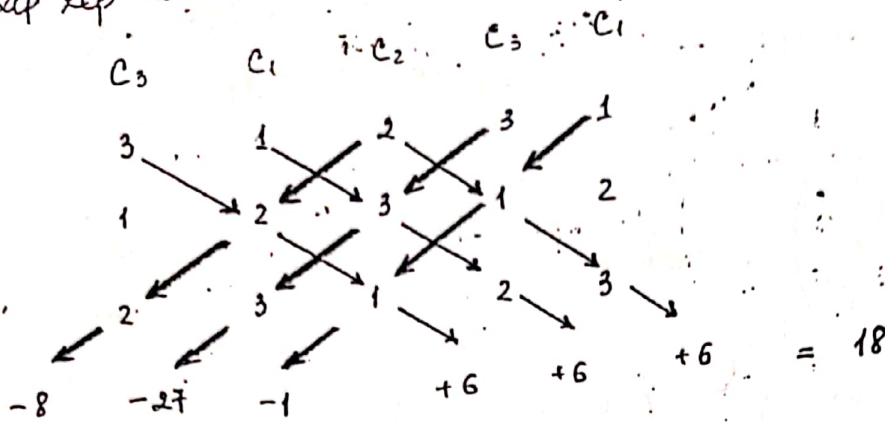
$$\rightarrow No = \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} \quad No = \begin{pmatrix} 15 \\ 9 \\ 8 \end{pmatrix} \quad No = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 10 & 15 & -2 \\ 6 & 9 & -1 \\ 5 & 8 & -1 \end{pmatrix}$$

② Phương pháp tính định thức cấp cao không bị nhầm lẫn và dễ nhớ:

VD: Xét định thức: $A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

Sắp xếp lại như sau :



" Sắp trừ huyền công " theo dấu mũi tên