ĐẠI HỌC QUỐC GIA THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN
KHOA TOÁN-TIN HỌC

oOo

Nguyễn Thị Hồng Nhung

Đại Số 2

THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH

Ngày 6 tháng 11 năm 2016

Mục lục

1 Khái niệm ma trận

1.1 Định nghĩa

Ma trận là một bảng có dạng

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

(một bảng chữ nhật gồm $m \times n$ phần tử trong $\mathbb{R}$ được viết thành m dòng và n cột) trong đó $a_{ij} \in \mathbb{R}$ là phần tử ở vị trí dòng i, cột j của A, $m \times n$ được gọi là cấp của ma trận A.

Đôi khi A được viết ngắn gọn là $A = (a_{ij})$ hay $A = [a_{ij}]$.

- Các ma trận thường được ký hiệu bởi A, B, C, ...
- Tập hợp tất cả các ma trận loại $m \times n$ trên $\mathbb{R}$ được ký hiệu bởi $M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Khi $m = n$, ta dùng $M_n(\mathbb{R})$ thay cho $M_{n\times n}(\mathbb{R})$.

Ví dụ 1. $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ là ma trận cấp 2×3. $B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ là ma trận cấp 3×2.

Ví dụ 2. Cho ma trận A có các phần tử thỏa $a_{ij} = i^2 - j^2, \forall i = 1, .., 3,\ j = 1, ..., 4$. Viết tường minh (dạng bảng) cho ma trận A .

1.2 Một số ma trận hình chữ nhật đặc biệt

Định nghĩa 1 (Ma trận (vectơ) dòng (Row vector))**.** Ma trận cấp $1 \times n$ được gọi là ma trận hàng (dòng).

Định nghĩa 2 (Ma trận (vectơ) cột (Column vector))**.** Ma trận cấp $m \times 1$ được gọi là ma trận cột.

Định nghĩa 3. Nếu $a_{ij} = 0,\ \forall i, j$ thì ta nói A là *ma trận không*. Ký hiệu $A = \mathbf{0}_{m\times n}$

1.3 Một số ma trận vuông đặc biệt

Định nghĩa 4 (Ma trận vuông)**.** Nếu $m = n$ thì A được gọi là *ma trận vuông cấp* n trên $\mathbb{R}$. Tập tất cả các ma trận vuông cấp n trên $\mathbb{R}$ được ký hiệu là $M_n(\mathbb{R})$.

Định nghĩa 5. Nếu $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ thì đường chứa các phần tử $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{nn}$ được gọi là *đường chéo chính* (hay *đường chéo*) của A.

Định nghĩa 6. Cho $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$. Khi đó

- Nếu $a_{ij} = 0,\ \forall i \neq j$ (nghĩa là tất cả các phần tử bên ngoài đường chéo của A đều bằng 0) thì ta nói A là một *ma trận đường chéo.*
- Nếu $a_{ij} = 0,\ \forall i > j$ (nghĩa là tất cả các phần tử bên dưới đường chéo của A đều bằng 0) thì ta nói A là một *ma trận tam giác trên.*
- Nếu $a_{ij} = 0,\ \forall i < j$ (nghĩa là tất cả các phần tử bên trên đường chéo của A đều bằng 0) thì ta nói A là một *ma trận tam giác dưới.*

Ví dụ 3. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; $C = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$,

thì A là ma trận đường chéo, B là ma trận tam giác trên, C là ma trận tam giác dưới.

Định nghĩa 7. Ma trận đơn vị n là ma trận đường chéo, mà các phần tử trên đường chéo đều bằng 1, ký hiệu bởi I_n, nghĩa là

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix},$$

Định nghĩa 8 (*Ma trận đối xứng (Symmetric matrix), Ma trận phản xứng (Skew symmetric matrix).*)**.** Cho ma trận $A \in M_n(\mathbb{R})$. Ma trận A được gọi là ma trận đối xứng nếu $a_{ij} = a_{ji}\,\forall i = \overline{1,n}, j = \overline{1,n}$.

Ma trận A được gọi là ma trận phản xứng nếu $a_{ij} = -a_{ji}\,\forall i = \overline{1,n}, j = \overline{1,n}$.

Ví dụ 4. Cho và $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.
A, B có phản xứng hay đối xứng không?

Bài tập 1.1. Cho $A \in M_n(\mathbb{R})$ là ma trận phản xứng. Chứng minh rằng

(i) Tất cả các phần tử trên đường chéo của ma trận A bằng 0.

(ii) Tổng tất cả các phần tử của ma trận A bằng 0.

2 Các phép toán trên ma trận

2.1 Phép chuyển vị

Định nghĩa 9 (Hai ma trận bằng nhau)**.** Cho hai ma trận A, B. Ta nói A bằng B, [1] ký hiệu $A = B$, nếu A và B cùng cấp, $m \times n$, và

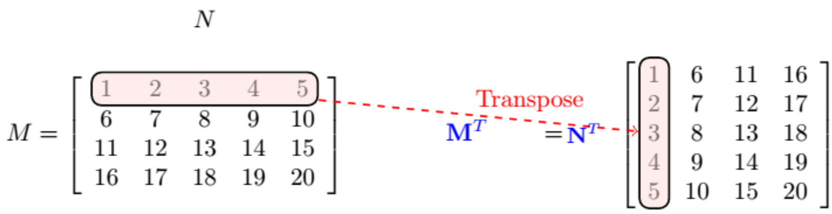
$$a_{ij} = b_{ij}, \forall 1 \le i \le m, 1 \le j \le n.$$

Ví dụ 5. Xét $A = \begin{bmatrix} p & q \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ n & 0 \end{bmatrix}$. Với p, q, n nào thì $A = B$?

Nhận xét 1. Quan hệ bằng cho phép ta: xác định một đối tượng trong tập hợp (hoặc xác định một đối tượng trong một lớp tương đương, đồng nhất các đối tượng cùng đặc tính. Thí dụ khái niệm vector là một lớp tương đương, một số thực là một lớp tương đương, ...). Từ quan hệ "=", ta có thể xây dựng được các đẳng thức, đồng nhất thức.

Định nghĩa 10 (Ma trận chuyển vị)**.** Cho ma trận $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Ta nói $B \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$ là ma trận chuyển vị của A (ký hiệu $B = A^T$) nếu

$$b_{ij} = a_{ji}, \forall i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}.$$



Hình 1: Minh họa chuyển vị ma trận thông qua thí dụ

Ví dụ 6. Cho $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 9 & 7 & 6 \\ 4 & 2 & 8 & 0 \end{bmatrix}$. Xác định A^T .

Tính chất 1. Cho $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Khi đó

i) $(A^T)^T = A$;

[1]Robert Recorde - the man who invented the equals sign in 1557 (http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/history/Biographies/Recorde.html).

ii) $A^T = B^T \Leftrightarrow A = B$.

Nhận xét 2. Giả sử $A \in M_n(\mathbb{R})$. Nếu $A^T = A$ thì ta nói A là một **ma trận đối xứng**; nếu $A^T = -A$ thì ta nói A là một **ma trận phản đối xứng** (hay **phản xứng**).

Ví dụ 7. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ và $B = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ thì A là ma trận đối xứng và B là ma trận phản đối xứng.

2.2 Tổng hai ma trận

Định nghĩa 11 (Tổng hai ma trận)**.** Cho $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Ta gọi tổng của A và B, ký hiệu $A + B$, là một ma trận $C = (c_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ được xác định bởi

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \forall i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}.$$

Bài tập 2.1. Tìm đáp án đúng cho $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

a. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

b. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

c. $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.

d. A không tồn tại.

Tính chất 2. Cho A, B, $C \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ và α, $\beta \in \mathbb{R}$. Khi đó

(i) $A + B = B + A$;

(ii) $(A + B) + C = A + (B + C)$;

(iii) $A + \mathbf{0} = \mathbf{0} + A = A$;

(iv) $A + (-A) = (-A) + A = \mathbf{0}$;

(v) $(A+B)^T = A^T + B^T$;

(vi) $\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$;

(vii) $(\alpha+\beta)A = \alpha A + \beta A$.

Tính chất 3. Mọi ma trận vuông bất kỳ có thể phân tích thành tổng một ma trận đối xứng và một ma trận phản xứng.

2.3 Tích một số với một ma trận

Định nghĩa 12 (Tích một số với ma trận)**.** Cho $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Ta gọi tích α và A (ký hiệu αA) là một ma trận $C = (c_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ được xác định bởi $c_{ij} = \alpha a_{ij}, \forall i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}$.

Nhận xét 3. Với $\alpha = -1$, ma trận $(-1)A$ được ký hiệu là $-A$.

Định nghĩa 13 (Hiệu của ma trận A và B)**.** Hiệu của ma trận A và B được định nghĩa $A - B := A + (-B)$.

Ví dụ 8. Cho $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}$ và $B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

1. Tính $3A \pm 2B$
2. Tìm ma trận C sao cho $2A + 3B - 4C = 0$

Tính chất 4. Nếu $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ và α, $\beta \in \mathbb{R}$ thì

(i) $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$;

(ii) $(\alpha A)^T = \alpha(A)^T$.

2.4 Tích hai ma trận

Định nghĩa 14 (Tích hai ma trận)**.** Cho $A \in M_{m\times r}(\mathbb{R}), B \in M_{r\times n}(\mathbb{R})$. Ta gọi tích của A và B, ký hiệu AB, là một ma trận $C = (c_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ được xác định bởi

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{r} a_{ik} b_{kj}, \forall 1 \le i \le m, 1 \le j \le n.$$

Nhận xét 4. c_{ij} là tổng của tích tương ứng các thành phần dòng i của A và cột j của B (tích vô hướng tổng quát).

Ví dụ 9. Cho $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ và $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Khẳng định nào sau đây là đúng?

a) AB và BA đều không xác định.

b) AB xác định nhưng BA không xác định.

c) BA xác định nhưng AB không xác định.

d) AB và BA đều xác định.

Ví dụ 10 (Ứng dụng trong kinh tế)**.** Một nhà máy chuyển đến ba cửa hàng (A, B và C), mỗi cửa hàng nhận một bưu kiện, mỗi bưu kiện gồm 4 loại sản phẩm (air conditioner, ice box, 29"color TV và 25"color TV) với trọng lượng và đơn giá cho mỗi sản phẩm và số lượng sản phẩm gửi cho từng của hàng như Bảng 1 ([**?**] Deng, Jixia. Application of linear algebra in real life. Applied Mechanics & Materials (2014). http://www.scientific.net/AMM.556-562.3392).

	air conditioner	ice box	29"color TV	25"color TV
A	30	20	50	20
B	0	7	10	0
C	50	40	50	50
Đơn giá	30	16	22	18
Trọng lượng	40	30	30	20

Bảng 1: Bảng trọng lượng và đơn giá các mặt hàng

Khi đó, công ty chuyển đến các cửa hàng 4 sản phẩm trên với số lượng của thể diễn tả như ma trận E và đơn giá và trọng lượng cho mỗi loại sản phẩm có thể diễn tả bằng ma trận F

$$E = \begin{bmatrix} 30 & 20 & 50 & 20 \\ 0 & 10 & 7 & 0 \\ 50 & 40 & 50 & 50 \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} 30 & 16 & 22 & 18 \\ 40 & 30 & 30 & 20 \end{bmatrix}^T.$$

Tính EF và diễn giải ý nghĩa cho ma trận EF.

Tính chất 5. Cho A, $A' \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, B, $B' \in M_{n\times p}(\mathbb{R})$, $C \in M_{p\times q}(\mathbb{R})$, $D \in M_n(\mathbb{R})$ và $\alpha \in \mathbb{R}$. Khi đó

(i) (Luật kết hợp) $(AB)C = A(BC)$;

(ii) (Luật phân phối) $A(B \pm B') = AB \pm AB'$;
$(A \pm A')B = AB \pm A'B$;

(iii) $A\mathbf{0}_{n\times p} = \mathbf{0}_{m\times p}, \mathbf{0}_{r\times m}A = \mathbf{0}_{r\times n}$;
$DI_n = I_nD = D$;

(iv) $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$

(v) $(AB)^T = B^TA^T$;

Tính chất 6. Tổng (hiệu, tích) hai ma trận tam giác trên (dưới) cùng cấp là ma trận tam giác trên (dưới).

Ví dụ 11. Cho $A \in M_{5\times 4}(\mathbb{R})$, $B \in M_{4\times 2}(\mathbb{R})$, $C \in M_{2\times 1}(\mathbb{R})$ xác định như sau $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 4 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$.
Tính $(AB)C$ và $A(BC)$. Chú ý thời gian tính toán và đưa ra nhận xét nên tính theo thứ tự nào? Giải thích.

Ví dụ 12. Cho m, n, p, r là các số nguyên dương, và $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, $B \in M_{n\times p}(\mathbb{R})$, $C \in M_{p\times r}(\mathbb{R})$. Đưa ra điều kiện chọn thứ tự nhân ma trận (dựa vào số lượng phép nhân cần dùng).

Tính chất 7.

1. Phép nhân ma trận không giao hoán, nghĩa là tồn tại hai ma trận A, B sao cho $AB \neq BA$. Khi AB tồn tại mà BA không tồn tại. Trong trường hợp cả hai tồn tại cũng không chắc bằng nhau (xem Bài tập 9).
   Hãy cho ví dụ.

2. Với $A, B \neq \mathbf{0}$, vẫn có thể xảy ra trường hợp $AB = \mathbf{0}$.
   $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Hãy kiểm tra lại!

3. $AB = \mathbf{0} \not\Rightarrow A = \mathbf{0} \vee B = \mathbf{0}$.

4. A, B giao hoán khi và chỉ khi $(AB)^T = A^T B^T$.

5. $AB = AC \not\Rightarrow B = C$.

Định nghĩa 15 (Tích nhiều ma trận)**.** Tích các ma trận $P_1, P_2, ..., P_k$ (theo thứ tự đó) với điều kiện số cột ma trận liền trước bằng số dòng ma trận liền sau là

$$P_1 P_2 ... P_k := (...((P_1 P_2) P_3) ...) P_k.$$

Và có thể viết dưới dạng đệ quy như sau: với mỗi $k > 2$ thì

$$P_1 P_2 ... P_k := (P_1 P_2 ... P_{k-1}) P_k.$$

Tính chất 8. Nếu $P_1 ... P_k$ xác định thì $(P_1 ... P_k)^T = {P_k}^T {P_{k-1}}^T ... {P_1}^T$.

Ví dụ 13. Tính $AB - BA$ trong các trường hợp sau

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$;

2. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

2.5 Bài tập

Bài tập 2.2. Cho $A = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 3 & 0 & -4 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & 5 \end{bmatrix}, \ C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$. Tìm $3A + 4B - 2C$.

Bài tập 2.3. Tìm x, y, z nếu

$$3 \begin{Bmatrix} x & y \\ z & w \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} x & 6 \\ -1 & 2w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & x+y \\ z+w & 3 \end{bmatrix} \tag{1}$$

Bài tập 2.4. Cho $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$. Tính AB

Bài tập 2.5. Cho $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$. Tính $A^T A$.

Bài tập 2.6. Cho $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$. Tìm $2A^3 - 4B + 5I$.

Bài tập 2.7. Tìm x, y nếu $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 6 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

Bài tập 2.8. Tìm x, y, z thỏa mãn $\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$.

Bài tập 2.9. Cho $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Tìm A^n

Bài tập 2.10. Tính $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}^{2003}$

Bài tập 2.11. Tìm tất cả các ma trận $A = \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & z \end{bmatrix}$ sao cho $A^n = I,\ n > 0$.

3 Lũy thừa ma trận

3.1 Khái niệm

Định nghĩa 16. Cho A là ma trận vuông cấp n, k là số nguyên không âm. Khi đó lũy thừa bậc k của A là một ma trận cấp n (ký hiệu A^k) được xác định một cách quy nạp như sau

$$A^0 = \mathbf{I}_n,\ A^1 = A,\ A^2 = AA, \dots,\ \mathbf{A}^k = \mathbf{A}^{k-1}A.$$

Định nghĩa 17 (Lũy thừa ma trận). Lũy thừa ma trận A có thể định nghĩa bằng cách dùng Định nghĩa 15 với $P_1 = P_2 = ... = P_k = A$.

Ví dụ 14. Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Tính $B = A^3$.

a. $B = A$.

b. $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

c. $B = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$.

d. Tất cả các KQ trên đều sai.

Tính chất 9. Cho A là ma trận vuông cấp n, r và s là các số nguyên không âm.

1. Với $r > 0$, $(\mathbf{0}_n)^r = \mathbf{0}_n$
2. $(\mathbf{I}_n)^r = \mathbf{I}_n$
3. $\mathbf{A}^{r+s} = \mathbf{A}^r\mathbf{A}^s$
4. $\mathbf{A}^{rs} = (\mathbf{A}^r)^s$

Tính chất 10. Cho $k \in \mathbb{N}, A, B \in M_n(\mathbb{R})$ sao cho chúng giao hoán nhau, nghĩa là $AB = BA$. Khi đó

(i) $(AB)^k = A^kB^k$;

(ii) $A^k - B^k = (A - B)(A^{k-1} + A^{k-2}B + ... + B^{k-1})$;

(iii) $(A + B)^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} A^kB^{n-k}$.

3.2 Đa thức ma trận

Định nghĩa 18. Cho $A \in M_n(\mathbb{R})$ và đa thức bậc có hệ số thực

$$f(x) = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + ... + a_1 x + a_0.$$

Khi đó

$$f(A) := a_m A^m + a_{m-1}A^{m-1} + ... + a_1 A + a_0 I_n$$

được gọi là thức ma trận theo ma trận A.

Ví dụ 15 (Bài tập 1.12 (b) [?])**.** Hãy xác định $f(A)$ với $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$; $f(x) = 3x^3 - 2x^2 - x + 2$.

Ví dụ 16. Cho $A \in M_n(\mathbb{R})$ thỏa $A^2 - 2A + I_n = \mathbf{0}$. Đặt $B = I_n + A + ... + A^n$. Xác định A^n và B theo A và I_n.

Ví dụ 17. Tính A^{2014}, trong đó $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Hướng dẫn 1.

- Cách 1: Bắt chước nhà toán học: Tính A^n với n là số nguyên dương tùy ý và sau cùng lấy $n = 2014$.
- Cách 2: Dùng "Nhị thức Newton". Ta có

$$A = I_2 + N, \tag{2}$$

  trong đó $N = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ và có tính chất $N^2 = \mathbf{0}$.
- *Cách 3: Dùng ma trận chéo.*
- *Cách 4: Dùng dãy số.*

3.3 Phương pháp chứng minh bằng qui nạp toán học

Cho $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$ là tập các số tự nhiên và $P(n)$ là một mệnh đề toán học chứa biến $n \in \mathbb{N}$ thỏa

1. $P(1)$ là đúng, tức là $P(n)$ đúng khi $n = 1$.
2. Nếu $P(n)$ đúng thì với $P(n+1)$ cũng đúng với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Khi đó $P(n)$ là đúng với mọi số tự nhiên n.

Hướng dẫn 2. 1. Dự đoán công thức bằng cách tính $A^2, A^3, \ldots.$

2. Chứng minh công thức vừa dự đoán bằng qui nạp.

3.4 Bài tập

Bài tập 3.1. Tìm ma trận $P \in M_3(\mathbb{R})$ hoặc $P \in M_3(\mathbb{C})$ sao cho $P \neq I_3$ và $P^3 = I_3$.

Bài tập 3.2. Cho $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$. Tính $(A + I_2)^{2015}$.
Gợi ý: $(A + I_2)^2 = 2I_2$.

Bài tập 3.3. Cho $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. Tính A^{100}.

Bài tập 3.4. Cho $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$. Tính A^{13}.

4 Các phép biến đổi sơ cấp

Định nghĩa 19. Một ánh xạ $\varphi : M_{m\times n}(K) \to M_{m\times n}(K)$ được gọi là một phép biến đổi sơ cấp trên dòng nếu φ thỏa một trong các điều kiện sau đây với mọi $A \in M_{m\times n}(K)$

i φ biến dòng i thành α lần dòng i, ký hiệu $\varphi = \alpha d_i$;

ii φ biến dòng i của ma trận A thành dòng i cộng α lần dòng j, ký hiệu $\varphi = d_i + \alpha d_j$;

iii φ hoán vị dòng i và dòng j của A với nhau, ký hiệu $\varphi = d_i \longleftrightarrow d_j$.

Ví dụ 18. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{2d_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 6 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{d_1 + 3d_3} \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 8 & 6 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{d_2 \leftrightarrow d_3} \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 1 \\ 8 & 6 \end{bmatrix}$

Định nghĩa 20. Cho $A, B \in M_{m\times n}(K)$. Ta nói A tương đương với B (ký hiệu $A \sim B$) nếu B có thể nhận được từ A qua một số hữu hạn các phép biến đổi sơ cấp trên dòng.

Tương tự như các phép biến đổi sơ cấp trên dòng đối với ma trận, ta cũng có các khái niệm và các phép biến đổi sơ cấp trên cột đối với $A \in M_{m\times n}(K)$.

Định nghĩa 21. Một ánh xạ $\varphi : M_{m\times n}(K) \to M_{m\times n}(K)$ được gọi là một phép biến đổi sơ cấp trên cột nếu φ thỏa một trong các điều kiện sau đây với mọi $A \in M_{m\times n}(K)$

i φ biến cột i thành α lần cột i, ký hiệu $\varphi = \alpha c_i$;

ii φ biến cột i cảa ma trận A thành cột i cộng α lần cột j, ký hiệu $\varphi = c_i + \alpha c_j$;

iii φ hoán vị cột i và cột j của A với nhau, ký hiệu $\varphi = c_i \longleftrightarrow c_j$.

Ví dụ 19. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{2c_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{c_2 - 2c_1} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 6 \\ -4 & 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{c_1 \leftrightarrow c_3} \begin{bmatrix} 6 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -4 \end{bmatrix}$

Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng và trên cột được gọi chung là các phép biến đổi sơ cấp.

Định nghĩa 22. Một ma trận vuông cấp n trên $\mathbb{R}$ nhận được I_n qua duy nhất một phép biến đổi sơ cấp được gọi là một ma trận sơ cấp.