i.aux

ĐẠI HỌC QUỐC GIA THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN
KHOA TOÁN-TIN HỌC

———————**oOo**———————

Nguyễn Thị Hồng Nhung

Đại Số 2

THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH

Ngày 6 tháng 11 năm 2016

Mục lục

1 Khái niệm

Định nghĩa 1 (Dạng ma trận của hệ phương trình tuyến tính)**.** Một hệ PTTT trên $\mathbb{R}$ là một hệ gồm m phương trình bậc nhất với n ẩn có dạng tổng quát

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1, \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & & + & a_{2n}x_n & = & b_2, \\ \vdots & & & & \vdots & & & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m. \end{cases} \tag{1}$$

trong đó các a_{ij} (gọi là các hệ số) và các b_i (các hệ số tự do) là các phần tử cho trước, các x_j là các ẩn cần tìm.

Ví dụ 1. Hệ phương trình nào là hệ phương trình tuyến tính? Giải thích.

a.
$$\begin{cases} (\sin y)x & + & (\cos x)y & = 1, \\ 3x & + & 2y & = 1. \end{cases} \tag{2}$$

b.
$$\begin{cases} x & + & 2y & = 3, \\ & & xy & = 1. \end{cases} \tag{3}$$

c.
$$\begin{cases} x^3 & + & 2y & = 3, \\ 7x & + & y & = 1. \end{cases} \tag{4}$$

d.
$$\begin{cases} x & + & 2y & = 8, \\ x & + & 8y & = 1. \end{cases} \tag{5}$$

2 Định lý tồn tại nghiệm

Định nghĩa 2. Dạng ma trận của hệ (1)

$$Ax = b,$$

trong đó $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ là ma trận hệ số, $x = [x_1, ..., x_n]^T$ là cột các ẩn số,$b = [b_1, ..., b_m]^T$ là cột các hệ số tự do.

Định nghĩa 3 (Nghiệm của hệ PT)**.** Bộ số $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ được gọi là nghiệm của HPT nếu khi thay $x_i = c_i, \forall i = 1, ..., n$ thỏa mãn hệ phương trình trên.

Định nghĩa 4. Hai hệ phương trình được gọi là tương đương nếu chúng cùng tập nghiệm.

Nhận xét 1. Ta sẽ dùng các phép biến đổi tương đương (phép biến đổi không làm thay đổi tập nghiệm) để đưa hệ phương trình đơn giản hơn.

Nhận xét 2. Mặc dù khi ma trận hóa hệ phương trình, ta sắp xếp các ẩn thành vectơ cột nhưng nghiệm của hệ phương trình là một vectơ dòng (một phần tử của $\mathbb{R}^n$).

Định nghĩa 5. Dạng ma trận hóa hệ phương trình tuyến tính (form the augmented matrix) $\tilde{A} = [A|b]$. $\tilde{A}$ còn được gọi là ma trận mở rộng.

Ví dụ 2. Hệ phương trình

$$\begin{cases} x + 2y + z = 4, \\ x + y + 3z = 5, \\ 2x + y + z = 4. \end{cases}$$

Dạng ma trận

$$AX = b,$$

trong đó $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$, và hệ có dạng ma trận hóa

$$\tilde{A} = [A|b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right].$$

Ví dụ 3. Hệ phương trình $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + 2x_4 + x_3 = 0, \\ x_2 + x_1 + x_3 = 1 \end{cases}$ có dạng ma trận hóa là

$$\tilde{A} = [A|b] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Định lý 1. Đối với một hệ PTTT, nghiệm của hệ có thể gặp một trong 3 trường hợp sau

- Hệ vô nghiệm;
- Hệ có nghiệm duy nhất;
- Hệ có vô số nghiệm.

Một số điều kiện cụ thể để hệ vô nghiệm hoặc có nghiệm duy nhất hoặc có vô số nghiệm được khảo sát ở các phần sau (Định lý Kronecker-Capelli).

Định nghĩa 6. Hệ phương trình $AX = \mathbf{0}$, trong đó $A \in M_n(\mathbb{R})$, $\mathbf{0} \in M_{m\times 1}$ được gọi là hệ phương trình thuần nhất.

Định lý 2 (Kronecker-Kapelli)**.** Hệ phương trình **??**he) có nghiệm khi và chỉ khi

$$r(A) = r(\tilde{A}).$$

Nhận xét 3. Hệ phương trình tuyến tính thuần nhất chỉ có duy nhất nghiệm hoặc vô số nghiệm.

3 Giải hệ phương trình bằng phương pháp khử Gauss và Gauss-Jordan

Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 3x + 2y = 3\sqrt{3} + 2, \\ \sqrt{3}x + 3y = 6. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x + 2y + z = 4, \\ x + y + 3z = 5, \\ 2x + y + z = 4. \end{cases}$$

- Sử dụng các phép biến đổi tương đương để qui về hệ phương trình đơn giản hơn.
- Hệ phương trình đơn giản sẽ là hệ phương chứa trình bậc nhất theo một biến. Giải tìm giá trị cho biến này và khi thay giá trị này lên trên, ta sẽ có phương trình bậc nhất theo một biến khác. Hệ phương trình dạng này tương ứng với ma trận gọi là *dạng bậc thang*.

Một ví dụ về hệ phương trình có dạng bậc thang

$$\begin{cases} x & + & 2y & + & z & = 7, \\ & & y & + & 3z & = 5, \\ & & & & 4z & = 8. \end{cases}$$

Các phép biến đổi được dùng khi giải hệ PT bậc nhất hai ẩn ở cấp THCS được gọi là biến đổi sơ cấp trên dòng (đảm bảo các hệ phương trình tương đương nhau) và có thể tổng quát hóa cho hệ phương trình có nhiều ẩn hơn.

Định nghĩa 7. Hệ tam giác là hệ phương trình

$$Ax = b,$$

trong đó $A = \begin{bmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & u_{1,3} & \dots & u_{1,n} \\ & u_{2,2} & u_{2,3} & \dots & u_{2,n} \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & u_{n-1,n} \\ 0 & & & & u_{n,n} \end{bmatrix}$ (ma trận tam giác trên) có hệ số trên đường chéo khác không.

Nhận xét 4. Thuật ngữ "hệ tam giác" được sử dụng trong các bài toán giải và biện luận hệ gồm 3 phương trình 3 ẩn được hiểu là U là ma trận tam giác (các phần tử trên đường chéo có thể bằng không).

Phương pháp giải: dùng thuật toán thế lùi (backward substitution).

Ví dụ 4. Giải hệ phương trình $BX = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, trong đó $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$.

Định nghĩa 8. Một ma trận được gọi là ma trận bậc thang nếu:

- Các dòng bằng $\mathbf{0}$ (nếu có) sẽ nằm dưới dòng khác $\mathbf{0}$.
- Ở *các* dòng khác $\mathbf{0}$ (nếu có), phần tử khác 0 đầu tiên của dòng trên phải nằm ở cột bên trái so với cột của phần tử khác 0 đầu tiên của dòng bên dưới (các phần tử khác 0 này được gọi là phần tử trụ).

Ví dụ 5. Xác định xem ma trận có là dạng bậc thang hay không? Nếu không đưa ra giải thích.

a. $A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$,

b. $A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}$,

c. $A_3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$,

d. $A_4 = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$,

e. $A_5 = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Định nghĩa 9. Một ma trận được gọi là dạng bậc rút gọn nếu:

- Nó là ma trận bậc thang;
- Các phần tử trụ đều là 1;
- Trên mỗi cột chứa phần tử trụ, ngoài phần tử trụ, các phần tử còn lại bằng 0.

Định nghĩa 10 (Dạng bậc thang của ma trận)**.** Ma trận được gọi là ma trận bậc thang của ma trận A nếu nó là ma trận bậc thang và được tạo ra từ A bằng **hữu hạn** các biến đổi sơ cấp **trên dòng**.

Ví dụ 6. Ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 4 \end{bmatrix}$ có dạng bậc thang là $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ vì từ A ta sử dụng hai phép biến đổi $d_2 := d_2 - d_1$, $d_3 := d_3 - 2d_1$ thu được ma trận B.

Định nghĩa 11 (Dạng bậc thang rút gọn của ma trận)**.** Ma trận được gọi là ma trận bậc thang của ma trận A nếu nó là ma trận bậc thang rút gọn và được tạo ra từ A bằng **hữu hạn** các biến đổi sơ cấp **trên dòng**. (Loại ma trận này còn có nhiều tên gọi khác: dạng bậc thang chính tắc theo dòng của ma trận, hoặc ma trận rút gọn theo dòng từng bậc.)

Ví dụ 7. Xác định xem ma trận có là dạng bậc thang hay không? Nếu không đưa ra giải thích.

a. $A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$,

b. $A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}$,

c. $A_3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$,

d. $A_4 = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$,

e. $A_5 = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Nhận xét 5.

- Dạng bậc thang của ma trận luôn tồn tại và không duy nhất.
- Dạng bậc thang rút gọn của ma trận luôn tồn tại và duy nhất.

Một cách tổng quát hơn, ta xét hệ phương trình với ma trận hệ số có dạng "bậc thang".

Định nghĩa 12. Hệ phương $AX = b$ được gọi là hệ bậc thang nếu A là ma trận bậc thang và hệ không chứa phương trình dạng $0x_1 + 0x_2 + ... + 0x_n = a$ với $a \neq 0$.

Định lý 3 (Định lý 5.4 trang 41 [?].). Xét hệ $AX = b$ là hệ bậc thang gồm m phương trình, n ẩn. Khi đó

(i) Nếu tất cả các cột của A đều chứa phần tử trụ thì hệ có dạng tam giác (với tất cả các phần tử trên đường chéo khác không); do đó hệ có nghiệm duy nhất và nghiệm này được xác định bằng phương pháp thế ngược.

(ii) Nếu A có k cột không chứa phần tử trụ ($n \geq k \geq 1$) thì hệ có vô số nghiệm với k ẩn tự do. Khi đó, ta có thể chọn các ẩn tương ứng các cột không chứa phần tử trụ làm ẩn tự do.

Nhận xét 6. Trường hợp (ii), việc giải hệ phương trình có thể xem như chuyển các ẩn tự do sang vế phải để thu được hệ tam giác. Khi đó, ta thu được hệ tam giác, và ta xác định $n - k$ ẩn còn lại theo các ẩn tự do bằng phương pháp thế ngược.

Ví dụ 8. Giải hệ phương trình $BX = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, trong đó $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$.

3.1 Thuật toán Gauss

Nếu một hệ phương trình được qui về dạng bậc thang, ta sẽ dễ dàng giải và biện luận.

Đặt vấn đề: Mọi ma trận đều có thể đưa về dạng bậc thang hay không?

Câu trả lời là có. Đây là ý tưởng độc đáo để giải hệ phương trình được Gauss[1] được đề xuất vào năm 1801. Để tìm ma trận bậc thang của ma trận $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, ta dùng thuật toán Gauss, được thực hiện theo các bước sau

Bước 1 Gán $i := 1, j := 1$.

Bước 2 Chọn phần tử trụ cho **cột thứ j** (nếu có) [2].

+ Nếu $a_{ij} \neq 0$ thì chọn phần tử này làm phần tử trụ.
Chuyển sang Bước 3.

[1] Gauss là nhà toán học nổi tiếng với cách giải thú vị cho bài toán: tính tổng $1 + 2 + ... + 100$.

[2] Chú ý đặc tính ma trận KQ khi bắt đầu bước này.

+ Nếu $a_{ij} = 0$ và tồn tại $k > i$ sao cho $a_{kj} \neq 0$. Ta hoán vị dòng i và dòng k. Ta chọn a_{ij} (mới) làm phần tử trụ.
  Chuyển sang Bước 3.

+ Nếu $a_{kj} = 0$ với mọi $k \geq i$ thì cột thứ j không có phần tử trụ. Ta thay $j := j+1$ (nghĩa là chuyển sang cột mới) rồi quay lại bước 2.

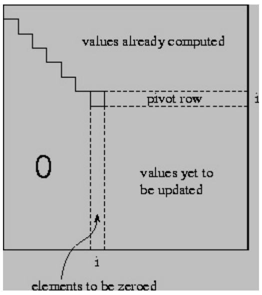
Bước 3 Với phần tử trụ a_{ij} tìm được ở bước 2, ta thực hiện "khử" các phần trên cột thứ j bên dưới dòng i (đưa chúng về 0) bằng phép biến đổi

$$d_k := d_k - \frac{a_{kj}}{a_{ij}} d_i, \forall k > i. \tag{6}$$

Tiếp theo ta thay $i := i+1$, $j := j+1$. [3]

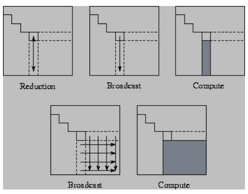
Bước 4 Lặp lại bước 2 cho đến khi $i = m$ hoặc $j = n$.

Nhận xét 7. Đầu bước 3, ma trận kết quả có dạng như Hình 1[4].



Hình 1:

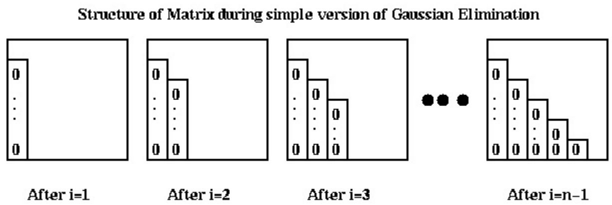
Nhận xét 8. Diễn biến chọn phần tử trụ và toàn bộ bước ba được mô tả như Hình 2[5].



Hình 2:

Nhận xét 9. Quá trình biến đổi ma trận thể hiện qua Hình 3[6].

[3] Chú ý đặc tính ma trận KQ khi kết thúc bước này.
[4] http://www.mcs.anl.gov/~itf/dbpp/text/node90.html
[5] http://www.mcs.anl.gov/~itf/dbpp/text/node90.html
[6] http://www.cs.berkeley.edu/~demmel/cs267/lecture12.html



Hình 3:

Ví dụ 9. Tìm dạng bậc thang của ma trận sau

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & -5 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 6 & -7 & 4 \end{bmatrix}.$$

Áp dụng thuật toán khử Gauss cho $\tilde{A}$, ta giải được hệ phương trình $Ax = b$. **Các bước giải (+biện luận) hệ bằng phương pháp khử Gauss**

Bước 1: Thiết lập ma trận mở rộng $\tilde{A}$ của hệ phương trình.

Bước 2: Dùng thuật toán khử Gauss để đưa ma trận $\tilde{A}$ về dạng bậc thang.

Bước 3: Dựa thuật toán thế ngược để giải (+ biện luận) hệ phương trình.

Đối với hệ phương trình thuần nhất $Ax = \mathbf{0}$, trong đó $A \in M_n(\mathbb{R})$, $\mathbf{0} \in M_{m\times 1}$, ma trận bậc thang của $\tilde{A}$ luôn có dạng $\begin{bmatrix} B & \nvdash \end{bmatrix}$ và B là ma trận bậc thang của A. Do đó, để giải hệ phương trình $AX = \mathbf{0}$, ta chỉ cần đưa ma trận A về dạng bậc thang.

Ví dụ 10. [Thí dụ áp dụng thuật toán Gauss giải HPTTT] Giải hệ phương trình trong Thí dụ 2.

Bài giải 1. Hệ có dạng ma trận hóa

$$\tilde{A} = [A|b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{d_2:=d_2-d_1, d_3=d_3-2d_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & -4 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{d_3:=d_3-3d_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -7 & -7 \end{array}\right].$$

Khi đó, hệ phương trình ban đầu tương đương về hệ

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, \\ -x_2 + 2x_3 = 1, \\ -7x_3 = -7. \end{cases}$$

Do đó hệ chỉ có duy nhất nghiệm $(x_1, x_2, x_3) = (1, 1, 1)$. Nếu trong quá trình biến đổi xuất hiện một dòng dạng

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & | & a \end{bmatrix},$$

trong đó $a \neq 0$, thì hệ phương trình vô nghiệm.

Ví dụ 11. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x + 2y + z = 4, \\ 2x + 3y + z = 5, \\ y + z = 1. \end{cases}$$

Ví dụ 12. Giải hệ phương trình sau bằng phương pháp khử Gauss

$$\begin{cases} x - 2y + 2z = -2, \\ 2x - 3y + 6z = 1, \\ x + y + 7z = -1. \end{cases}$$

3.2 Thuật toán Gauss-Jordan

\+ Mô tả thuật toán.

\+ So sánh với thuật toán khử Gauss.

\+ Thí dụ áp dụng thuật toán này để giải hệ phương trình.

1. Sau khi xác định được phần tử trụ a_{ij}, ta chuẩn hóa phần tử trụ (biến phần tử trụ thành 1).

2. Thực hiện bước 3 như thuật toán Gauss nhưng có hiệu chỉnh như sau: Khử tất cả các phần tử khác trên cùng cột của phần tử trụ (dùng phép biến đổi $d_k := d_k - a_{kj} d_i, \forall k \neq i$.)

Để tìm ma trận bậc thang của ma trận $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, ta dùng thuật toán Gauss, được thực hiện theo các bước sau

Bước 1 Gán $i := 1, j := 1$.

Bước 2 Chọn phần tử trụ cho **cột thứ** j (nếu có) [7].

+ Nếu $a_{ij} \neq 0$ thì chọn phần tử này làm phần tử trụ.
  Chuyển sang Bước 3.

+ Nếu $a_{ij} = 0$ và tồn tại $k > i$ sao cho $a_{kj} \neq 0$. Ta hoán vị dòng i và dòng k. Ta chọn a_{ij} (mới) làm phần tử trụ.
  Chuyển sang Bước 3.

+ Nếu $a_{kj} = 0$ với mọi $k \geq i$ thì cột thứ j không có phần tử trụ. Ta thay $j := j + 1$ (nghĩa là chuyển sang cột mới) rồi quay lại bước 2.

Bước 3Với phần tử trụ a_{ij} tìm được ở bước 2, ta thực hiện: chuẩn hóa dòng i ($d_i = d_i/a_{ij}$) và "khử" các phần trên cột thứ j nằm bên dưới, ngoài dòng i (đưa chúng về 0) bằng phép biến đổi

$$d_k := d_k - \frac{a_{kj}}{a_{ij}} d_i, \forall k > i. \tag{7}$$

$$d_k := d_k - a_{kj} d_i, \forall k \neq i. \tag{8}$$

Tiếp theo ta thay $i := i + 1$, $j := j + 1$. [8]

Bước 4 Lặp lại bước 2 cho đến khi $i = m$ hoặc $j = n$.

Ví dụ 13. Tìm dạng chính tắc theo dòng của ma trận sau

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & -5 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 6 & -7 & 4 \end{bmatrix}.$$

[7] Chú ý đặc tính ma trận KQ khi bắt đầu bước này.
[8] Chú ý đặc tính ma trận KQ khi kết thúc bước này.

4 Bài tập

Bài tập 4.1. Giải hệ phương trình sau bằng phương pháp khử Gauss

$$\begin{cases} x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = 7, \\ 2x_1 & - & x_2 & + & 4x_3 & = 17, \\ 3x_1 & - & 3x_2 & + & 5x_3 & = 25. \end{cases}$$

Bài tập 4.2. Giải hệ phương trình sau bằng phương pháp khử Gauss

$$\begin{cases} x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = 7, \\ 2x_1 & - & x_2 & + & 4x_3 & = 8, \\ 4x_1 & - & 5x_2 & + & 6x_3 & = 22. \end{cases}$$

Bài tập 4.3 (Bài 141 [?])**.** Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x_1 & - & 3x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = 3, \\ 3x_1 & + & 5x_2 & + & 3x_3 & - & 4x_4 & = -8, \\ 4x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & + & 7x_4 & = 14. \end{cases}$$

Bài tập 4.4. Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} x & + & 2y & + & z & = 1, \\ 2x & + & 5y & + & 3z & = 5, \\ 3x & + & 7y & + & m^2z & = 6. \end{cases}$$

Giải và biện luận hệ phương trình này theo m.

Bài tập 4.5. Với giá trị m nào thì hệ

$$\begin{cases} x & + & 2y & + & z & = 0, \\ 2x & + & y & + & 3z & = 0, \\ 3x & + & 2y & + & mz & = 0. \end{cases}$$

có nghiệm không tầm thường?

Bài tập 4.6. Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + kx_3 = 3, \\ x_1 + kx_2 + 3x_3 = 2. \end{cases}$$

Xác định số thực k sao cho

a. hệ có nghiệm duy nhất;

b. hệ có vô nghiệm;

c. hệ có vô số nghiệm.

Trong trường hợp hệ tương thích (có nghiệm), giải nó.

Bài tập 4.7 (*Lũy thừa* 2015)**.** Cho $A \in M_2(\mathbb{R})$ sao cho $A^{2015} = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$, và $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$.

Xác định $\left(B^{-1}AB\right)^{2015}$.

Bài tập 4.8. Cho $A \in M_n(\mathbb{R})$ thỏa $A^2 - 2A + I_n = \mathbf{0}$. Chứng minh rằng $A^{-1} = 2I_n - A$.