Đề thi Kết thúc môn học, Đông 2016
Môn: Đại số tuyến tính

Trường Đại học Công nghệ - Đại học Quốc gia Hà Nội

(Thời gian làm bài: 120 phút)

Bài 1. (*2 điểm*) Cho hệ phương trình với tham số m:

$$\begin{aligned} x - y + z &= -1 \\ 2x + y + 2z &= 4 \\ (m+1)x - y + 3z &= 2. \end{aligned}$$

(a) Giải hệ phương trình trên với $m = 2$.
(b) Biện luận số nghiệm của hệ phương trình trên theo tham số m.

Bài 2. (*2 điểm*) Cho

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & a \\ 1 & 4 & a^2 \end{pmatrix}.$$

(a) Tính $\det(A)$ khi $a = -1$ và $a = 2$.
(b) Tìm tất cả các giá trị của a để $\det(A^T A) = 0$.

Bài 3. (*2 điểm*) Cho ánh xạ tuyến tính $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ được xác định như sau:

$$T(x, y, z, t) = (x + 3y + z + 4t, 2x + 7y + 3z + 9t, x + 5y + 3z + t, x + 2y + 8t).$$

(a) Tim ma trận của T trong các cở sở chính tắc (chuẩn tắc) của $\mathbb{R}^4$.
(b) Tìm một cơ sở của ảnh $\mathrm{im}T$ của T.

Bài 4. (*2 điểm*) Cho ánh xạ tuyến tính $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi

$$T(x, y, z) = (x - y + z, -x + y - z, 2x - 2y + 2z).$$

(a) Tìm một cơ sở và số chiều của hạch (hạt nhân) $\ker T$ của T.
(b) Dùng Gram-Schmidt để đưa cơ sở tìm được ở phần (a) về cơ sở trực chuẩn (theo tích vô hướng Euclid trong $\mathbb{R}^3$).

Bài 5. (*2 điểm*) Cho ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix},$$

trong đó a là một số thực.

(a) Tìm các giá trị riêng của ma trận A, từ đó hãy tìm điều kiện của a để ma trận A có 3 giá trị riêng khác nhau.
(b) Khi $a = 2$, hãy tìm một ma trận trực giao P (nếu có) sao cho $P^T AP$ là một ma trận đường chéo. Viết ma trận đường chéo nhận được.

Không sử dụng tài liệu, không sử dụng thiết bị điện tử (điện thoại, máy tính bảng,...) trong giờ kiểm tra. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Đáp án: Đề số 2

Bài 1. a) Với $m = 2$.

$$\begin{aligned} x - y + z &= -1 \\ 2x + y + 2z &= 4 \\ 3x - y + 3z &= 2. \end{aligned}$$

Ta có

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 0 & 5 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Do vậy hệ vô nghiệm.

b) Biện luận số nghiệm của hệ phương trình trên theo tham số m :
Định thức của ma trận hệ số là $3(2-m)$. Với $m \neq 2$ thì định thức của ma trận hệ số khác không. Do vậy hệ có nghiệm duy nhất.
Khi $m = -2$ thì hệ vô nghiệm (cau a)).

Bài 2. (a) Khi $a = -1$ hay $a = 2$ thì có hai cột bằng nhau nên định thức bằng 0.
(b) $\det(A^T A) = \det(A)^2$ nên chỉ bằng 0 khi $\det(A) = 0$. $\det(A) = 0$ là phương trình bậc 2 theo a nên chỉ có 2 nghiệm $a = -1$ và $a = 2$.

Bài 3. (a) Ma trận chính tắc của T là

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 7 & 3 & 9 \\ 1 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

(b) im$T$ bằng không gian cột của A. Đưa A về dạng thu gọn ta nhận được

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Một cơ sở của $\mathrm{im}(T)$ là $\{(1,2,1,1),(3,7,5,2),(4,9,1,8)\}$.

Bài 4. Ma trận A của T là

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Hạch của T là nghiệm của hệ phương trình thuần nhất $Av = 0$ với ma trận tăng sau:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ta đưa ma trận trên về dạng bậc thang bằng các phép biến đổi dòng:

$$D1 + D2 \longrightarrow D2 \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$2D1 - D3 \longrightarrow D3 \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình $Av = 0$ được cho bởi $v_1 - v_2 + v_3 = 0$, hay $v_1 = v_2 - v_3$ với $v_2, v_3 \in \mathbb{R}$. Do đó với mọi $v = (v_1, v_2, v_3) \in \ker T$, ta có:

$$v = (v_2 - v_3, v_2, v_3) = (v_2, v_2, 0) + (-v_3, 0, v_3) = v_2(1,1,0) + v_3(-1,0,1).$$

Khi đó $\{(1,1,0), (-1,0,1)\}$ là một cơ sở của $\ker T$ và $\dim(\ker T) = 2$.

(b) Ta trực chuẩn hóa cơ sở tìm được ở trên theo Gram-Schmidt:

$$\begin{aligned} &w_1 := v_1 := (1,1,0) \\ &v_2 := (-1,0,1) \\ &w_2 := v_2 - \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1 = (-1,0,1) - \frac{-1}{2}(1,1,0) = \Big(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\Big). \end{aligned}$$

Vậy $\{u_1, u_2\}$ là một cơ sở trực chuẩn của $\ker T$ với

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{w_1}{\|w_1\|} = \Big(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\Big). \\ u_2 &= \frac{w_2}{\|w_2\|} = \Big(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\Big). \end{aligned}$$

Bài 5. a) Đa thức đặc trưng của ma trận A là

$$\text{(1)} \quad \chi_A(\lambda) = det(\lambda I_3 - A) = det \begin{pmatrix} \lambda - 1 & -a & 0 \\ -a & \lambda - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda + 3 \end{pmatrix} =$$

$$= (\lambda + 3) det \begin{pmatrix} \lambda - 1 & -a \\ -a & \lambda - 1 \end{pmatrix} =$$

$$= (\lambda + 3)((\lambda - 1)^2 - a^2) = (\lambda + 3)(\lambda - 1 + a)(\lambda - 1 - a)$$

Từ (1) ta thấy các giá trị riêng của A là

$$\text{(2)} \quad \lambda_1 = -3, \lambda_2 = 1 - a, \lambda_3 = 1 + a$$

Từ (2) dễ thấy để A có 3 giá trị riêng khác nhau khi và chỉ khi $1 \pm a \neq -3$ và $1 - a \neq 1 + a$, tức là $a \neq \pm 4$ và $a \neq 0$.

b) Khi $a = 2$, từ (2) ta thấy ma trận A có 3 giá trị riêng là $\lambda_1 = -3, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 3$. $\lambda_1 = -3$: Xét hệ

$$\text{(3)} \quad \begin{pmatrix} -4 & -2 & 0 \\ -2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Giải hệ (3) ta được các vector riêng tương ứng với giá trị riêng $\lambda_1 = -3$ có dạng $(x_1, x_2, x_3) = t(0,0,1), t \in \mathbb{R}$. $\lambda_2 = -1$: Xét hệ

$$\text{(4)} \quad \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Giải hệ (4) ta được các vector riêng tương ứng với giá trị riêng $\lambda_2 = -1$ có dạng $(x_1, x_2, x_3) = t(1, -1, 0), t \in \mathbb{R}$.

$\lambda_3 = 3$: Xét hệ

(5)
$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Giải hệ (3) ta được các vector riêng tương ứng với giá trị riêng $\lambda_3 = 3$ có dạng $(x_1, x_2, x_3) = t(1, 1, 0)$.

Cho $t = 1$, ta được các vector riêng tương ứng lần lượt với $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ như sau:

(6)
$$p_1 = (0, 0, 1), p_2 = (1, -1, 0), p_3 = (1, 1, 0)$$

Vì chúng tương ứng với các giá trị riêng khác nhau nên đôi một trực giao với nhau. Chuẩn hóa:

$$q_1 = \frac{p_1}{||p_1||} = (0, 0, 1)$$

$$q_2 = \frac{p_2}{||p_2||} = 1/\sqrt{2}(1, -1, 0) = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0)$$

$$q_3 = \frac{p_3}{||p_3||} = 1/\sqrt{2}(1, 1, 0) = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P^T A P = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$