Chương 2: Biến ngẫu nhiên

I. Biến ngẫu nhiên rời rạc

Bản chất của biến ngẫu nhiên rời rạc là một dạng biểu diễn khác của biến cố.

Ví dụ 1: Tung một viên xúc sắc 1 lần. Gọi X là số chấm xuất hiện. Khi đó X là biến ngẫu nhiên rời rạc nhận giá trị từ 1 đến 6. Dễ thấy, X = 1 tương đương với biến cố xuất hiện mặt 1 chấm.

- Tung 2 viên xúc sắc đồng thời. Gọi X là tổng số chấm xuất hiện. Hỏi X có thể nhận những giá trị nào?

Các dạng bài tập chính:

- Lập bảng phân phối xác suất (quan trọng nhất)
- Xác định và vẽ hàm phân phối xác suất
- Tính toán các đại lượng: Xác suất, kì vọng, phương sai

Lập bảng phân phối xác suất là một kĩ năng rất quan trọng. Hãy tư duy đơn giản rằng xác định xác suất cho một giá trị của biến ngẫu nhiên là giải một bài toán xác suất nhỏ.

Ví dụ, bảng phân phối xác suất cho ví dụ 1 ở trên là:

X	1	2	3	4	5	6
p	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

- Tổng các giá trị của p là bao nhiêu?

Ví dụ 2: Tung 3 viên xúc sắc đồng thời. Gọi X là số mặt 6 chấm xuất hiện. Lập bảng phân phối xác suất của X.

Giải:

Dễ thấy $X \in \{0,1,2,3\}$

X = 0 tương đương với biến cố: Không xuất hiện mặt 6 chấm nào trong 3 viên xúc sắc.

Ta có: $P(X = 0) = (5/6)^3$

X =1 tương đương với biến cố: Xuất hiện mặt 6 chấm đúng 1 lần trong 3 viên xúc sắc

Ta có: $P(X = 1) = 25/72$

- Các bạn nhớ tới công thức xác suất nào ở đây?

Làm tương tự với trường hợp X = 2 và X = 3 ta có bảng phân phối xác suất sau:

X	0	1	2	3
p	125/216	25/72	5/72	1/216

Khi mới bắt đầu luyện tập, các bạn hãy quy từ những giá trị của X ra biến cố, rồi tính xác suất của biến cố đó qua những cách đã được học ở chương I. Sau này, khi đã dần quen rồi, có thể nhẩm và bấm máy tính, viết kết quả trực tiếp vào trong bảng. Lưu ý, sau khi lập xong bảng cần kiểm tra lại bằng cách cộng tổng các xác suất đã tính được.

Xác định và vẽ hàm phân phối xác suất là một bài toán tương đối dễ nếu đã có bảng phân phối xác suất. Cần làm cẩn thận để lấy được đủ điểm từ bài tập này.

Ví dụ 3: Cho bảng phân phối xác suất sau:

X	1	2	3	4
p	0,3	0,2	0,4	0,1

Xác định và vẽ hàm phân phối xác suất

Giải:

Hàm phân phối xác suất: F(x) = P(X < x)

Xác định F(x) bằng cách chia khoảng của x dựa vào những điểm sẵn có của biến ngẫu nhiên.

Với x < 1: F(x) = P(X < x) = 0 vì không có giá trị nào của X nhỏ hơn 1

Với 1 ≤ x < 2: F(x) = P(X < x) = P(X = 1) = 0,3

Với 2 ≤ x < 3: F(x) = P(X < x) = P(X =1) + P(X = 2) = 0,5

- Làm tương tự với 2 trường hợp còn lại và kết luận

Vẽ hàm phân phối xác suất: Lưu ý rằng đồ thị của hàm là các mũi tên song song với nhau, và không phải là một hình thống nhất, liên tục.

Tính toán các đại lượng: Cũng là một dạng toán rất dễ. Nhớ công thức và tính toán cẩn thận bằng máy tính.

Giả sử biến ngẫu nhiên X có bảng phân phối xác suất như sau:

X	x(1)	x(2)	...	x(n)
p	p(1)	p(2)	...	p(n)

Giá trị kì vọng: E(X) = x(1).p(1) + x(2).p(2) + ... + x(n).p(n)

Lưu ý: Giá trị kì vọng còn có tên gọi khác là giá trị trung bình.

Phương sai: $V(X) = (x(1) - E(X))^2.p(1) + (x(2) - E(X))^2.p(2) + ... + (x(n) - E(X))^2.p(n)$

Lưu ý: Độ lệch chuẩn $\sigma = \sqrt{V(X)}$

Tính toán xác suất: P(a < X < b) = F(b) – F(a)

P(X < a) = F(a); P(a < X) = 1 – F(a)

II. Biến ngẫu nhiên liên tục:

Nghe khá "nguy hiểm" nhưng thực ra bài tập phần này khá dễ, chỉ cần biết một số công thức cơ bản và tính toán cẩn thận là sẽ làm được.

Bài toán về tìm hằng số c nào đó trong hàm phân phối xác suất, hoặc hàm mật độ xác suất.

Chìa khóa để giải bài toán này:

- Với hàm phân phối: F(x) là **hàm liên tục** trên R
- Với hàm mật độ: Ta có công thức $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) = 1$

Ví dụ 4: Cho hàm phân phối xác suất: $F(x) = \begin{cases} 0 (x \le 0) \\ ax^3 - 3x^2 + 2x (0 < x \le 1) \\ 1 (x > 1) \end{cases}$. Tìm a.

<u>**Giải**</u>: F(x) là hàm liên tục trên R nên liên tục tại điểm 0 và 1.

Ta có $\lim_{x \to 0^+} F(x) = \lim_{x \to 0^-} F(x) \Rightarrow 0 = a.0^3 - 3.0^2 + 2.0$ (hiển nhiên)

$\lim_{x \to 1^+} F(x) = \lim_{x \to 1^-} F(x) \Rightarrow 1 = a.1^3 - 3.1^2 + 2.1 \Rightarrow a = 2$

Ví dụ 5: Cho hàm mật độ xác suất: $f(x) = \begin{cases} k(30 - x)(x \in (0,30)) \\ 0 (x \notin (0,30)) \end{cases}$. Tìm k.

<u>**Giải:**</u> $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{0}^{30} k(30 - x)dx = (30kx - \frac{kx^2}{2})\Big|_0^{30} = 450k = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{450}$

- Tại sao từ cận $-\infty, +\infty$ lại chuyển về cận 0 và 30?

Dạng bài tính xác suất:

$$P(a<x<b)=F(b)-F(a)=\int_a^b f(x)dx$$

$$P(x<b)=F(b)=\int_{-\infty}^{b} f(x)$$

$$P(x>a)=1-F(a)=\int_a^{+\infty} f(x)$$

Xác định hàm phân bố xác suất dựa vào hàm mật độ và ngược lại

$$f(x)=F'(x)$$

$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)$ (chú ý chia khoảng của x)

Tính phương sai, kì vọng, mốt, trung vị:

$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$ (nếu cho F(x) cũng phải tính ra f(x) rồi mới dùng công thức)

$$Var(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx$$

Mốt (còn được gọi là giá trị có nhiều khả năng xảy ra nhất): $ModX=x_0$ khi f(x) đạt cực đại tại x_0

Trung vị: $x_e : F(x_e)=\frac{1}{2}; \int_{-\infty}^{x_e} f(x)dx=\frac{1}{2}$