Chương 3: Một số quy luật phân phối xác suất

I. Biến ngẫu nhiên rời rạc

1. Quy luật nhị thức

Kí hiệu: $X \sim B(n, p)$

Xét một phép thử, chỉ có thể xảy ra biến cố A và $\overline{A}$ với xác suất xảy ra A là p. Thực hiện phép thử n lần. Gọi X là số lần A xảy ra. Khi đó X tuân theo quy luật nhị thức B(n, p)

- Các bạn liên tưởng đến công thức tính xác suất nào?

Dễ thấy xác suất X xảy ra k lần là $P(X = k) = C_n^k.p^k.(1-p)^{n-k}$

Ví dụ 1: 1 đề trắc nghiệm có 10 câu, mỗi câu có 4 phương án. Một học sinh do không học gì nên khoanh bừa các đáp án. Tính xác suất để học sinh đó đúng ít hơn 2 câu?

Giải:

Gọi X là số câu trả lời đúng của học sinh đó

Ta có P(X < 2) = P(X = 0) + P(X = 1)

- Kết quả cuối cùng là?

Ghi nhớ: EX = np; VX = np(1 – p)

Bài toán về mốt: Tên gọi khác của mốt là "giá trị có nhiều khả năng xảy ra nhất", cần lưu ý từ ngữ để nhận ra đại lượng cần tính trong bài toán.

Kí hiệu mốt là k thì ta có bất đẳng thức tính mốt: $(n+1)p - 1 \le k \le (n+1)p$

- Trong ví dụ 1 ở trên, số câu trả lời đúng nhiều khả năng nhất là bao nhiêu?

2. Quy luật Poisson

Đây là một trường hợp đặc biệt của quy luật nhị thức nhưng thường xuất hiện trong các bài kiểm tra nhiều hơn nhị thức. Quy luật nhị thức sẽ trở thành quy luật Poisson khi: $n \ge 30; p \le 0,1; np < 5$
Hãy chú ý đến quy luật Poisson khi ta thấy xác suất của biến cố được cho quá nhỏ (0,05, 2% ...), nhưng luôn chú ý kiểm tra điều kiện $np < 5$, chỉ khi có điều kiện đó bài toán mới giải theo Poisson.

Quy luật Poisson kí hiệu là $X \sim P(\lambda)$ với $\lambda = np$

Khi đó $P(X = k) = e^{-\lambda}.\frac{\lambda^k}{k!}$ (cố gắng nhớ công thức này, nếu không sẽ không tính ra đúng kết quả như trong đáp án trắc nghiệm)

Ghi nhớ: $EX = VX = \lambda$

Bài toán về mốt: $\lambda - 1 \le k \le \lambda$

Lưu ý: Các bài toán nói rõ phân phối theo quy luật Poisson hoặc ta thấy rõ phân phối theo quy luật nhị thức với p rất nhỏ thì việc xác định cách giải là khá khó nhận ra. Có một lưu ý ít được sinh viên để ý, đó là **các biến biểu diễn những đại lượng xảy ra trong một khoảng thời gian, không gian xác định đều tuân theo quy luật Poisson.** Ví dụ như số xe hơi qua cầu, số người đến một quầy bán kem, số bóng đèn cháy trong một ngày ... Đó chính là "bẫy" trong các bài kiểm tra mà không ít bạn ngơ ngác vì không hiểu bài này giải thế nào.

Ví dụ 2: Trong một giờ, trung bình có 8 người vào một cửa hàng. Tính xác suất trong một giờ nào đó có hơn 7 người vào cửa hàng?

Giải:

Biến ngẫu nhiên X: Số người vào cửa hàng trong một giờ tuân theo quy luật Poisson vì có một không gian xác định, đó là cửa hàng (nghe hơi chuối nhỉ ^.^)

Quy luật Poisson chỉ có một tham số duy nhất là λ , ta xác định tham số đó thế nào? Vì trung bình có 8 người vào cửa hàng trong 1 giờ nên $E = 8 \Rightarrow \lambda = 8$

- Hoàn thiện lời giải bài toán?

II. Biến ngẫu nhiên liên tục

1. Phân phối chuẩn:

Một phân phối cực kì quan trọng, còn trải dài đến cả chương thống kê. Sách viết rất dài nhưng tựu chung lại chỉ cần nhớ những điểm quan trọng nhất

Nếu một biến ngẫu nhiên X phân phối chuẩn: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ thì $EX = \mu; VX = \sigma^2$

Chỉ cần ghi nhớ công thức cực kì quan trọng sau: $P(a \le X \le b) = \phi(\frac{b-\mu}{\sigma}) - \phi(\frac{a-\mu}{\sigma})$

Trong đó, ϕ là giá trị tới hạn, có thể dễ dàng tra bảng ra hoặc sẽ được cho trực tiếp trong đề thi.

2. Từ phân phối nhị thức tới phân phối chuẩn:

Trong một số câu hỏi, nếu chỉ cho một biến ngẫu nhiên tuân theo quy luật nhị thức, nhưng lại hỏi xác suất để biến ngẫu nhiên đó nằm giữa 2 giá trị, ta sẽ làm thế nào? Chẳng lẽ tính lần lượt tất cả các giá trị có thể? Thực ra, khi đó chúng ta cần ngay lập tức nghĩ tới việc xấp xỉ phân phối nhị thức thành phân phối chuẩn.

Nếu $X \sim B(n,p)$ và $n \geq 5; \left|\sqrt{\frac{p}{1-p}} - \sqrt{\frac{1-p}{p}}\right| . \frac{1}{\sqrt{n}} < 0,3$ thì ta có thể **xấp xỉ phân phối nhị thức thành phân phối chuẩn,** tức $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ với $\mu = np; \sigma^2 = np(1-p)$

Khi đó, bài toán tìm xác suất để biến X nằm giữa 2 giá trị trở nên rất đơn giản, ta chỉ cần áp dụng công thức của phân phối chuẩn là được.